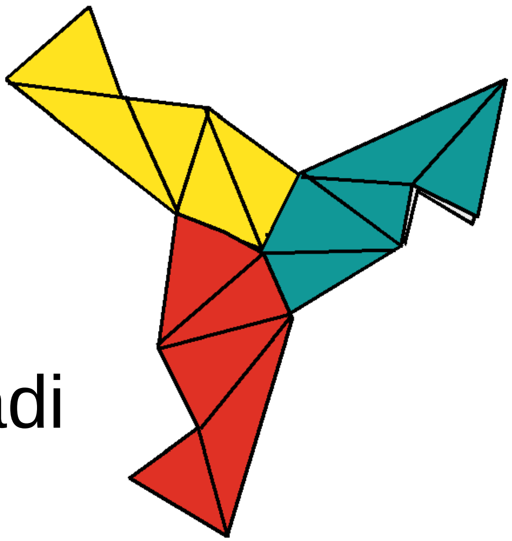
GEOMETRI BIDANG (MM11203)

- DOSEN PENGASUH

  MASHADI

  HASRIATI

  M. NATSIR



- Buku Wajib : Geometry by Mashadi
- BUKU Tambahan

1. GEOMETRY BY MOISE DOWNS
2. Introductions to the Geometry of the Trianggle (Paul Yiu. 2001)
3. Advanced Euclidean Geometry, Roger A Johnson,

MATERI

Buku Wajib (bab 5 s/d bab 11)

Pertemuan	Materi	sumber utama baca juga buku 2 & 3
1	*. Kontrak Kuliah *. Pengantar *. Sifat Dasar Lingkaran	 buku 1 hal 1 s/d 10 buku 1 hal 127s/d 142
2	*. Lingkaran Luar segitiga *. lingkaran Dalam Segitiga	buku 1 hal 137 s/d 142 buku 1 hal 142 s/d 157
3	*. Lanj Lingkaran Dalam Segitiga *. Lingkaran Singgung Luar *. Teorema Carnot's	Buku 1 hal 142 s/d 157 Buku 1 hal 157 s/d 166 Buku 1 hal 167 s/d 173
4+5	*. Teoema Centroid dan T Euler *. Segiempat Siklik	Buku 1 hal 172 s/d 178 Buku 1 hal 179 s/d 223
6	Garis2 Istimewa dalam segitiga	Buku 1 hal 224 s/d 241
7	*. Remidian sebelum UTS *. Problem Solving and app	
8	**U T S**	

9	*. *. Pembahasan Soal-soal UTS *. Teorme Ceva	Buku 1 hal 242 s/d 251
10	*. Teorema Brianchon *. Teorema Menelaus	Buku 1 hal 251 s/d 258 Buku 1 hal 259 s/d 262
11	*. Konsekuensi T Ceva & Menelaus *. Teorema Pappus	Buku 1 hal 263 s/d 270 Buku 1 hal 271 s/d 273
12	*. Teorema Pascal *. Teorema Desarques's *. Problem Solving	Buku 1 hal 273 s/d 277 Buku 1 hal 277 s/d 286
13	*. Teorema Butterfly	Buku 1 hal 287 s/d 300
14	*. T Butterfly untuk segiempat *. T Butterfly dengan Menelaus	Buku 1 hal 300 s/d 312
15	*. Ketaksamaan Erdos-Mordell *. Ketaks Bertanda Erdos-Mordell *. Ketaksamaan Barrow's * Ketaksamaan Erdos-Mordell Untuk Segiempat	Buku 1 hal 313 s/d 345
16	**U A S**	

Catatan :

1. Rincian materi bisa saja berobah
2. Kuiz minimal sekali sebelum UTS dan sekali sesudah UTS

Bobot penilaian untuk masing-masing item aktivitas adalah sebagai berikut :

NO	JENIS TES	% NILAI	KETERANGAN
1	PR	20 %	
2	KUIS	25 %	
3	UJIAN TENGAH SEMESTER	25%	
4	UJIAN SEMESTER	30 %	
5	SOAL BONUS		DITAMBAHKAN PADA NILAI MID ATAU SEMESTER

CATATAN : BAHAN UJIAN SEMESTER ADALAH SEMUA BAHAN KULIAH

PENGANTAR UMUM

Motivasi, soal unas thn 2006/07

Data pada tabel berikut menunjukkan tinggi badan peserta seleksi pramugari.

Tinggi badan (cm)	f
150 – 154	6
155 – 159	10
160 – 164	18
165 – 169	22
170 – 174	4
	60

Apa yang anda lakukan jika lupa rumusnya

Peserta yang lulus seleksi adalah mereka yang memiliki tinggi lebih dari 156 cm. Banyak peserta yang lulus seleksi adalah ....

a. 44 orang
b. 46 orang
c. 48 orang
d. 49 orang
e. 51 orang

Terka saja jawabnya atau lupakan soal tersebut

Pembahasan

Kunci
E

$$N = L + \frac{x - f_x}{f}$$

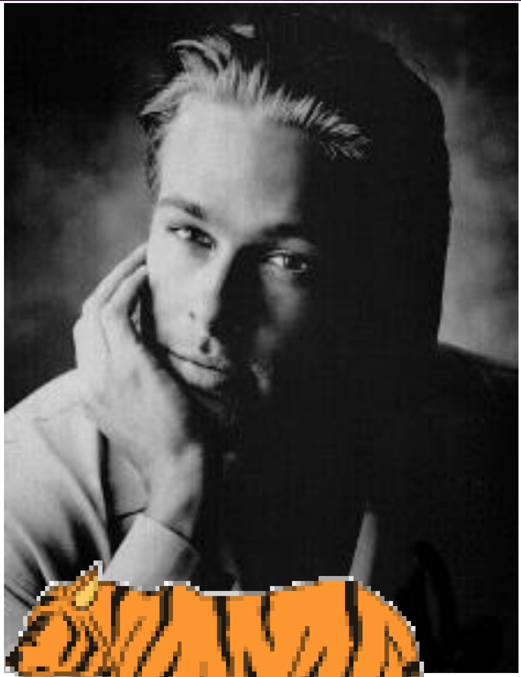
$$156 = 154{,}5 + \frac{x - 6}{10} . 5$$

$$1{,}5 = \frac{5\,(x - 6)}{10}$$

$$x - 6 = 3$$

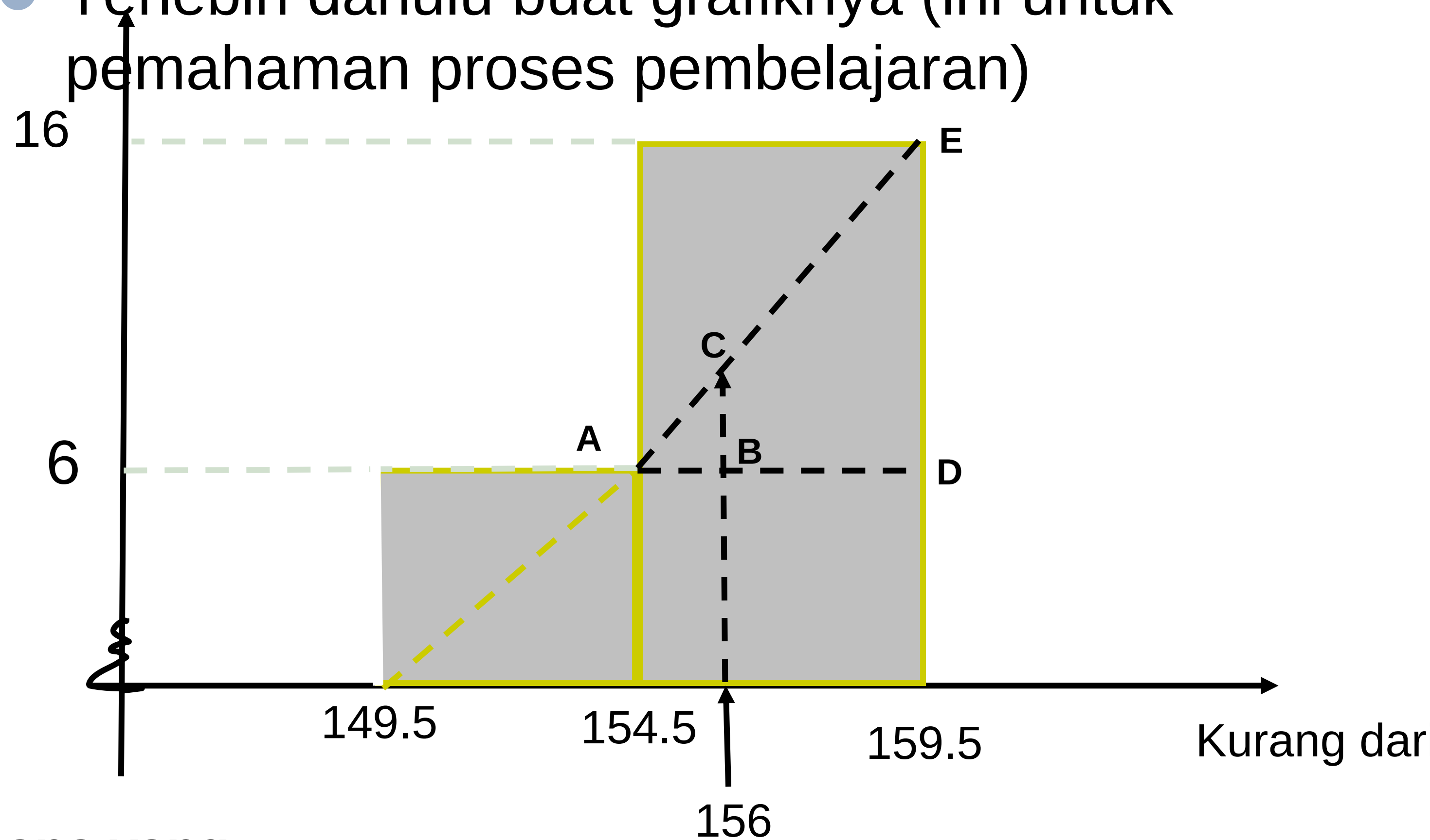
$$x = 9$$

$\therefore$ Peserta yang lulus seleksi = 60 – 9 = 51 orang



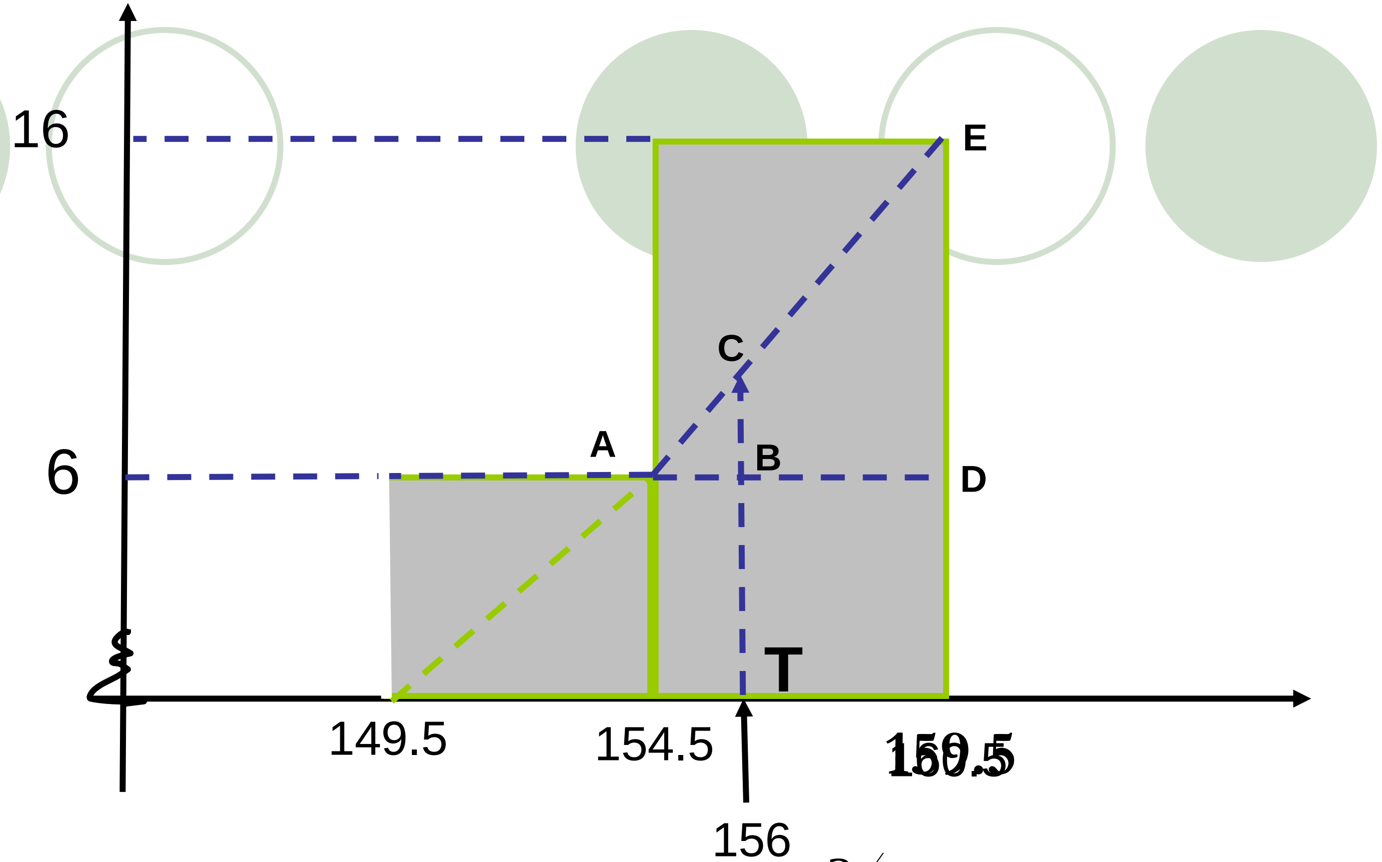
Mari kita lihat penyelesaian secara geometri

- Terlebih dahulu buat grafiknya (ini untuk pemahaman proses pembelajaran)



Segita mana yang sebangun

ABC ≅ ADE



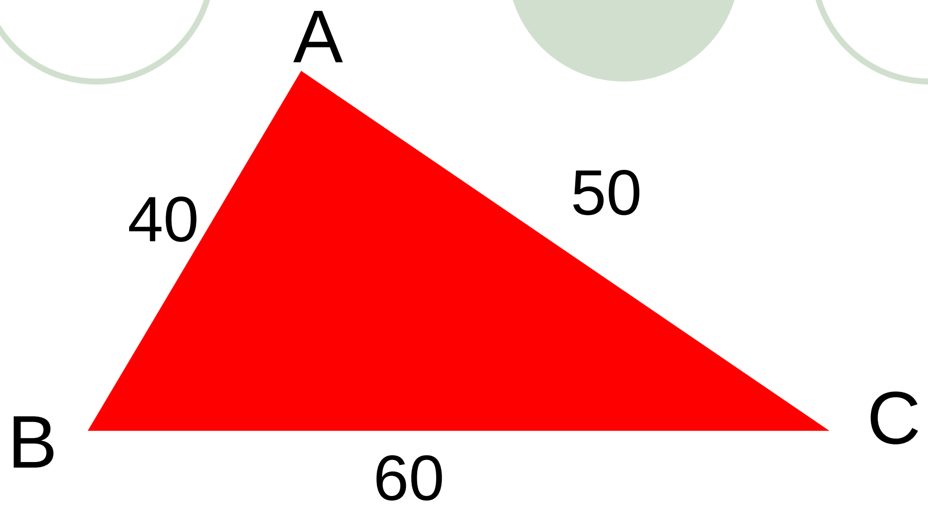
ABC ≅ ADE $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE}$ $\dfrac{3/2}{5} = \dfrac{BC}{10}$ $\Rightarrow$ **BC = 3**

TC = 6+ 3 = 9

TC ≡ banyaknya peserta seleksi yang tingginya kurang dari 156 cm

Jadi yang tingginya lebih dari 156 cm adalah 60 – 9 = 51 org

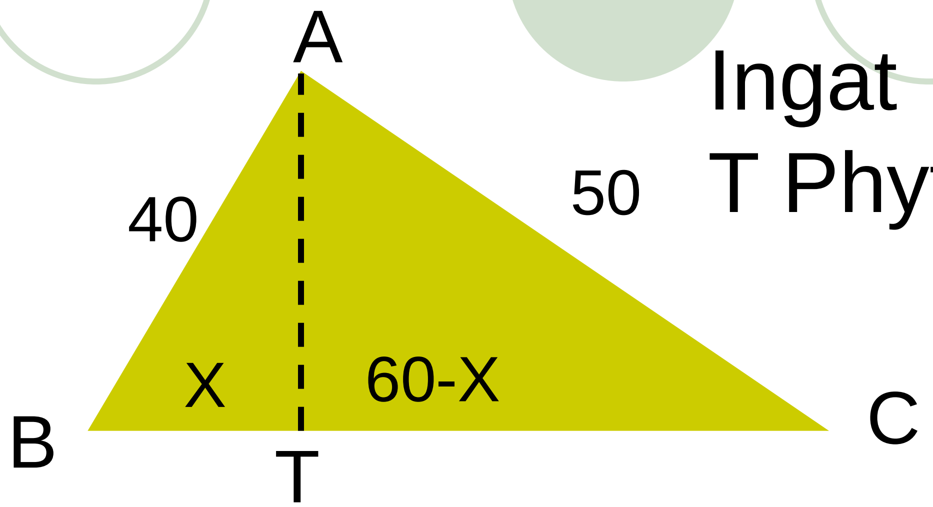
SOAL LUAS Δ



BERAPA LUAS ΔABC

$$L = \sqrt{s(s-a).(s-b).(s-c)}$$

BIMBING PELAJAR MEMBUAT GARIS AT$\perp$BC



Ingat

T Phytagoras

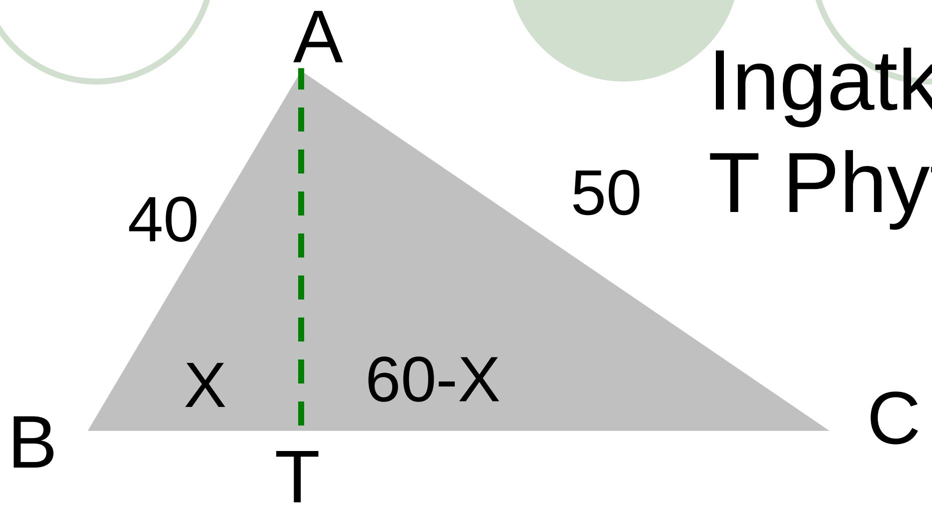
$$40^2 - X^2 = 50^2 - (60 - X)^2$$

$$(60 - X)^2 - X^2 = 50^2 - 40^2$$

$$60^2 - 2X = 90\times10$$

Maka dapat x dan luaspun dapat

BIMBING PELAJAR MEMBUAT GARIS AT⊥BC



Ingatkan pelajar T Phytagoras

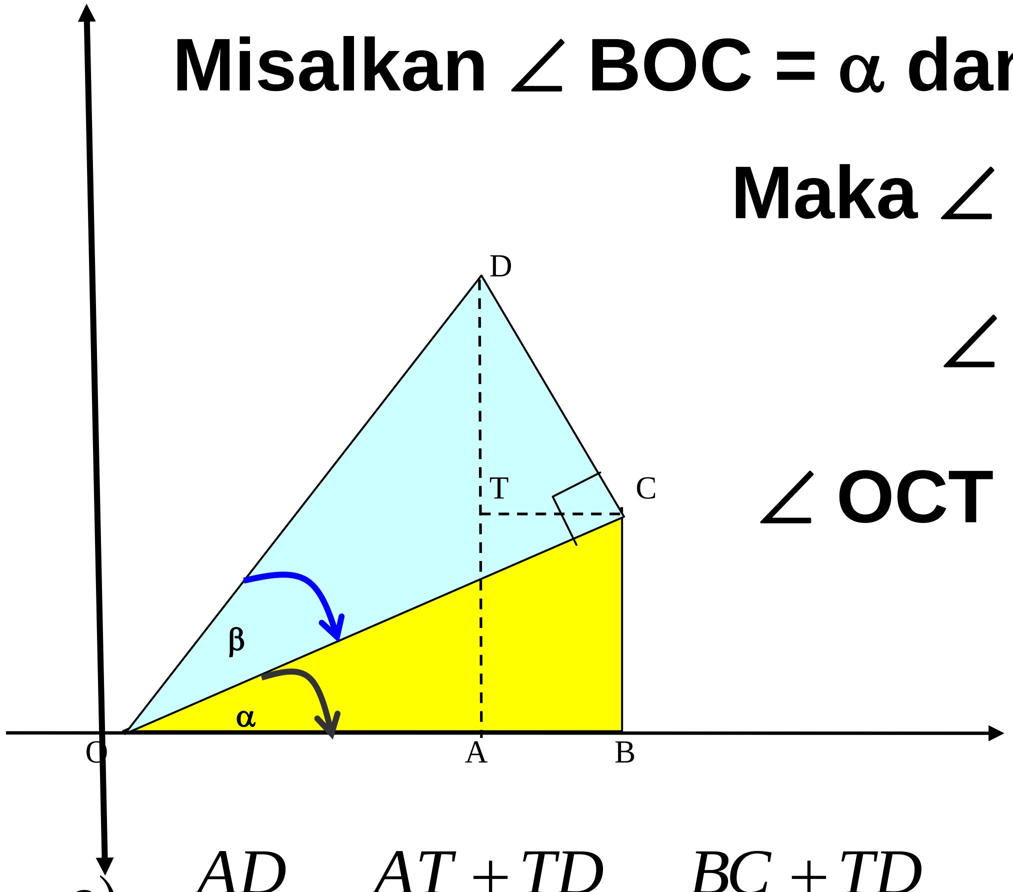
$$40^2 - X^2 = 50^2 - (60 - X)^2$$

$$(60 - X)^2 - X^2 = 50^2 - 40^2$$

$$60^2 - 2X = 90 \times 10$$

Maka dapat x dan luaspun dapat

Sin (α+β), tanpa didahului oleh cos (α+β),



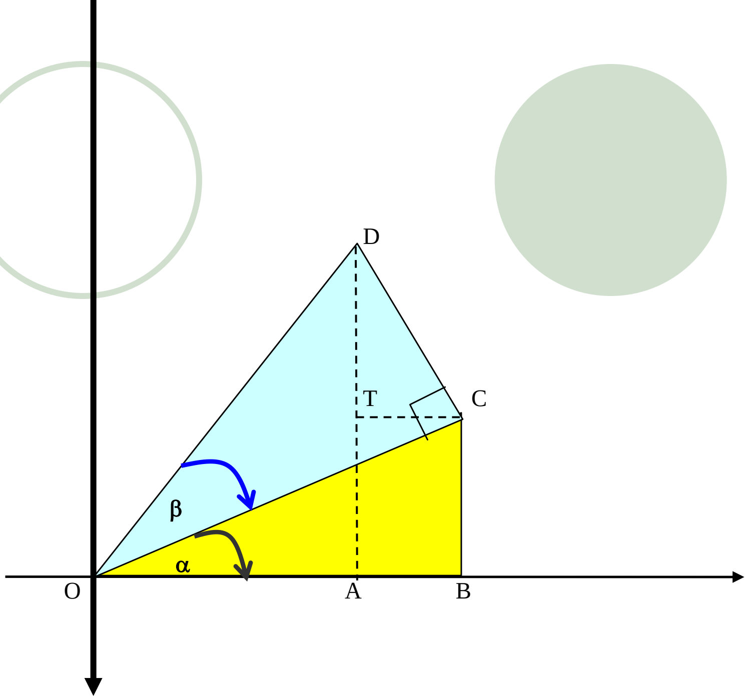
Misalkan ∠ BOC = α dan ∠ COD = β

Maka ∠ BOD = α + β

∠ OCD = 90⁰

∠ OCT = ∠ CDT = α

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{AD}{OD}=\frac{AT+TD}{OD}=\frac{BC+TD}{OD}=\frac{BC}{OD}+\frac{TD}{OD}$$



$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{AD}{OD}=\frac{AT+TD}{OD}=\frac{BC+TD}{OD}=\frac{BC}{OD}+\frac{TD}{OD}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{BC}{OC}.\frac{OC}{OD}+\frac{TD}{CD}.\frac{CD}{OD}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta$$

Review dulu :

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik (2,3) dan sejajar dengan garis $y = 4x - 10$

$\boldsymbol{m} = 4$ melalui titik (2,3), berarti $x_1 = 2$ dan $y_1 = 3$

masukkan ke rumus $y - y_1 = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1)$

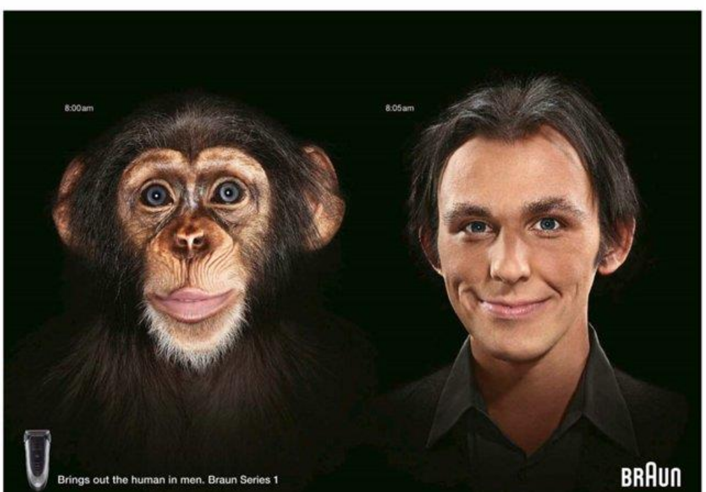
Review 2:

Tentukan persamaan garis lurus tegak lurus dengan garis $4x + 2y + 10 = 0$ dan melalui titik $(1,5)$

berarti $x_1 = 1$ dan $y_1 = 5$

masukkan ke rumus $y - y_1 = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1)$

Dengan nilai $m = ????$



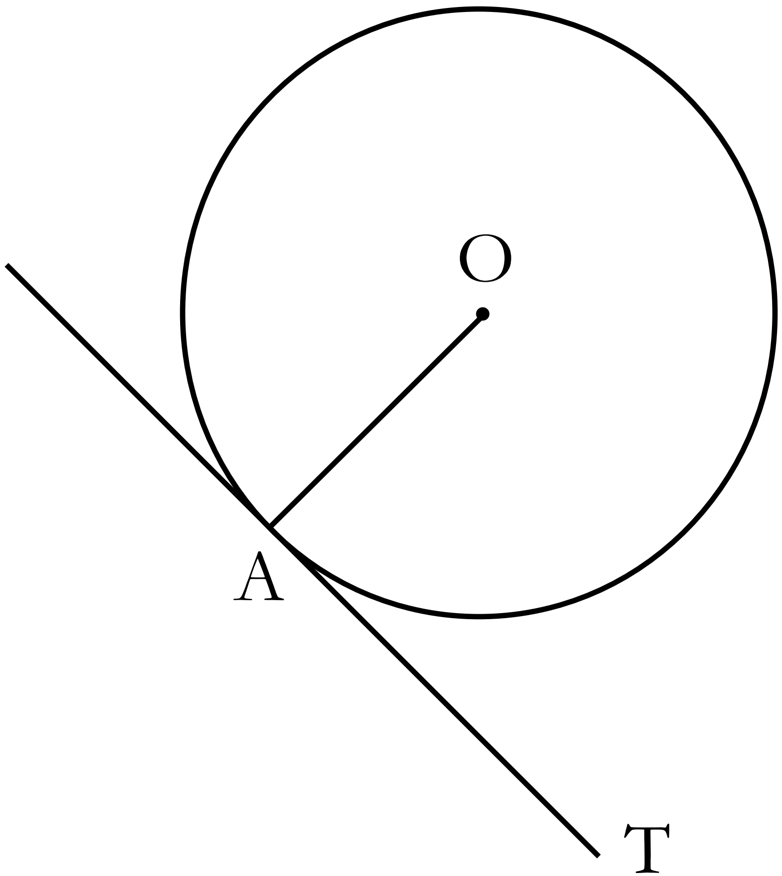
AYOOOOO:

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik (2,4) membentuk sudut 30^0 dengan garis $2x + 4y - 5 = 0$

B I N G U N G

MAKA JANGAN MENGHAPAL RUMUS DAN CARA MENGERJAKA NNYA PAHAMI KONSEPNYA

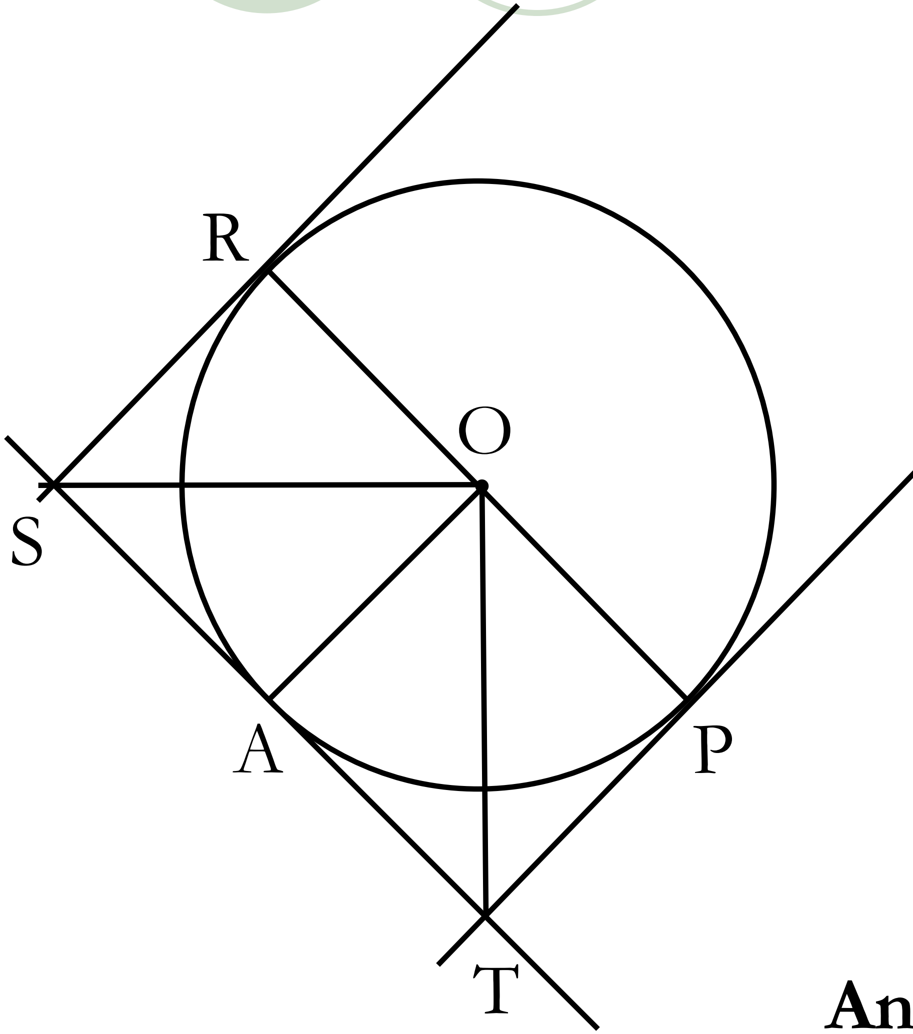
Ada yang bisa



Dari mana
$\angle OAT = 90^0$???

TUGAS NO 1

Ini salah satu jawaban



OS = OT

□OASR ≅ □OATP

$\angle AOT = \angle ATO = 45^{o}$

$\angle 0AT = 90^{o}$

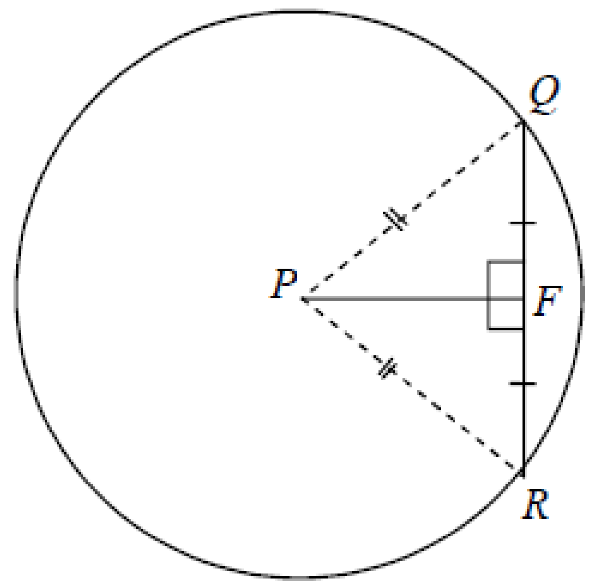
Dkl AT ⊥ OA

Anda mesti cari jawaban lain

REMIDIAL BAB 5

Teorema 5.1.1

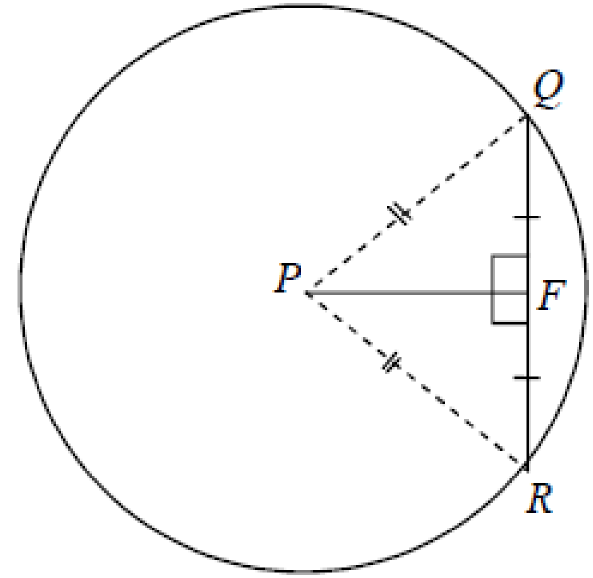
Garis yang tegak lurus dari pusat lingkaran ke suatu tali busur membagi dua sama panjang tali busur tersebut.



Bukti

PF $\perp$ QR

Akan dibuktikan FR = FQ



$\Delta PQF \cong \Delta PRF,$ ⇒ FR = FQ

Ada masalah ???????

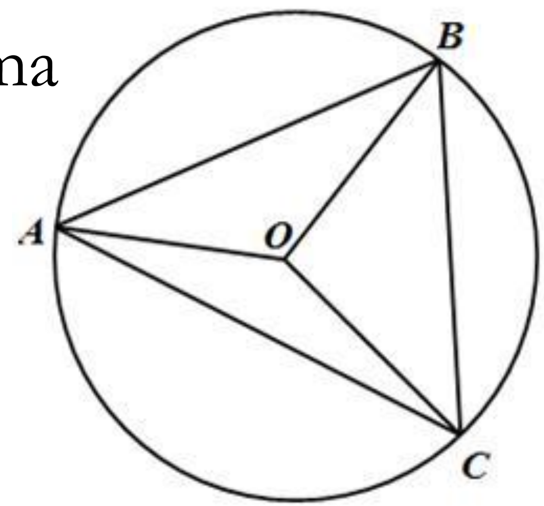
Teorema 5.1.2

Misalkan *AB* adalah tali busur sebuah lingkaran yang berpusat di *O* yang mana *AB* bukan diameternya, dan misalkan *C* adalah sebarang titik pada lingkaran yang berbeda dari *A* dan *B* maka

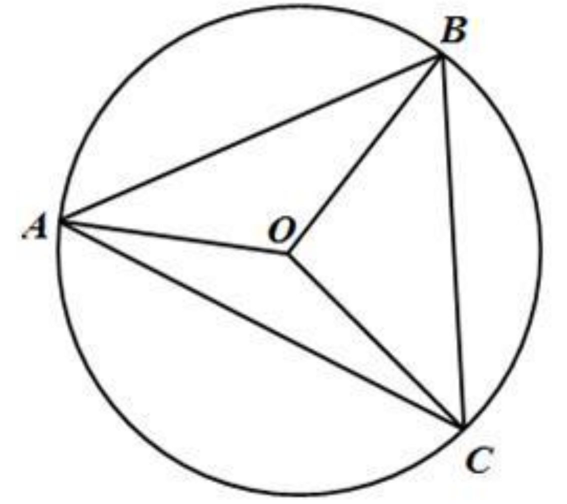
a. Jika C dan O berada pada sisi yang sama dari AB, maka $\angle AOB = 2\angle ACB.$

b. Jika C dan O berada pada sisi berhadapat dengan AB, maka

$$\angle AOB = 360^0 - 2\angle ACB.$$



Bukti.

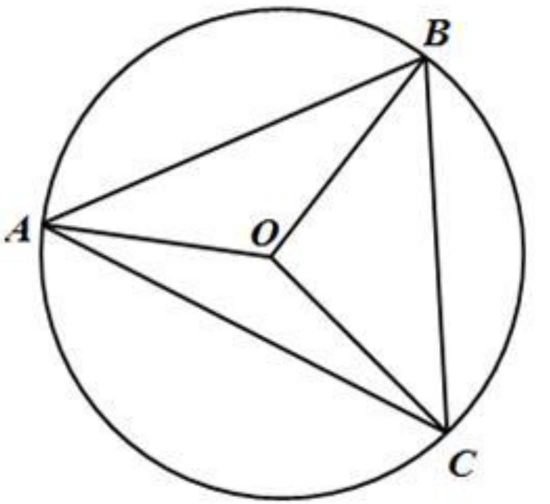


Misalkan AB adalah sebuah tali busur sebuah lingkaran yang berpusat di O yang mana AB bukan diameternya, dan C adalah sebarang titik pada lingkaran yang berbeda dari A dan B.

a. Misalkan C dan O berada pada sisi yang sama dari AB, akan ditunjukkan $\angle AOB = 2\angle ACB.$

Kasus 1.

Lihat gambar



$$\angle AOB = 180^0 - (\angle OAB + \angle OBA), \qquad (5.1.1)$$

$$\angle AOC = 180^0 - (\angle OAC + \angle OCA) \qquad (5.1.2)$$

$$\angle BOC = 180^0 - (\angle OBC + \angle OCB) \qquad (5.1.3)$$

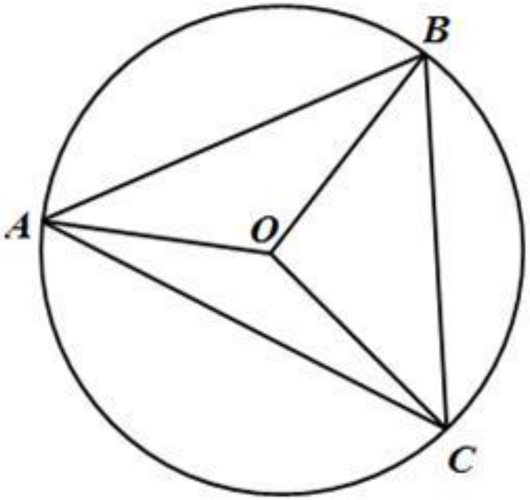
Selain itu, juga diperoleh

$$\angle AOB = 360^0 - (\angle AOC + \angle BOC) \qquad (5.1.4)$$

maka diperoleh

$$\angle AOB = \angle OAC + \angle OCA + \angle OBC + \angle OCB.$$

Maka berturut-turut diperoleh



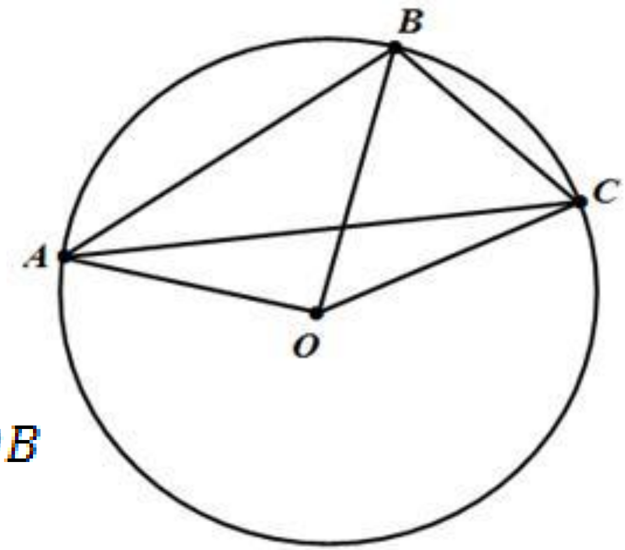
$$\angle OAC = \angle OCA$$

$$\angle OBC = \angle OCB$$

$$\angle AOB = 2(\angle OCA + \angle OCB)$$

$$= 2\angle ACB.$$

Kasus 2



$$\angle OAB = 180^0 - \angle AOB - \angle OBA$$

$$\angle OAC = 180^0 - \angle OCA - \angle AOC$$

$$\angle OAB - \angle OAC = \angle OCA + \angle AOC - \angle OBA - \angle AOB$$

$$\angle OCB = 180^0 - \angle OBC - \angle BOC$$

$$\angle OCA = 180^0 - \angle OAC - \angle AOC$$

$$\angle OCB - \angle OCA = \angle OAC + \angle AOC - \angle OBC - \angle BOC$$

$$\angle OBA = 180^0 - \angle OAB - \angle A0B$$

$$\angle OBC = 180^0 - \angle OCB - \angle BOC$$

$$\angle OBA + \angle OBC = 360^0 - \angle OAB - \angle AOB - \angle OCB - \angle BOC$$

PERHATIKAN HASIL DI ATAS

$$\angle OAB - \angle OAC = \angle OCA + \angle AOC - \angle OBA - \angle AOB$$

$$\angle OCB - \angle OCA = \angle OAC + \angle AOC - \angle OBC - \angle BOC$$

$$\angle OBA + \angle OBC = 360^0 - \angle OAB - \angle AOB - \angle OCB - \angle BOC$$

+

$$(\angle OAB - \angle OAC) + (\angle OCB - \angle OCA) + (\angle OBA + \angle OBC) = ?$$

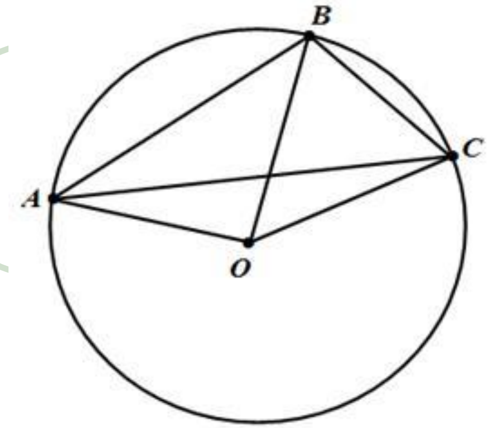
$$360^0 + \angle OCA + 2\angle AOC + \angle OAC - \angle OBA - 2\angle AOB - \angle OBC - 2\angle BOC - \angle OAB - \angle OCB$$

$$= 360^0 + 180^0 + \angle AOC - 180^0 - \angle AOB - 180^0 - \angle BOC$$

$$(\angle OAB - \angle OAC) + (\angle OCB - \angle OCA) + (\angle OBA + \angle OBC) = 180^0$$

INGAT

$$\angle OAB = 180^0 - (\angle AOB + \angle OBA)$$



DARI

$$(\angle OAB - \angle OAC) + (\angle OCB - \angle OCA) + (\angle OBA + \angle OBC) = 180^0$$

$$\angle AOB + \angle OBA = 180^0 + \angle OAC + \angle OCA - \angle OCB - \angle OBC$$

JADI

$$\angle AOB = -\angle OAC + \angle OCB - \angle OCA + \angle OBC$$

$$\angle AOB = 2(\angle OCB - \angle OCA)$$

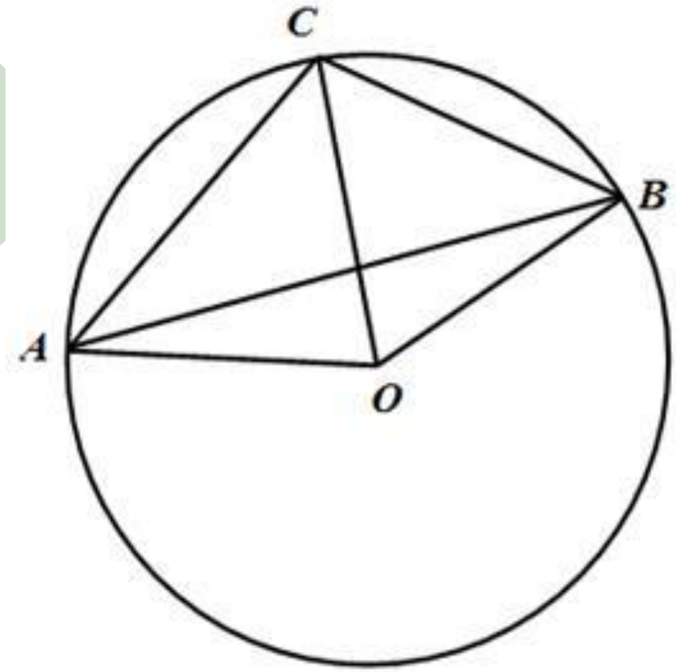
$$\angle AOB = 2\angle ACB$$

Kasus 3.

Lukis garis *AO*, *OB*, *AC* dan *BC*. Misalkan *BC* memotong *OA*. Dengan cara serupa dengan pembuktian pada kasus 2, maka diperoleh $\angle AOB = 2\angle ACB$

TUGAS NO 2

B). Misalkan dan O berada pada sisi-sisi berhadapan dari AB



Akan ditunjukkan bahwa

$$\angle AOB = 360^0 - 2\angle ACB$$

PERHATIKAN

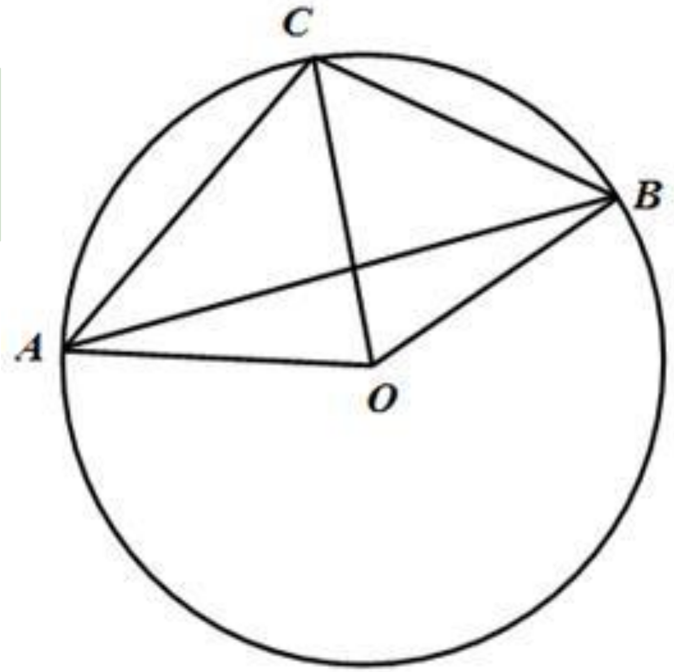
$$\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC$$

INGAT

$$\angle AOC = 180^0 - (\angle OAC + \angle OCA)$$

$$\angle BOC = 180^0 - (\angle OBC + \angle OCB)$$

$$\angle AOB = 360^0 - (\angle OAC + \angle OCA + \angle OCB + \angle OBC).$$



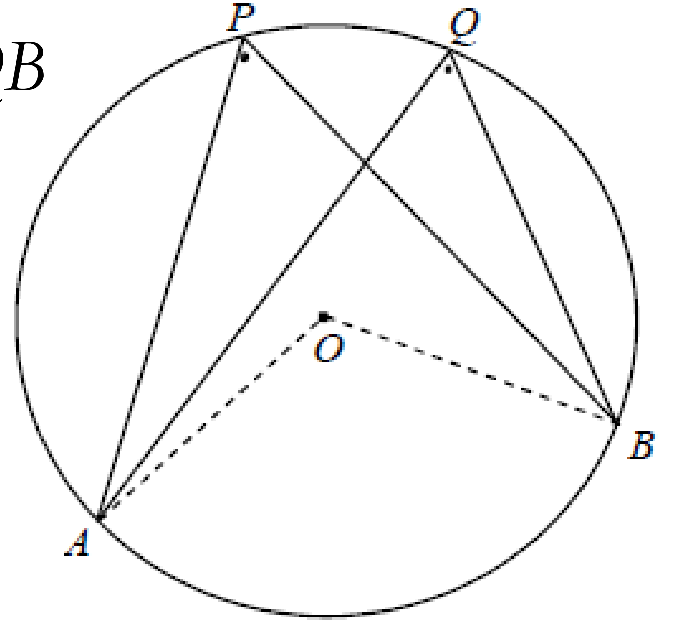
$$\angle AOB = 360^0 - (\angle OAC + \angle OCA + \angle OCB + \angle OBC).$$

$$\angle AOB = 360^0 - 2(\angle OCA + \angle OCB)$$

$$= 360^0 - 2\angle ACB$$

Teorema 5.1.3. Sudut keliling yang menghadap busur yang sama mempunyai besar yang sama.

Akan dibuktikan $m\angle APB = m\angle AQB$



Bukti :

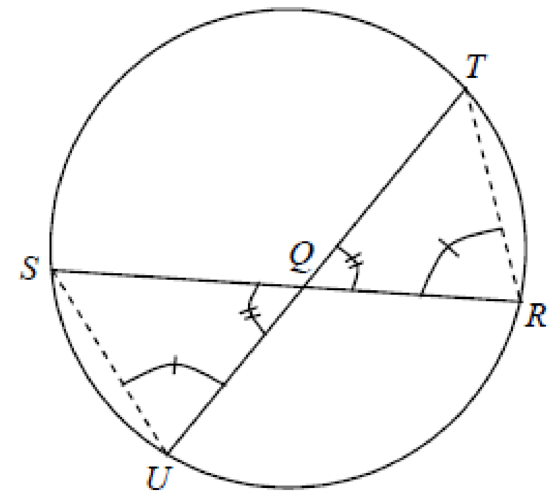
$$m\angle AOB = 2m\angle APB$$

$$m\angle AOB = 2m\angle AQB$$

$$2m\angle APB = 2m\angle AQB$$

$$m\angle APB = m\angle AQB$$

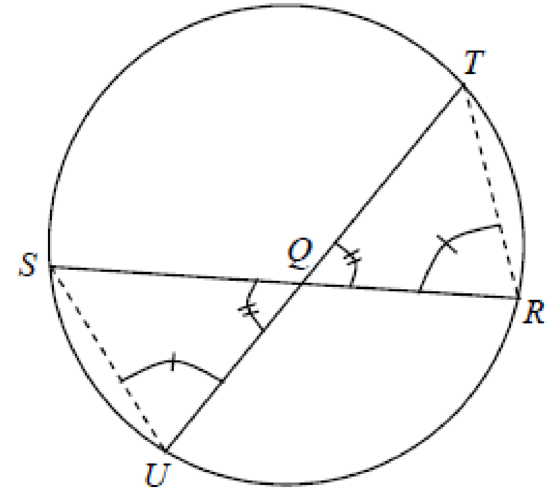
***Teorema* 5.1.4.** Misalkan *RS* dan *TU* adalah tali busur dari lingkaran yang sama yang berpotongan di *Q*, maka $QR \,.QS = QU \,.QT$



Bukti :

$\Delta SQU \sim \Delta TQR$

Ada masalah ???



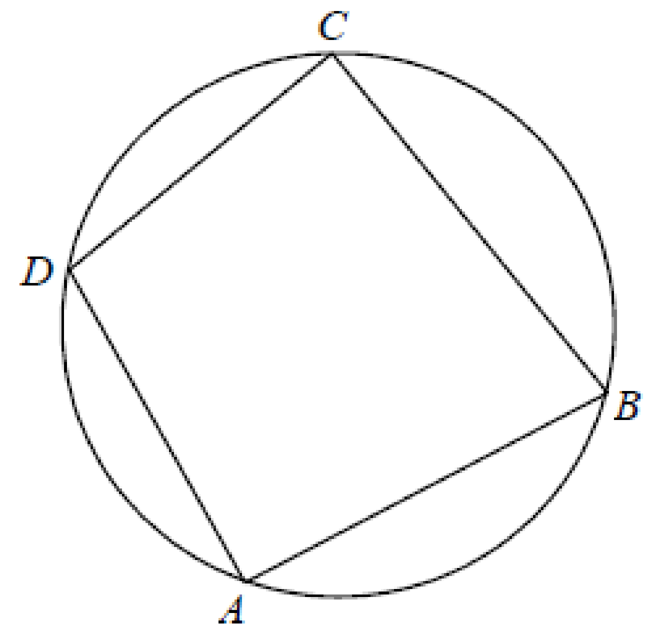
$$\angle QUS = \angle QRT$$

$$\angle SQU = \angle TQR$$

$$\Delta SQU \sim \Delta TQR$$

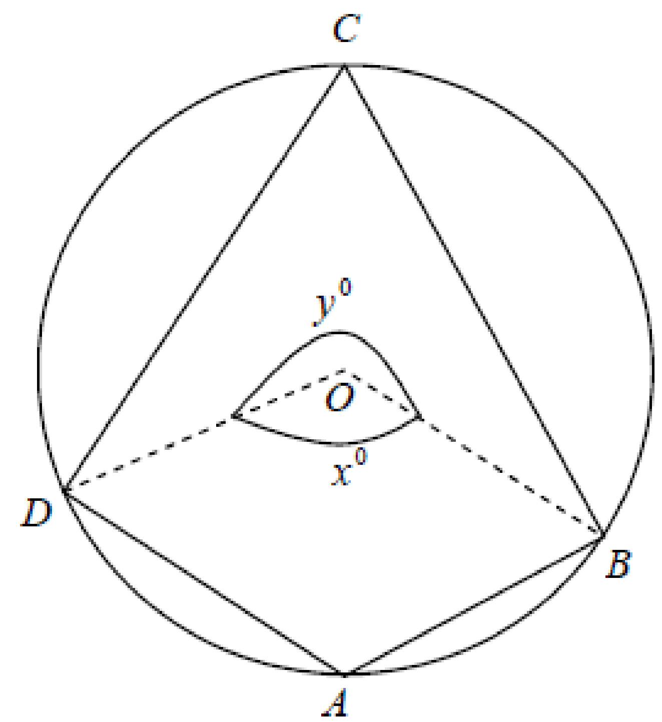
$$\frac{QS}{QT} = \frac{QU}{QR}$$

$$QR \, .QS = QU \, .QT$$



***Definisi* 5.1.3.** *Segiempat tali busur* adalah sebuah segiempat yang keempat titik sudutnya terletak pada keliling lingkaran.

***Teorema* 5.1.5.** Dalam segiempat tali busur sudut-sudut yang berhadapan adalah sama dengan sudut pelurus.



$$m\angle A + m\angle C = 180^0$$

$$m\angle B + m\angle D = 180^0$$

Misalkan $m\angle BOD = x^0$

$$x^0 = 2m\angle BCD$$

$$x^0 + y^0 = 360^0$$

$$y^o = 2m\angle BAD$$

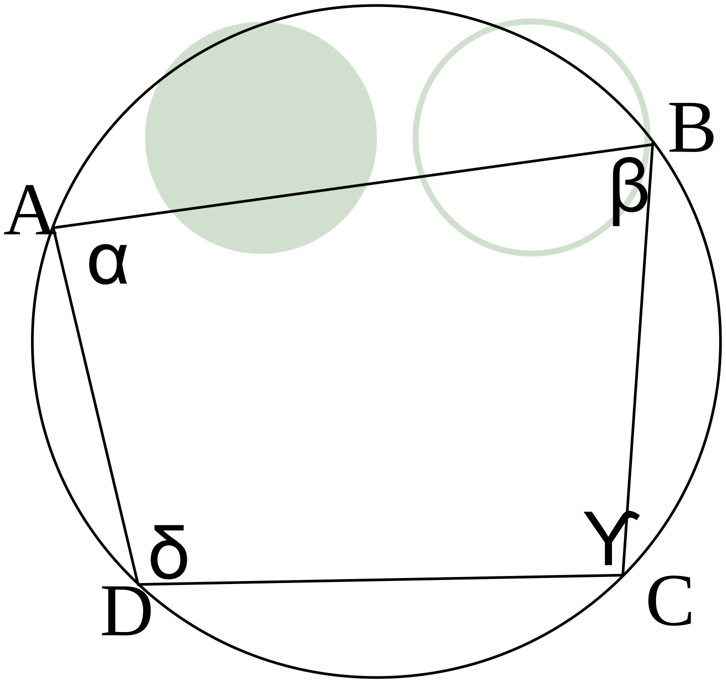
$$x^0 + y^0 = 2m\angle BCD + 2m\angle BAD$$

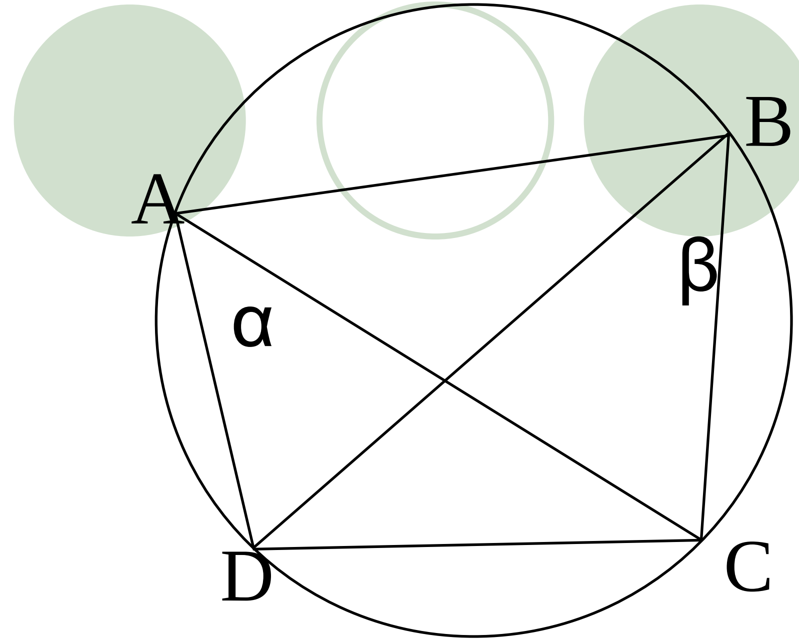
$$x^0 + y^0 = 2m\angle BCD + 2m\angle BAD$$

$$360^0 = 2(m\angle BCD + m\angle BAD$$

$$180^0 = m\angle BCD + m\angle BAD$$

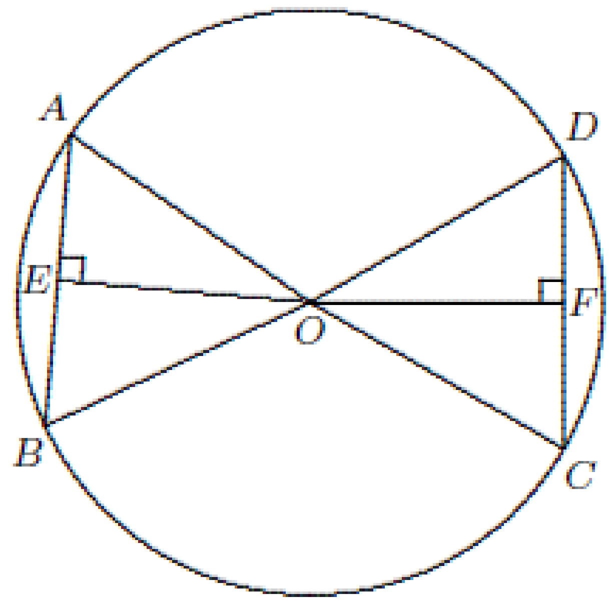
$$m\angle A + m\angle C = 180^0$$





Cara lain untuk membuktikan teorema di atas adalah, misalkan titik D berada dalam lingkaran, maka akan dapat ditunjukkan $\angle B + \angle \mathrm{C} > 180^{0}$. kemudian kalau dimisalkan titik D berada diluar lingkaran maka akan diperoleh $\angle B + \angle C < 180^{0}$. Maka kalau begitu berlakulah $\angle B + \angle C = 180^{0}$. Pernyataan tersebut sering ditulis dalam bentuk teorema berikut ini :

***Teorema* 5.1.6** : Segiempat $ABCD$ adalah siklik jika dan hanya jika $\angle DAC = \angle DBC$.

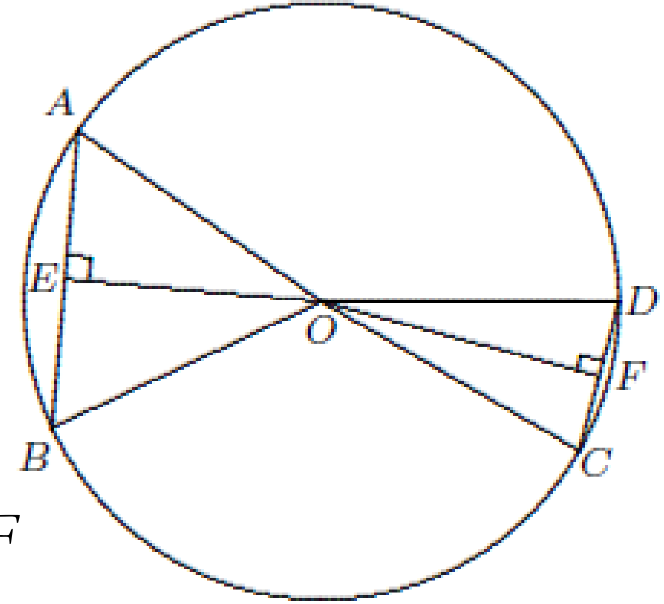


Silakan dicoba

COBA SEKARANG

$\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$

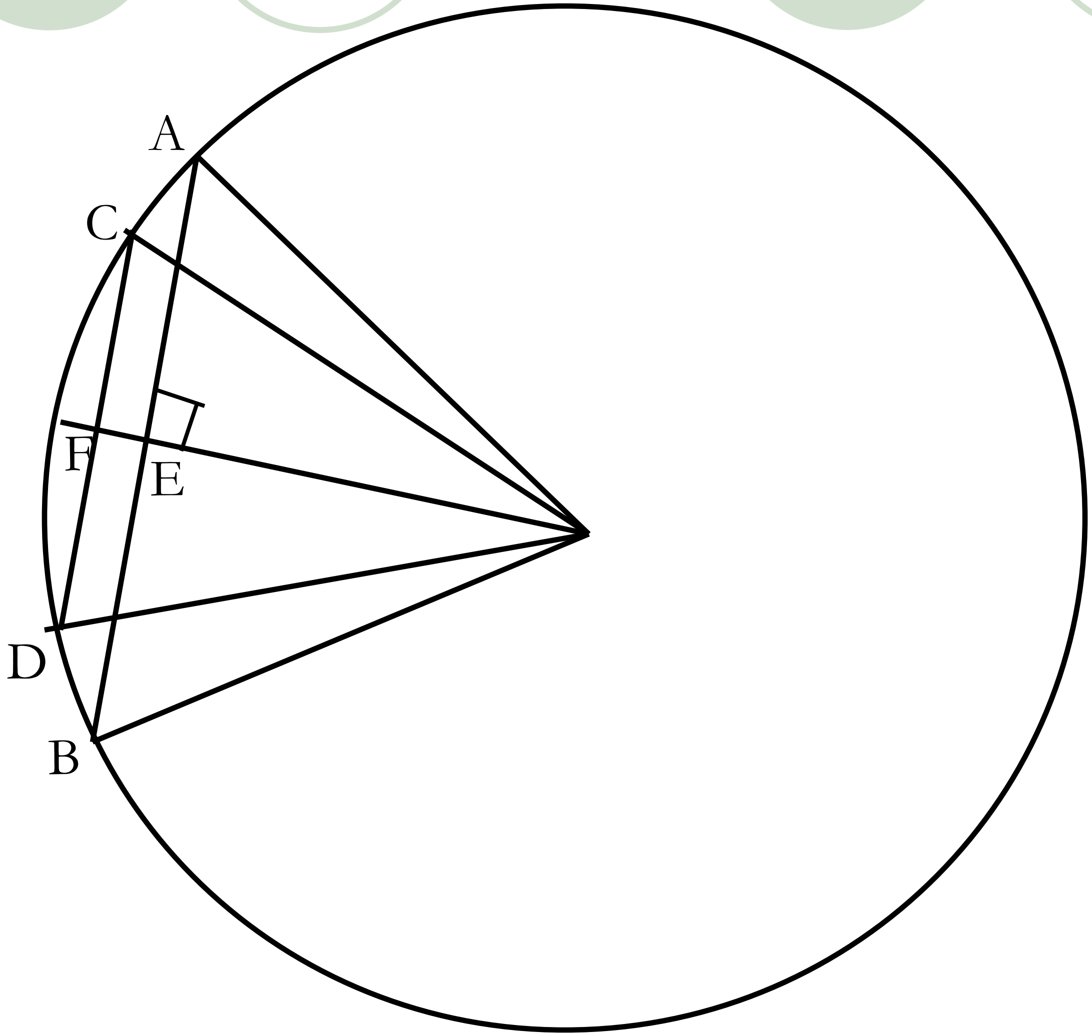
TUNJUKKAN OE < OF



$$\angle AOE = \angle BOE > \angle DOF = \angle COF$$

yang mengakibatkan

$$\angle FDO = \angle FCO > \angle EAO = \angle EBO.$$



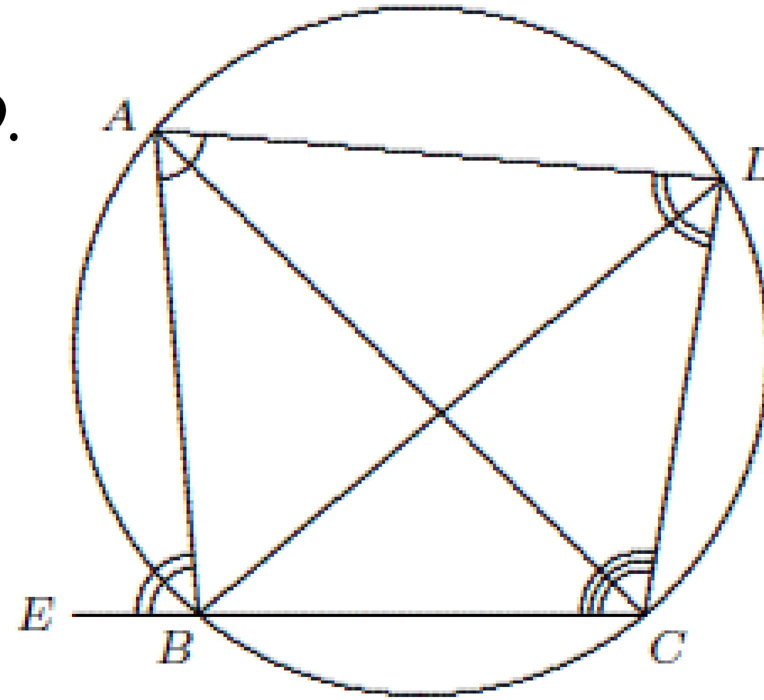
APA BISA MEMBERI INSPIRASI

BANYAK CARA LAIN SILAKAN DICARI

LENGKAPI TUGAS NO 2

$\angle A + \angle C = 180^0 = \angle B + \angle D.$

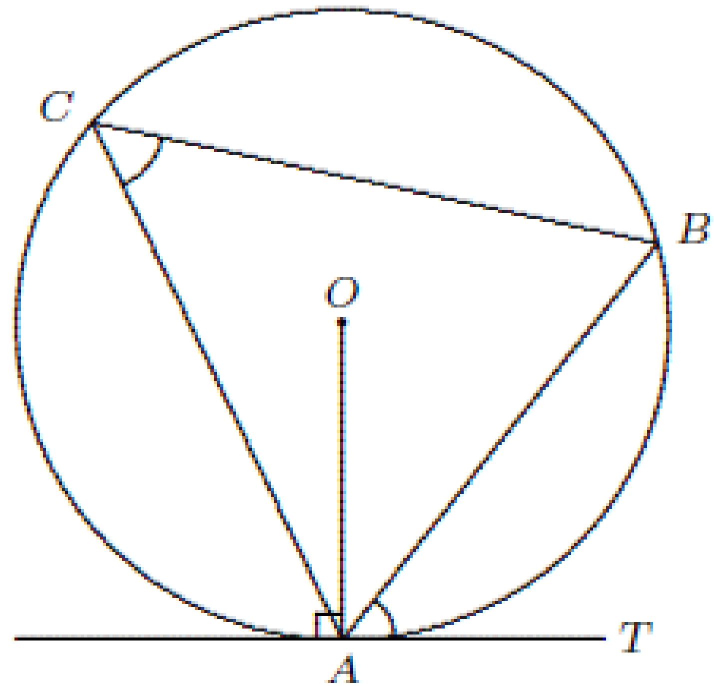
Tunjukkan bahwa $\angle ABE = \angle D$



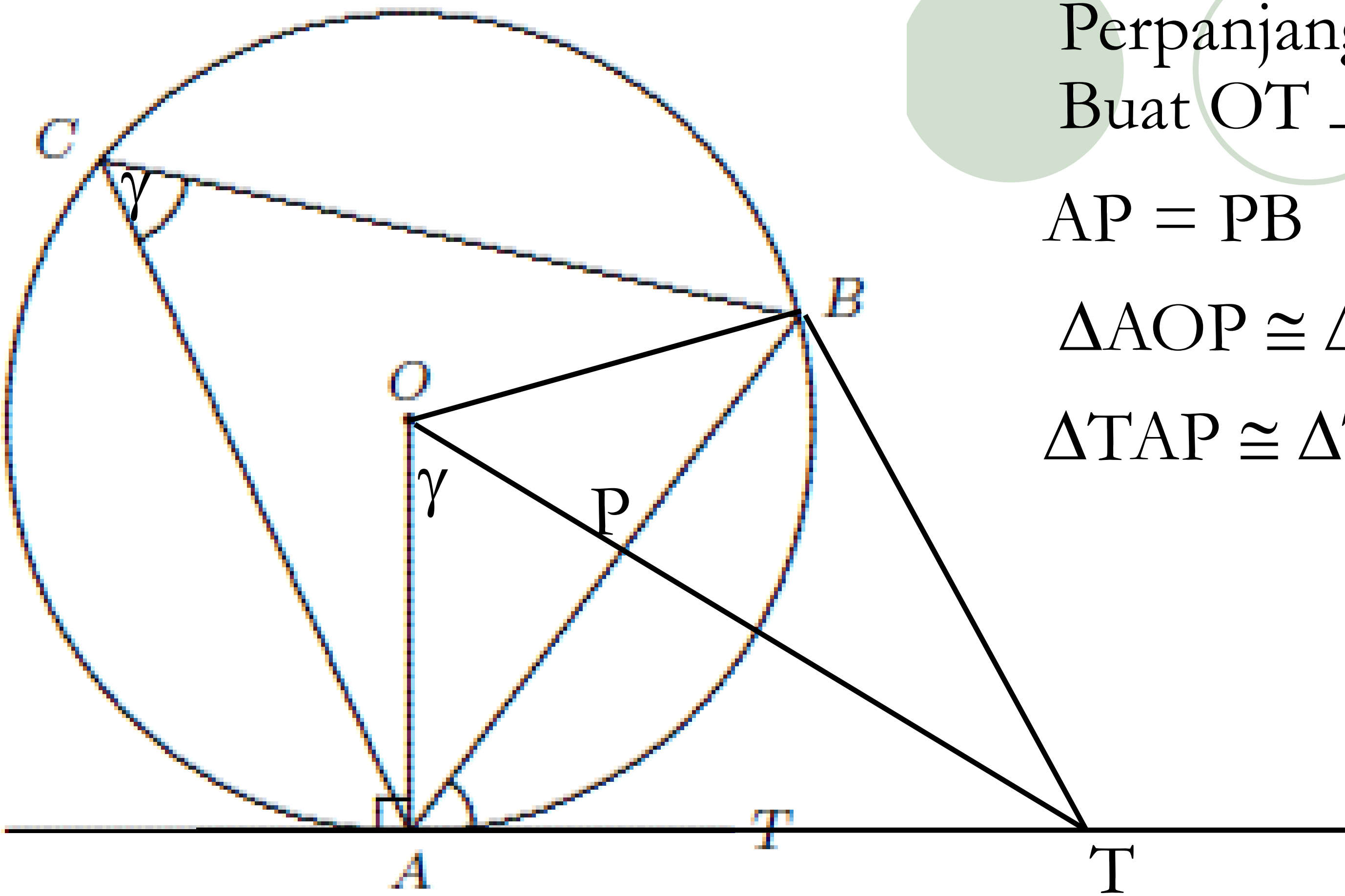
Bila TA merupakan garis singgung pada lingkaran di titik A,

dengan O adalah titik pusat lingkaran luar

maka haruslah berlaku $OA \perp AT$



tunjukkan $\angle BAT = \angle BCA$.



Perpanjang AT
Buat OT ⊥AB

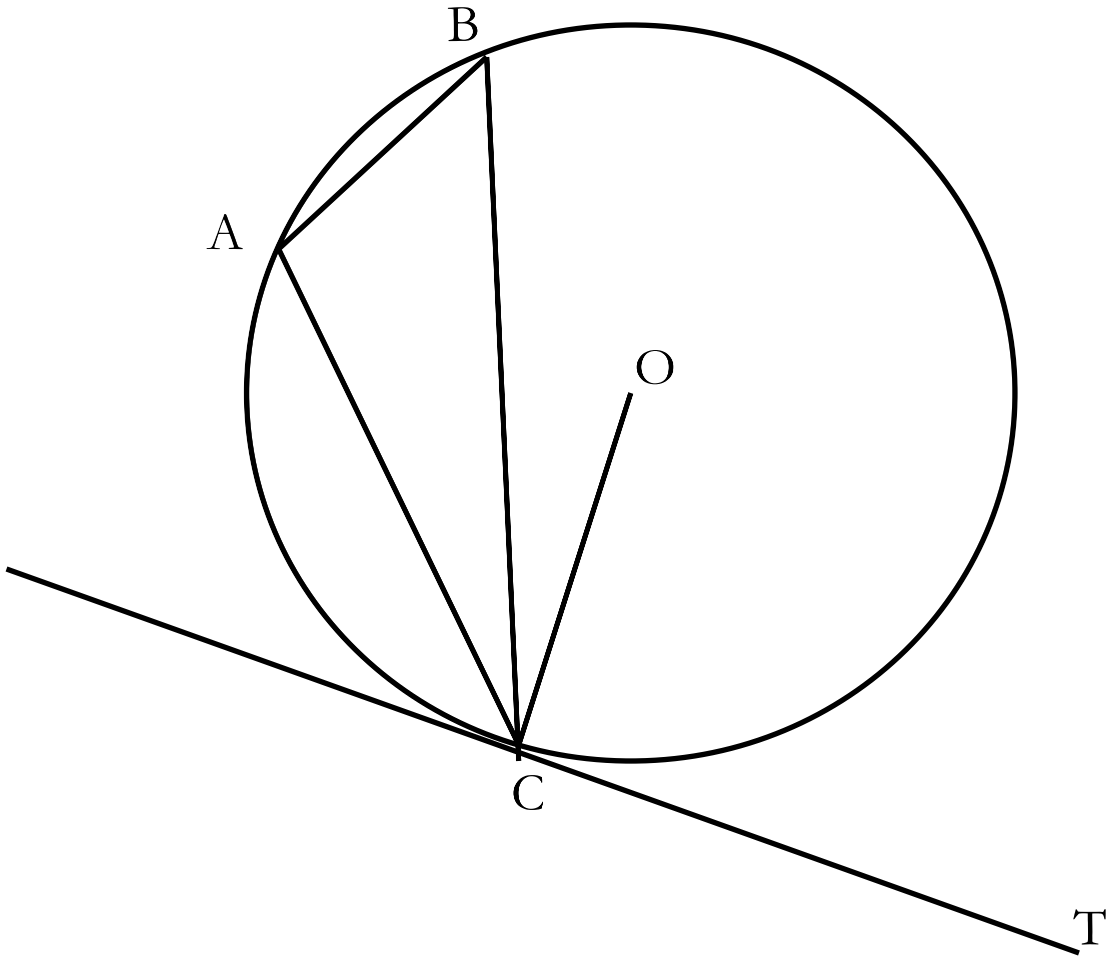
AP = PB

ΔAOP ≅ ΔBOP

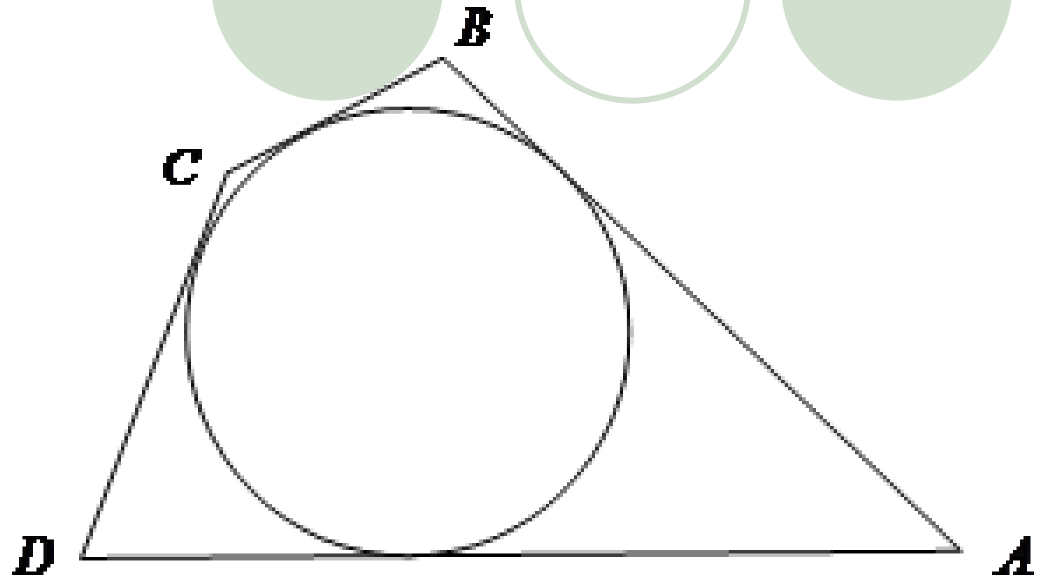
ΔTAP ≅ ΔTBP

TUGAS 2
BOLEH KERJAKAN DENGAN CARA LAIN

O titik pusat lingkaran, periksalah apakah tetap berlaku $\angle BAC = \angle OCT$



Apa syaratnya agar segiempat mempunyai lingkaran dalam



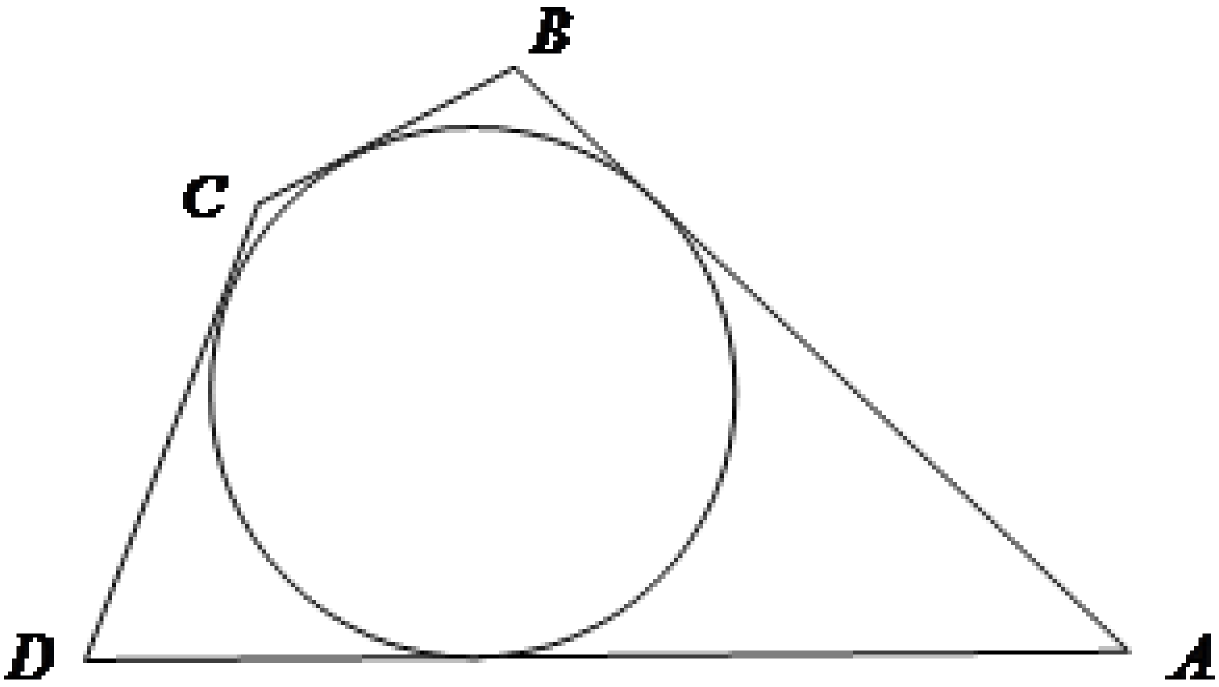
Berapa jari-jari lingkaran dalamnya

Apa syaratnya agar segiempat mempunyai lingkaran dalam

Siapa dapat, maka nilai UTA ditambah 15 point

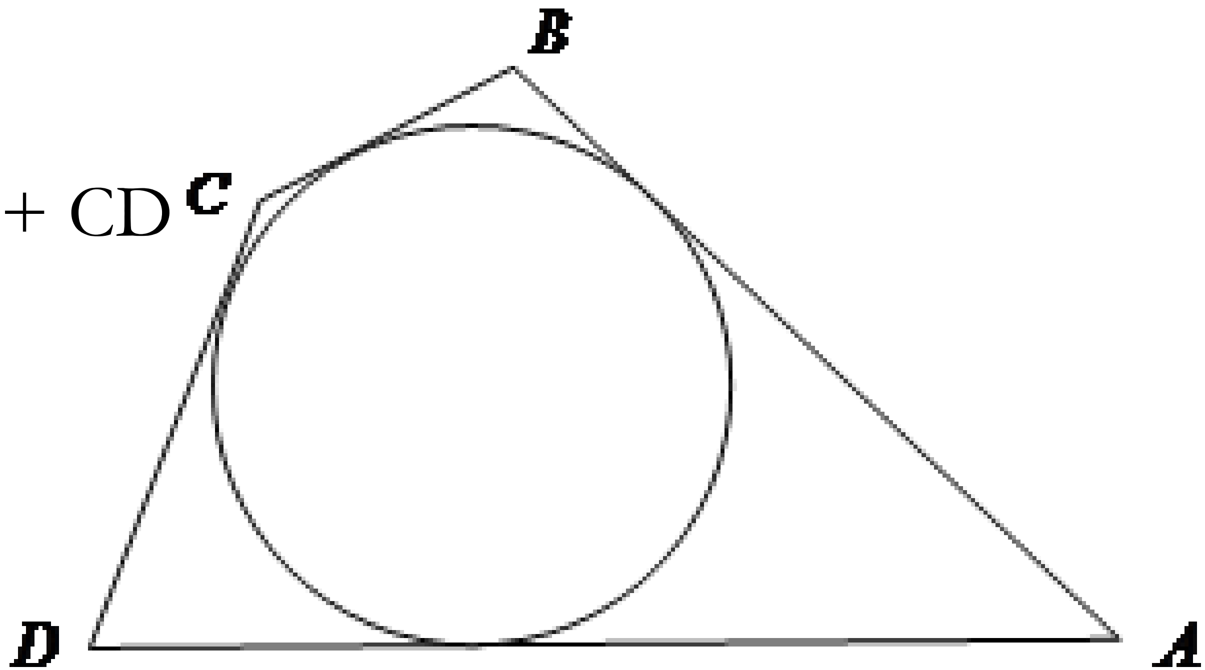
Berapa jari-jari lingkaran luarnya nya

Definisi 5.1.3 Segiempat *Circumscriptible* adalah segiempat yang memuat sebuah lingkaran dalam (*Incircle of the Quadrilateral*) sehingga menyinggung keempat sisi segiempat.



Teorema 5.1.7 Suatu segiempat adalah *Circumscriptible* jika dan hanya jika dua pasang sisi-sisi yang berhadapan mempunyai jumlah panjang yang sama

AD + BC = AB + CD

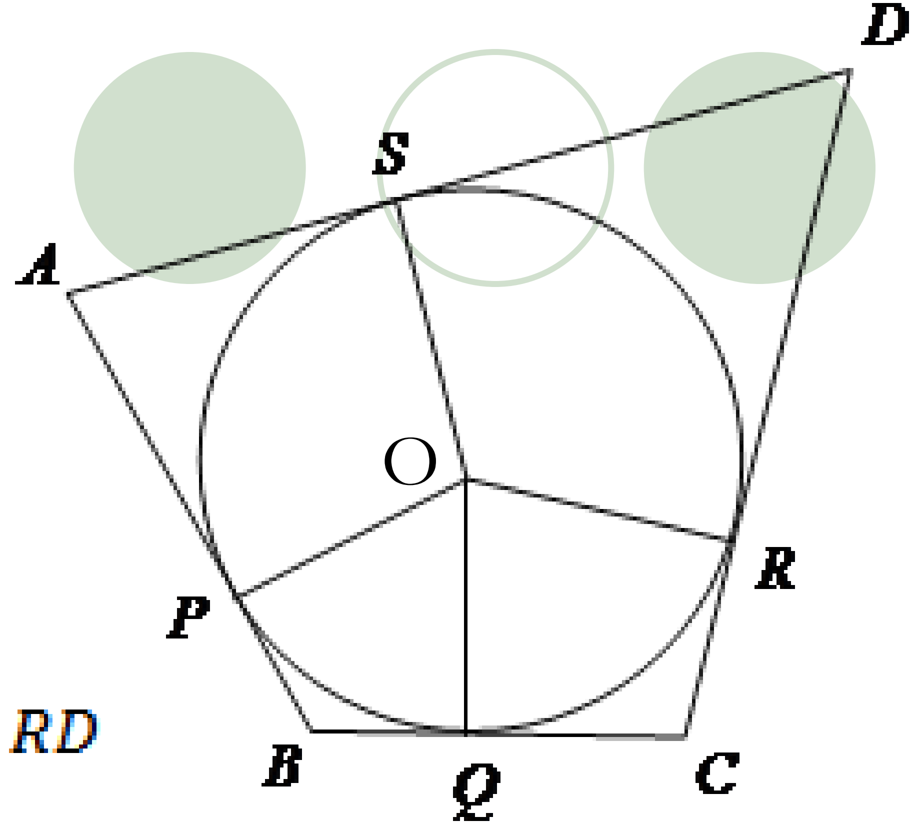


$\Rightarrow$

$$AP = AS.$$

$BP = BQ,\qquad CQ = CR$

$DR = DS.$



$$AB + CD = AP + PB + CR + RD$$

$$= AS + BQ + CQ + DS$$

$$= BQ + QC + DS + SA$$

$$= BC + DA.$$

$\Leftarrow$ Apa yang mau anda tunjukkan $KE=KF=KG=KH$

misalkan $AB + CD = BC + DA$

Akan ditunjukkan bahwa segiempat *ABCD* adalah *Circumscriptible*.

Misalkan $AB < AD$

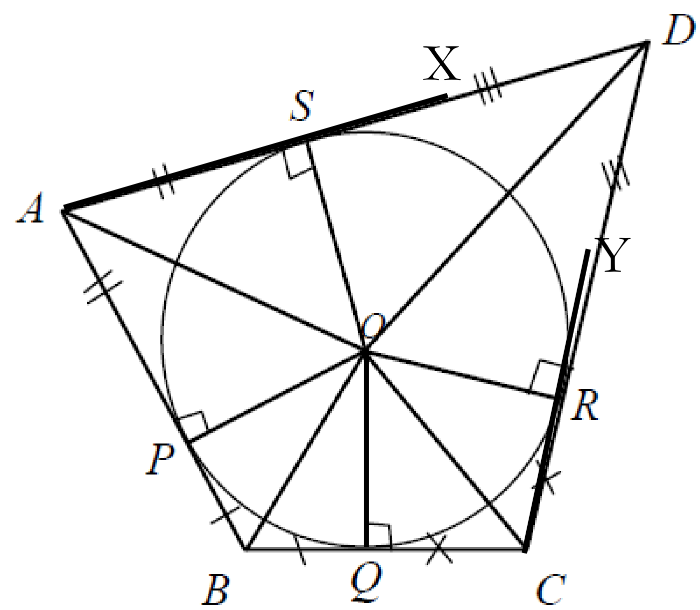
$$AB+CD < AD+CD$$

$$BC + DA < AD + CD$$

$$BC < CD.$$

Karena $AB < AD$

$BC < CD$



Maka dapat dipilih titik X di AD dan Y di CD sehingga

$AX = AB$

$CY = BC$

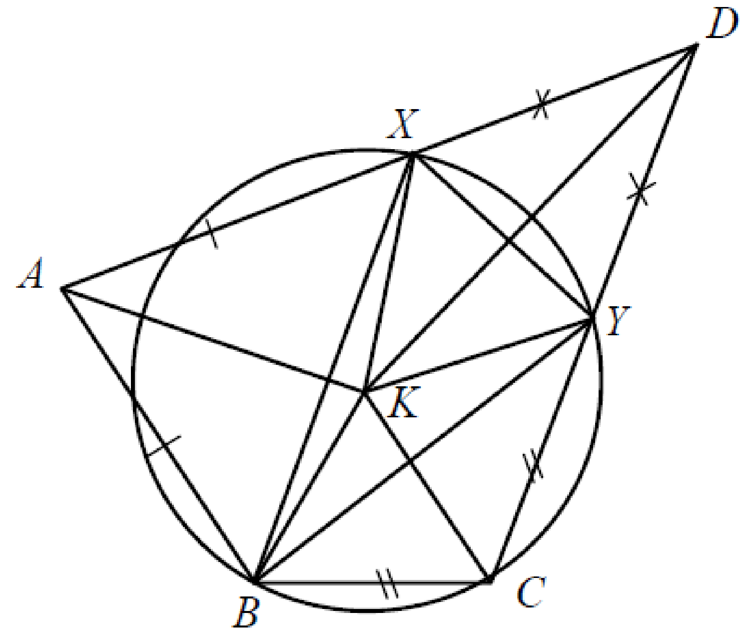
kemudian karena $AB + CD = BC + DA$

$AB + CY + YD = BC + AX + XD$

$AB + BC + YD = BC + AB + XD$

$YD = XD$

Misalkan K adalah titik pusat lingkaran luar ΔBXY



$AX = AB$, $KX = KB$

$AK = AK$

maka

$\Delta AKX \cong \Delta AKB$

DENGAN CARA YANG SAMA AKAN DIPEROLEH

$\Delta DKX \cong \Delta DKY$ $\Delta CKY \cong \Delta CKB$

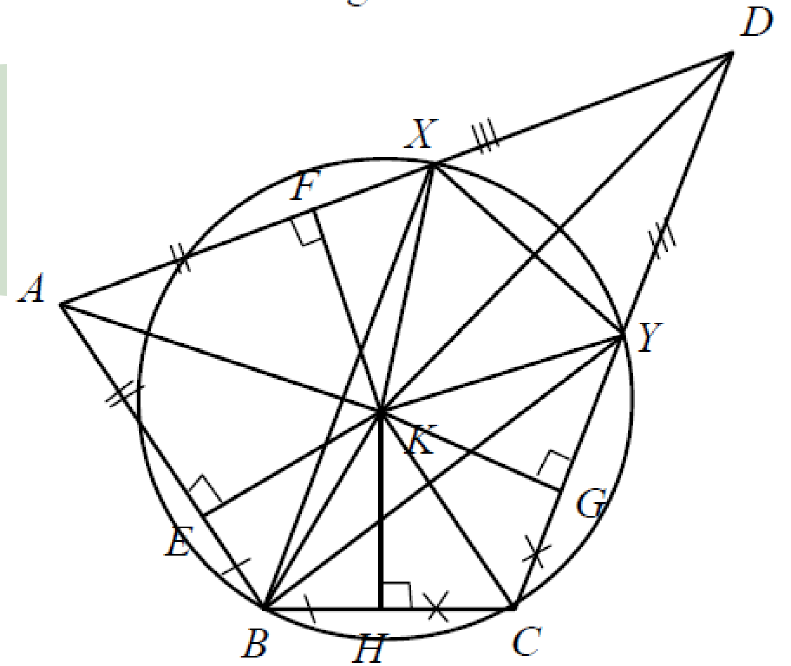
maka AK, DK dan CK

adalah bisektor sudut $\angle$A, $\angle$D dan $\angle$C

Sehingga $\angle KAX = \angle KAB$, $\angle KDX = \angle KDY$

$\angle KCY = \angle KCB$

Apabila ditarik garis tegak lurus dari titik K ke sisi-sisi AB, AD, CD dan BC sehingga berpotongan di titik E, F, G dan H,



maka diperoleh $AE=AF$, $DF=DG$ dan $CG=CH$

Karena AK, DK dan CK

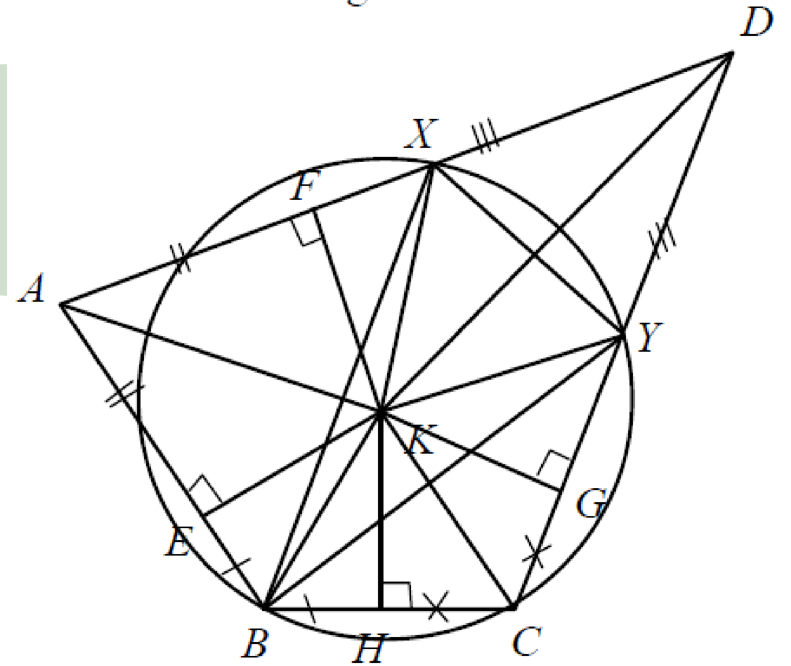
adalah bisektor sudut $\angle A$, $\angle D$ dan $\angle C$

diperoleh

$\angle KAE = \angle KAF$, $\angle KDF = \angle KDG$ $\angle KCG = \angle KCH$.

karena $AE = AF$

$\angle KAE = \angle KAF$ dan $AK = AK$



maka $\Delta KAE \cong \Delta KAF$

Akibatnya KE = KF

Dengan cara serupa

$\Delta KDF \cong \Delta KDG$ Sehingga $KF = KG$

$\Delta KCG \cong \Delta KCH$ $KG = KH$

Maka $KE = KF = KG = KH$

Artinya , segiempat *ABCD* memuat sebuah lingkaran dalam dengan pusat K

Teorema 5.1.8

Segiempat *ABCD* adalah Siklik jika dan hanya jika jumlah sudut yang berhadapan adalah 180^0

Bukti :

$\angle AOC = 2\angle ABC$

$\angle AOC = 360^0 - 2\angle ADC.$

$$2\angle ABC = 360^0 - 2\angle ADC$$

$$\angle ABC = 180^0 - \angle ADC$$

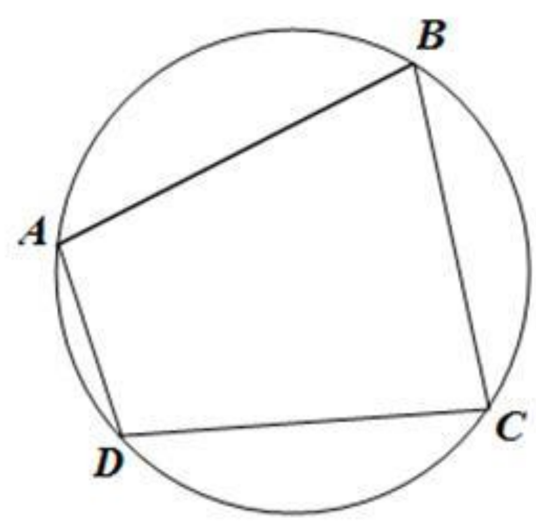
$$\angle ABC + \angle ADC = 180^0$$

Sebaliknya, misalkan $\angle ABC + \angle ADC = 180^0$

Akan ditunjukkan bahwa segiempat *ABCD* adalah Siklik dengan menunjukkan kontradiksinya

Misalkan segiempat *ABCD* adalah Konveks .

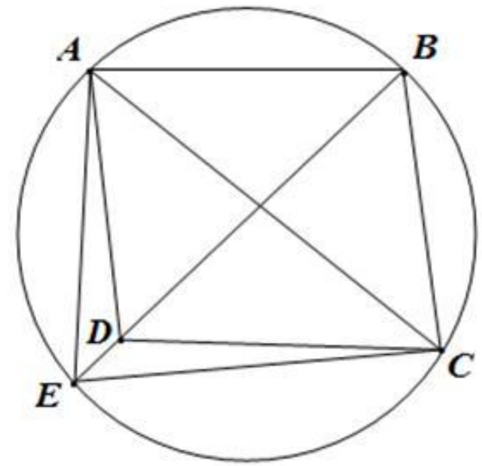
Lukis sebuah lingkaran yang melalui titik *A*, *B*, dan *C*. dan misalkan *E* adalah titik potong kedua antara lingkaran dengan perpanjangan garis *BD*. Hubungkan garis *AE* dan *CE*. Lihat gambar disebelah



Andaikan $D \neq E.$

maka jelas $\angle ADB > \angle AEB$

dan $\angle CDB > \angle CEB$



Akibatnya $\angle ADC > \angle AEC.$

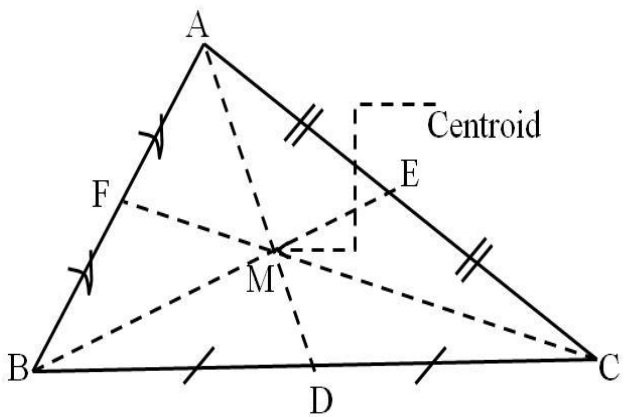
Tetapi, karena titik A, B, C dan E berada pada lingkaran maka segiempat $ABCE$ adalah Siklik sehingga

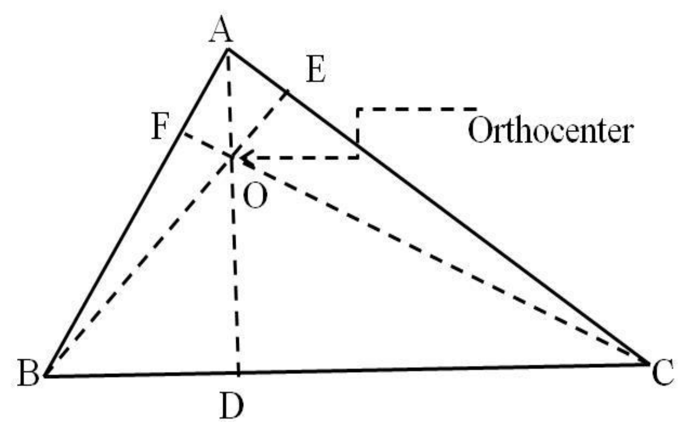
$$\angle ABC + \angle AEC = 180^0$$

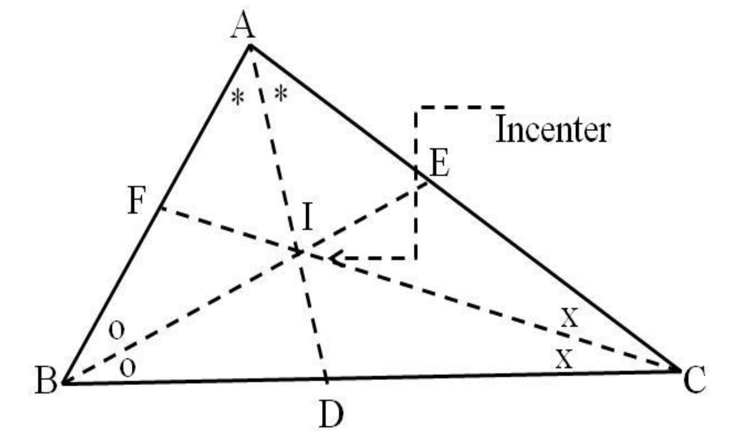
maka $\angle ADC = \angle AEC$

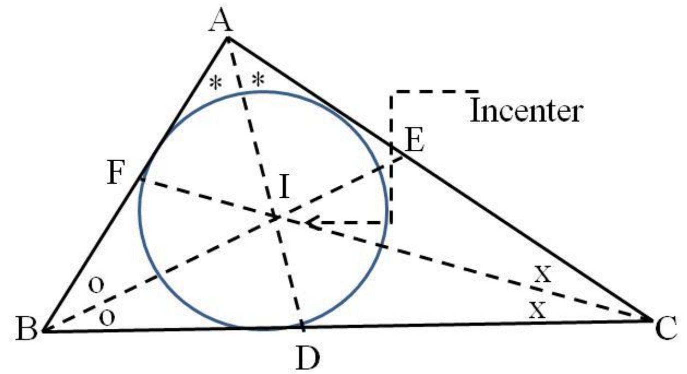
Hal ini kontradiksi

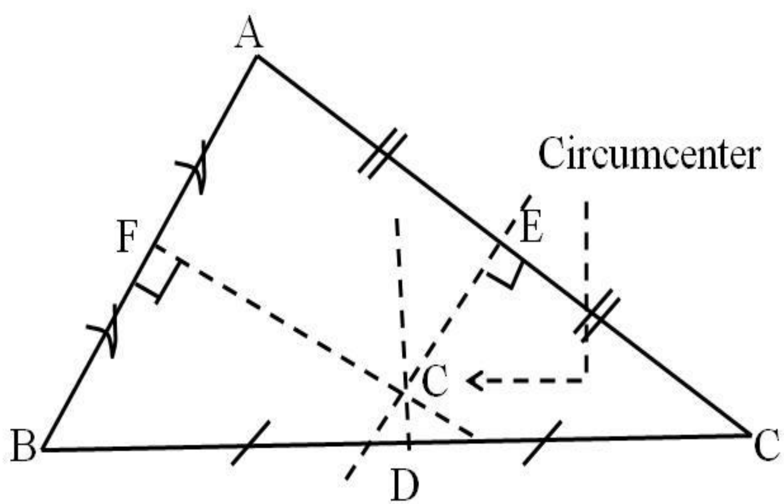
5.2. *Lingkaran Luar Segi Tiga*

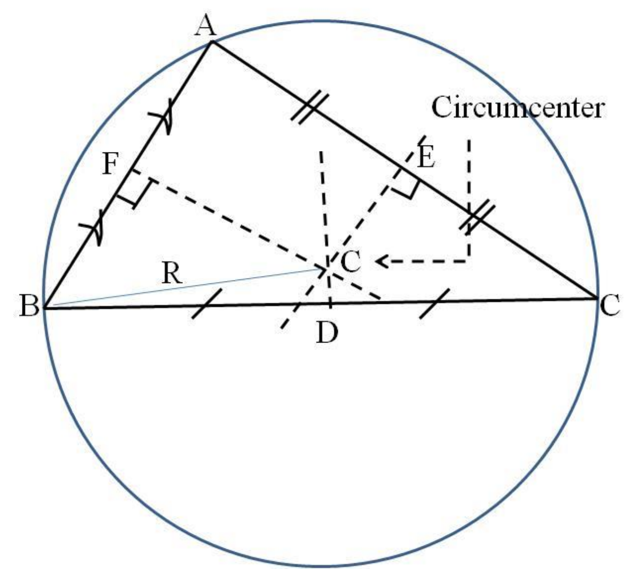





A
B
C
D
E
F
I
Incenter


A
B
C
D
E
F
I
Incenter


A
B
C
D
E
F
Circumcenter

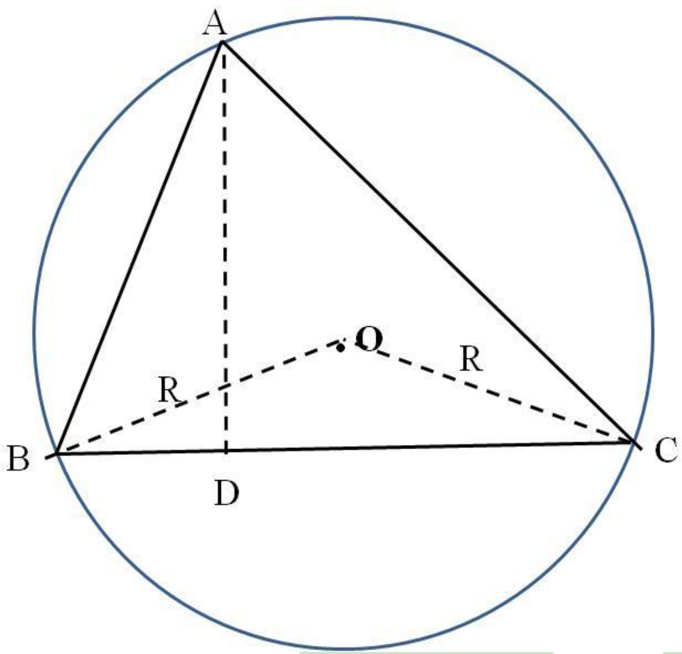

A
B
C
D
E
F
R
Circumcenter

Teorema 4.1.1. Misalkan a, b dan c adalah panjang sisi pada Segitiga ABC, maka berlaku :

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R$$

Bukti :

Bukti :

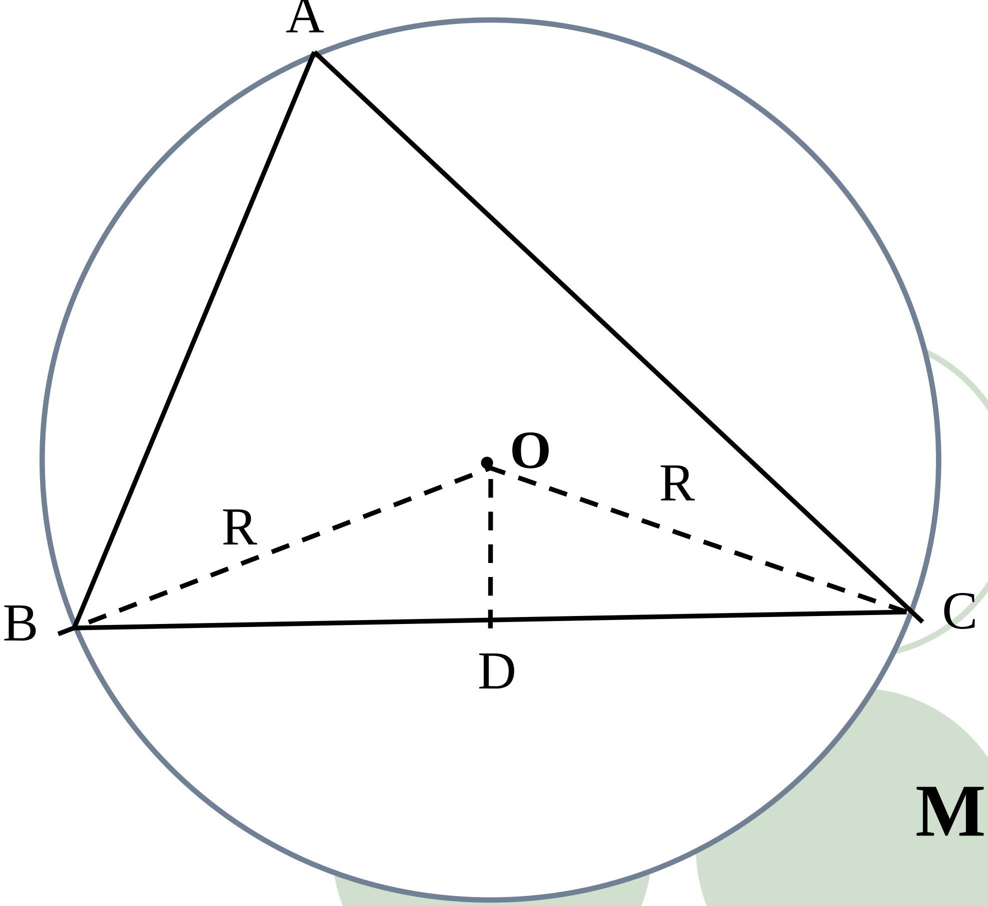


AD = AB sin B = c sin B,

Luas Δ ABC = ½ ac sin B.

Luas Δ ABC = ½ ab sin C

Luas Δ ABC = ½ bc sin A



∠ BOD = ½ ∠ BOC = ∠A

BD = ½ BC.

$$\sin \angle BOD = \frac{BD}{R}$$

BD = R× sin ∠ BOD

Karena ∠BOD = ∠ A

Maka BD = R× sin ∠ A

Karena BC = 2 BD, maka BC = 2R× sin ∠ A

$$maka \quad \frac{a}{\sin \angle A} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R$$

Teorema 4.1.2. Misalkan a, b dan c adalah panjang sisi pada Segitiga ABC, maka berlaku

$$R = \frac{abc}{4L}$$

Bukti :

luas Δ ABC = ½ bc sin∠A

$$\sin \angle A = \frac{2L}{bc} \qquad ingat \quad \frac{a}{\sin \angle A} = 2R$$

$$\text{maka } R = \frac{abc}{4L}$$

Teorema 4.1.3. Misalkan a, b dan c adalah panjang sisi pada Segitiga ABC, maka berlaku

$$L = \sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}$$

Dibuku ada bukti berdasarkan buku SMA

Bisakan anda buktikan dengan cara yang lebih sederhana ???

Ingat rumus ini akan kita perumum untuk segi empat dll

Bentuk lain dari rumus tersebut adalah

T disini juga menyatakan luas (sama dengan L pada rumus di atas

$$T = \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16}}$$

$$T = \sqrt{\frac{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}{16}}$$

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}.$$

Salah satu bukti lain

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altitude}) \\
&= \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab-(a^2+b^2-c^2))(2ab+(a^2+b^2-c^2))} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2)} \\
&= \sqrt{\frac{(c-(a-b))(c+(a-b))((a+b)-c)((a+b)+c)}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{(b+c-a)}{2}\frac{(a+c-b)}{2}\frac{(a+b-c)}{2}\frac{(a+b+c)}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}\frac{(b+c-a)}{2}\frac{(a+c-b)}{2}\frac{(a+b-c)}{2}} \\
&= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.
\end{aligned}
$$

Bagi anda yang tertarik untuk memperdalam silakan Bahan ini, layak jadi bahan dasar thesis

Heron-type formula for the volume of a tetrahedron

If *U*, *V*, *W*, *u*, *v*, *w* are lengths of edges of the tetrahedron (first three form a triangle; *u* opposite to *U* and so on), then

$$\text{volume} = \frac{\sqrt{(-a+b+c+d)\,(a-b+c+d)\,(a+b-c+d)\,(a+b+c-d)}}{192\,u\,v\,w}$$

where

$$a = \sqrt{xYZ}$$
$$b = \sqrt{yZX}$$
$$c = \sqrt{zXY}$$
$$d = \sqrt{xyz}$$
$$X = (w - U + v)(U + v + w)$$
$$x = (U - v + w)(v - w + U)$$
$$Y = (u - V + w)(V + w + u)$$
$$y = (V - w + u)(w - u + V)$$
$$Z = (v - W + u)(W + u + v)$$
$$z = (W - u + v)(u - v + W).$$

Yang berminat silakan lihat di :

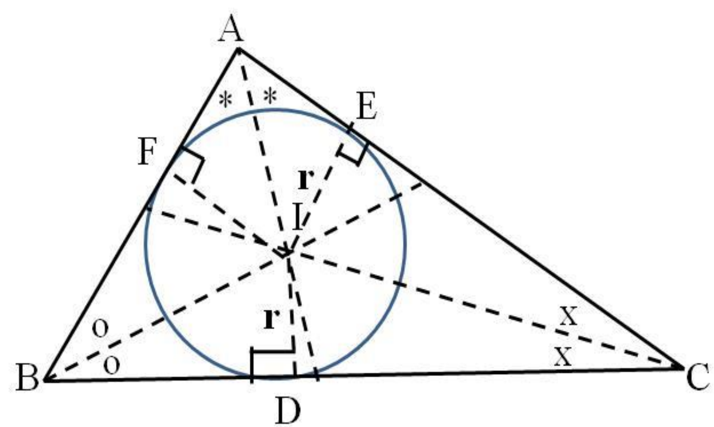
W. Kahan, "What has the Volume of a Tetrahedron to do with Computer Programming Languages?", [1], pp. 16-17. atau hubungai pak Mashadi

5.3. *Lingkaran Dalam Suatu Segitiga*

***Teorema* 5.3.1**. Pada suatu segitiga *ABC* berlaku

$$r = (s - a)\tan\frac{1}{2}A$$

Bukti

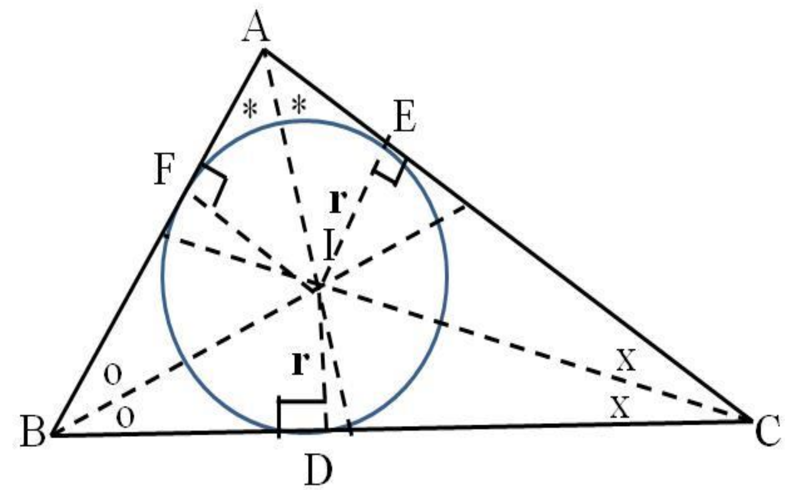


Misalkan panjang $AF = k$,

maka panjang $BF = c - k$.

Kemudian panjang

BD = Panjang $BF = c - k$.



panjang $CE = b - k$

panjang CD = Panjang $CE = b - k$

panjang AF + panjang FB + panjang BD + panjang DC + panjang CE + panjang EA =

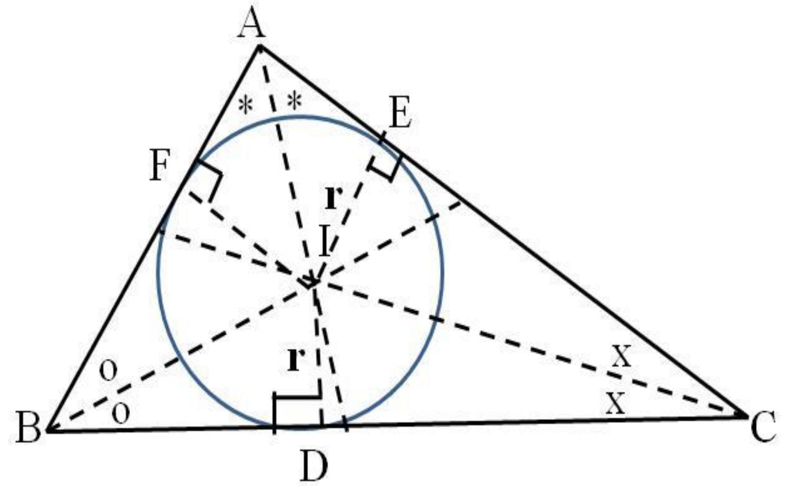
panjang AB + panjang BC + panjang CA

$$k + (c - k) + (c - k) + (b - k) + (b - k) + k = c + a + b.$$

$$2b + 2c - 2k = a + b + c$$

$$2b + 2c - a - b - c = 2k$$

$$b + c - a = 2k \text{ atau } 2k = b + c$$



$$k = \frac{1}{2}(b + c - a)$$

$$k = \frac{1}{2}(a + b + c) - a$$

$$k = s - a$$

Panjang AF = panjang $AE = s - a$,

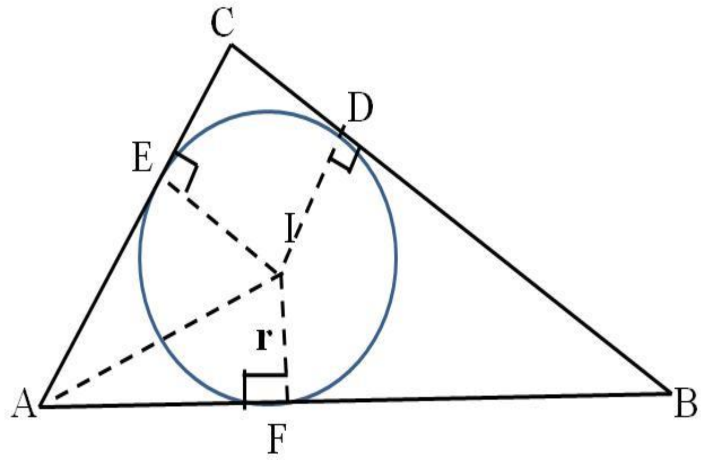
Panjang BF = panjang $BD = s - b$

Panjang CD = panjang $CE = s - c$

pada segitiga AIF

panjang $AF = s - a$ dan $\angle AFI = 90^0$,

panjang $IF = r$



$$\angle IAF = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle A$$

$$\tan \angle IAF = \frac{Panjang \;\; IF}{Panjang \;\; AF}$$

$$\tan \frac{1}{2} A = \frac{r}{s - a}$$

$$r = (s - a)\tan \frac{1}{2} A$$

***Remaks* 5.3.1.**

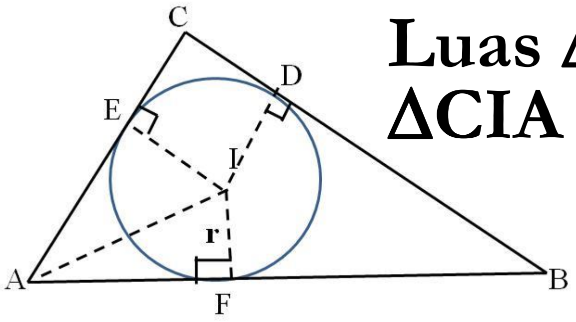
$$r = (s - b)\tan\frac{1}{2}B$$

$$r = (s - c)\tan\frac{1}{2}C$$

Jari-jari lingkaran dalam pada segitiga ABC dapat ditentukan dengan rumus berikut

$$r = \frac{L}{s} = \frac{1}{s}\sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)s-c}$$

Bukti : Pandang



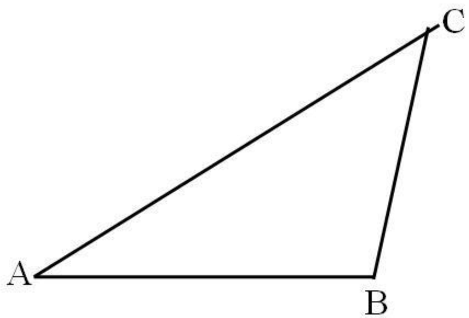
Luas ΔABC = Luas ΔAIB + Luas ΔBIC + Luas ΔCIA

$$L = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br$$

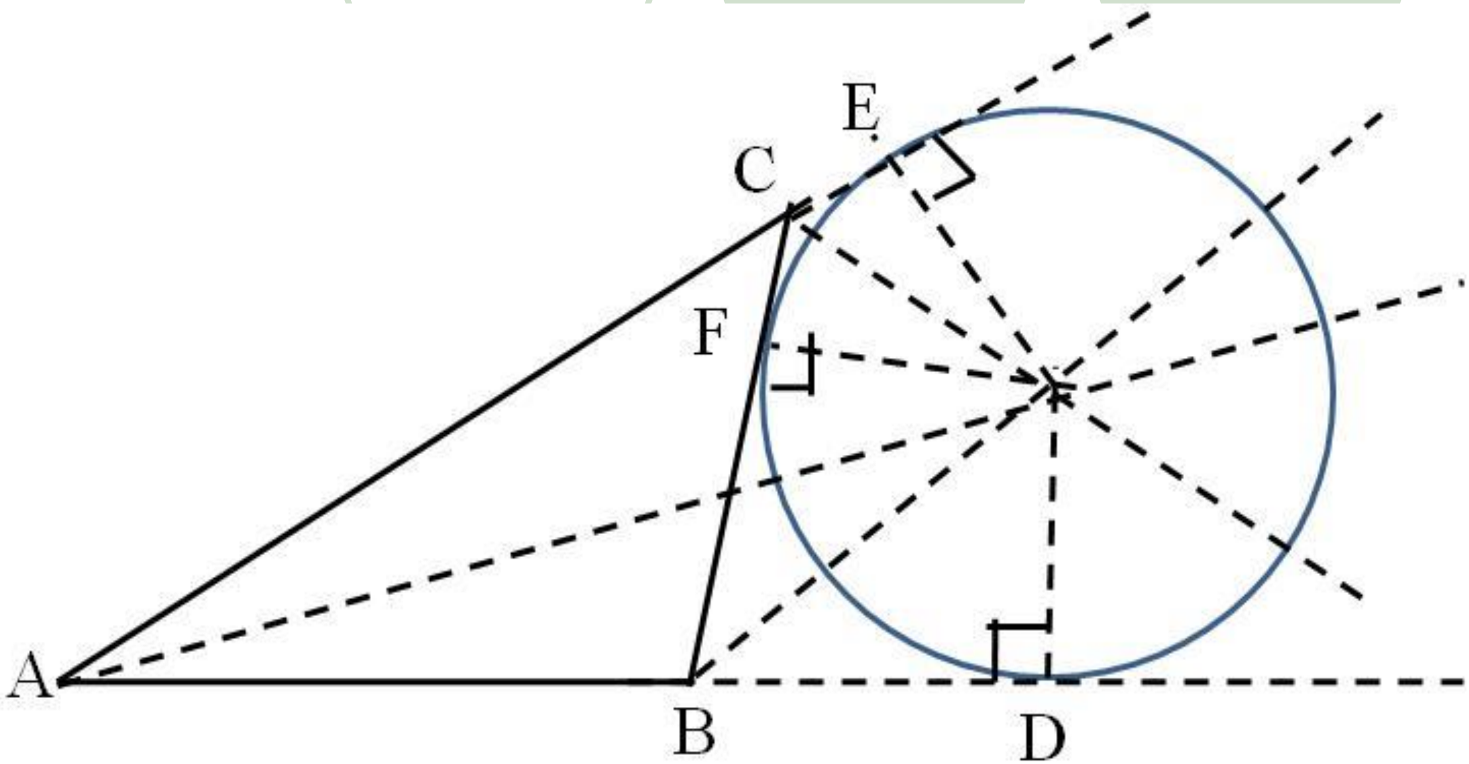
Silakan disederhanakan

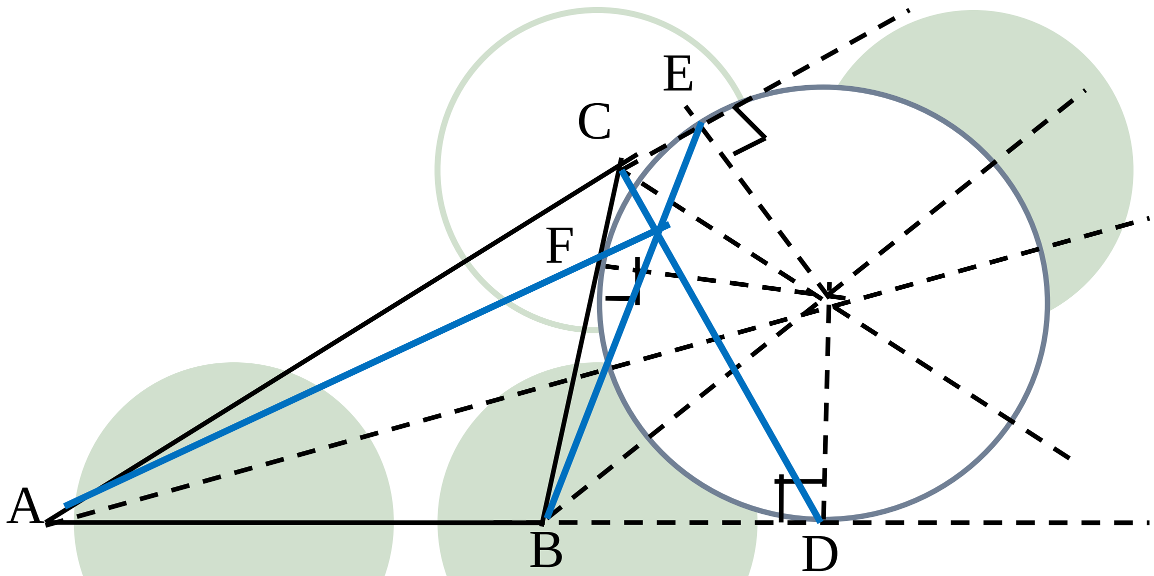
5.4. *Lingkaran Singgung Suatu Segitiga*

Lingkaran Singgung Suatu Segitiga



Bagaimana membuatnya

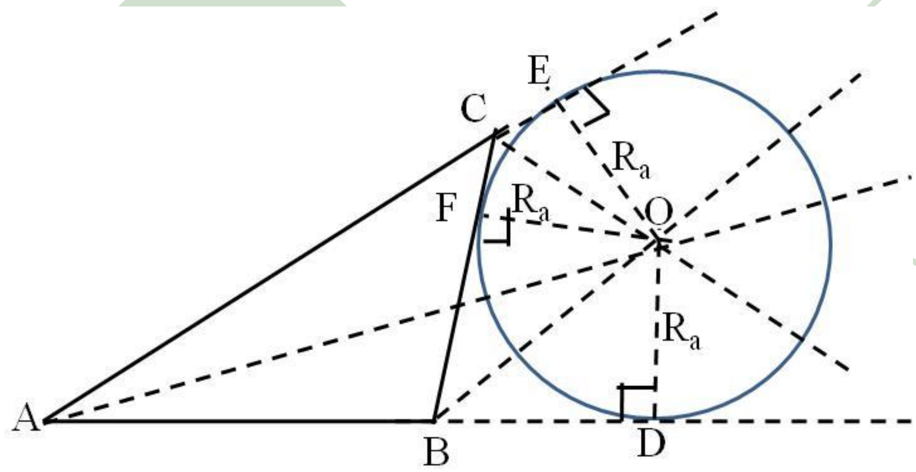




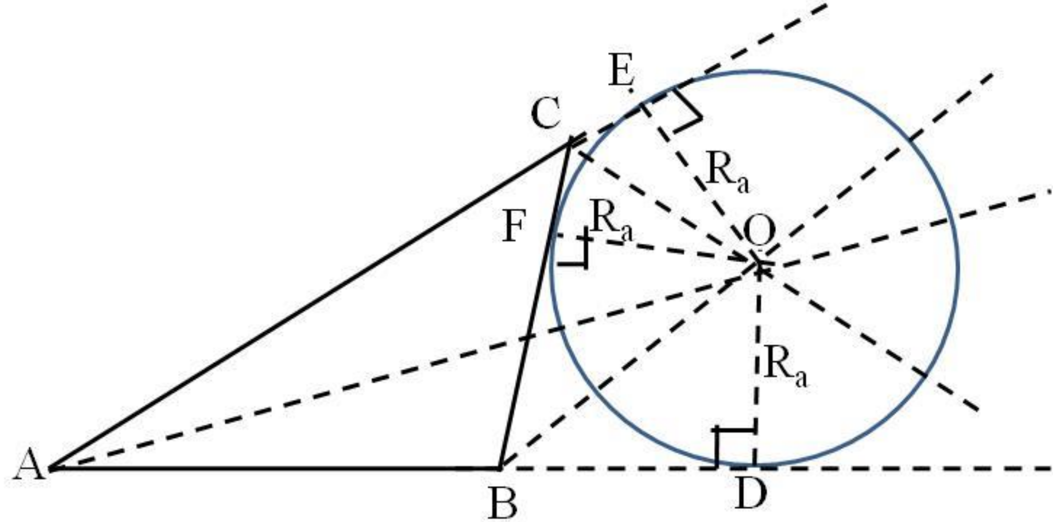
Berapa panjang jari-jari lingkaran singgung luarnya

Teorema 4.1.5. Misalkan ABC suatu segitiga sembarang, maka panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi BC adalah

$$R_a = s \tan \frac{1}{2} A$$



ingat $s = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$



panjang BF = panjang BD = x.

panjang CF = panjang BC – panjang BF = a – x.

Remaks 4.1.3

panjang CF = panjang CE = a – x.

panjang CF = panjang CE = a – x.

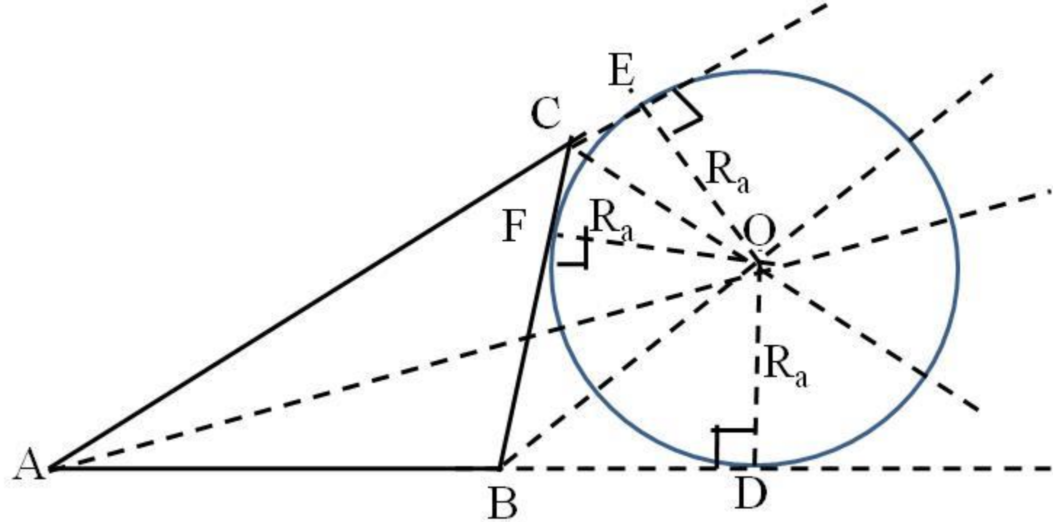
panjang AB + panjang BD = panjang AC + panjang CE

jadi

c + x = b + a – x

2x = b + a – c

$$x = \frac{1}{2}(a + b - c)$$



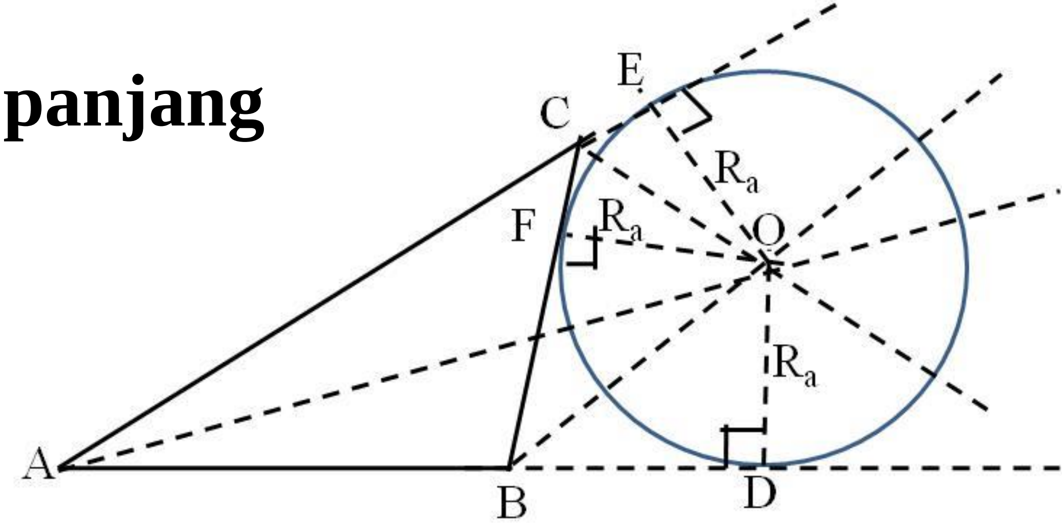
Dengan demikian

Panjang AD = panjang Ab + panjang BD

$$= c + \frac{1}{2}(a + b - c)$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c) = s$$

Selanjutnya pada Δ AOD, panjang AD = s dan $\angle$ ADO = 90^0



$$\text{dan } \angle OAD = \frac{1}{2} \angle BAC$$

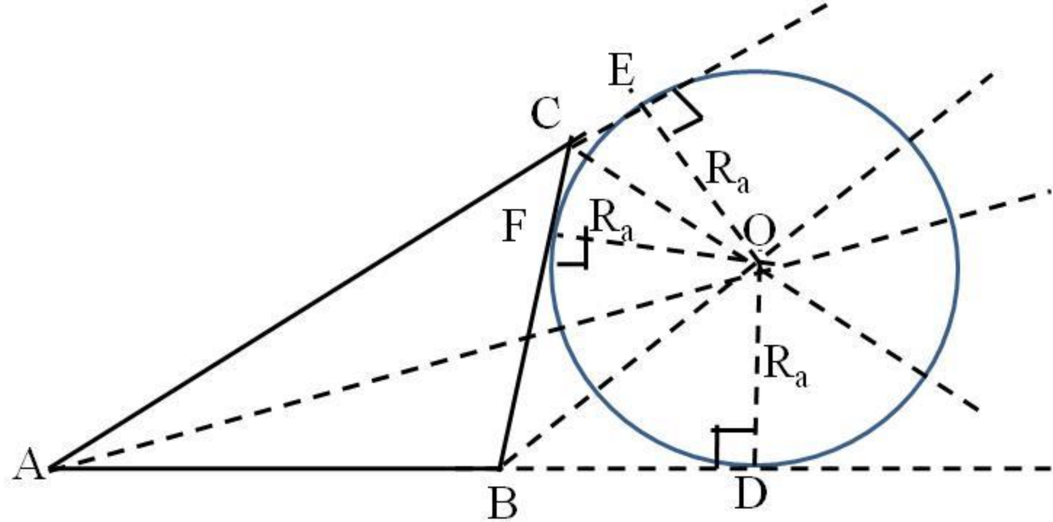
sehingga

$$\tan \angle OAD = \tan \frac{1}{2} \angle BAC = \tan \frac{1}{2} A$$

$$\tan \angle OAD = \frac{\text{panjang OD}}{\text{panjang AD}}$$

$$\tan \frac{1}{2} A = \frac{R_a}{s}$$

$$R_a = s \tan \frac{1}{2} A$$

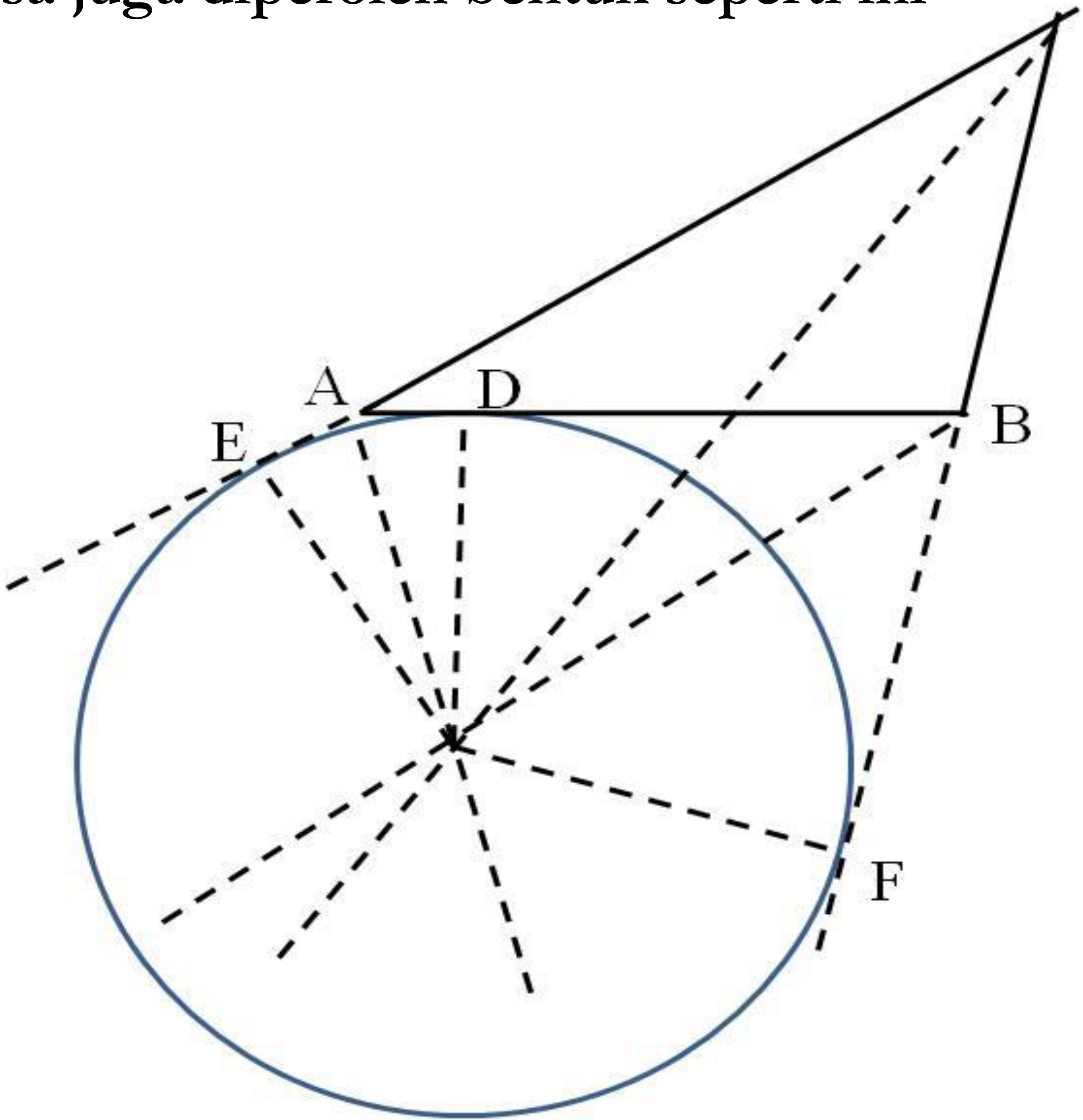


$$R_a = s \tan \frac{1}{2} A$$

$$R_b = s \tan \frac{1}{2} B$$

$$R_c = s \tan \frac{1}{2} C$$

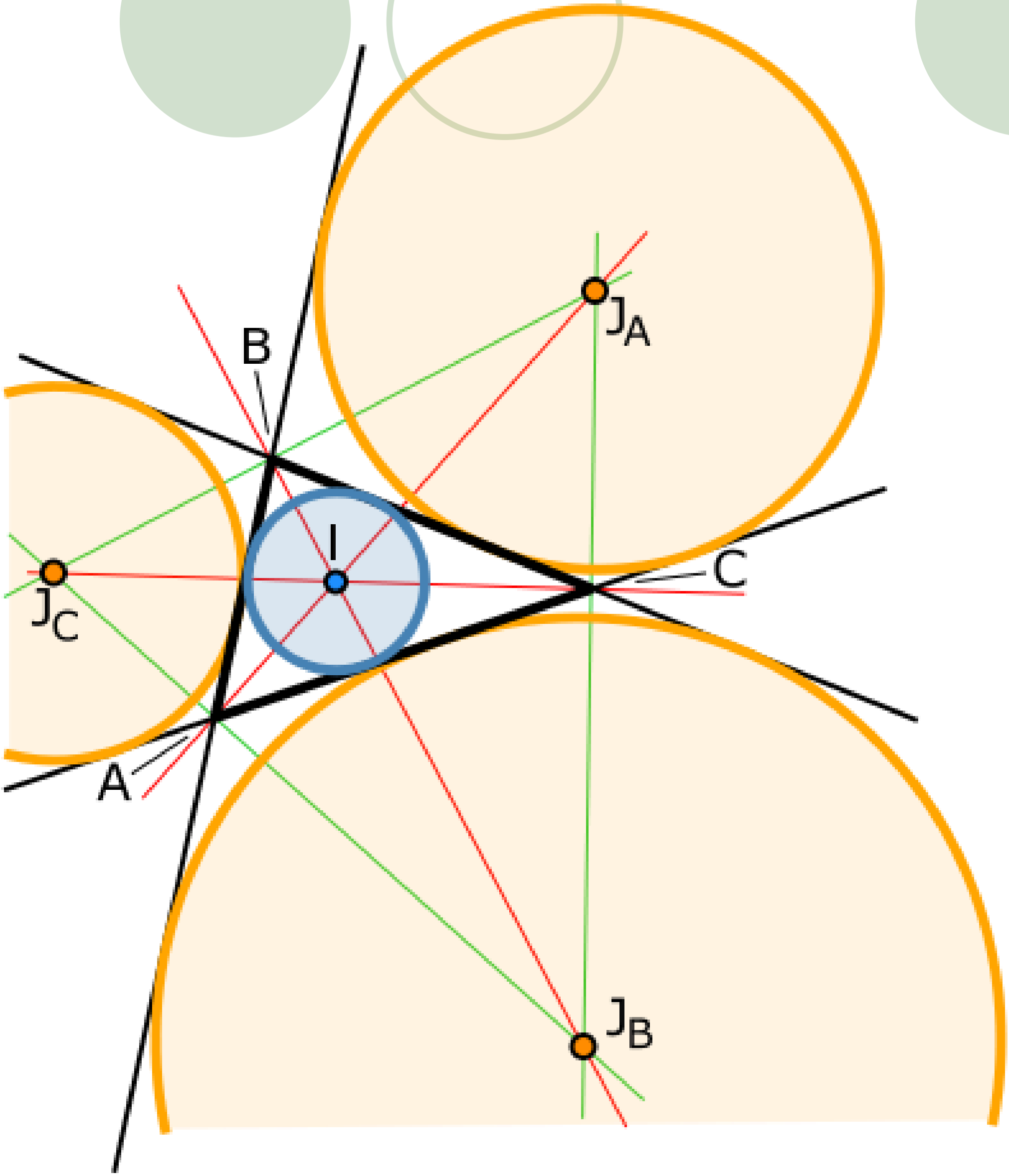
Bisa juga diperoleh bentuk seperti ini



***Remaks* 5.4.2.**

$$R_b = \frac{L}{s - b}$$

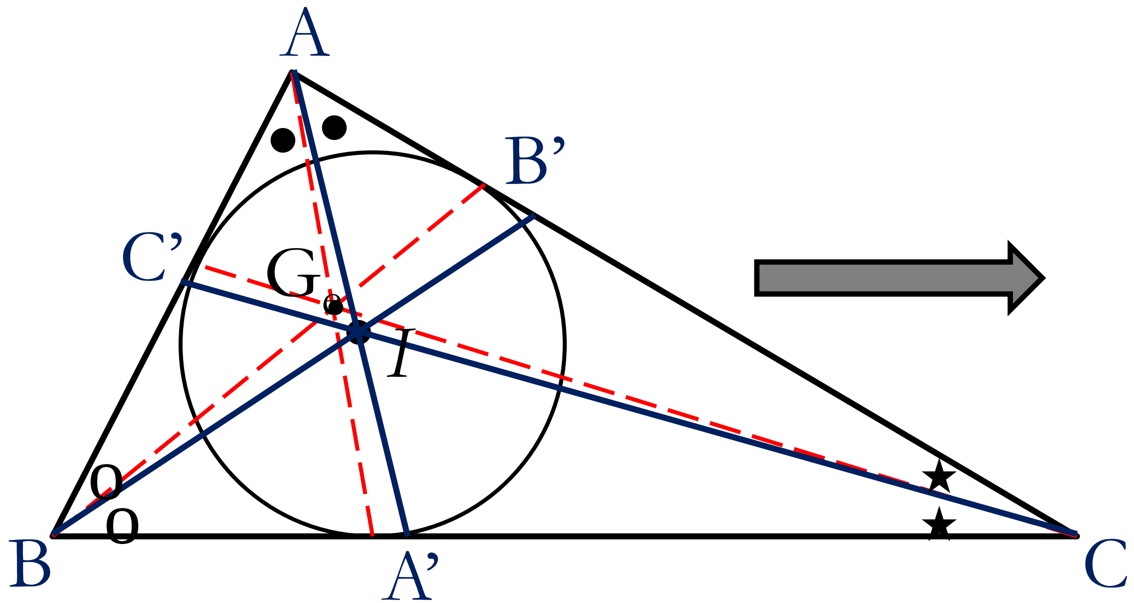
$$R_c = \frac{L}{s - c}$$



B
J_A
I
C
J_C
A
J_B

Titik Gergonne

Teorema : (Teorema Gergonne) Di dalam segitiga garis yang dibentuk dari titik-titik puncak yang dihubungkan dengan titik singgung lingkaran dalam pada sisi dihadapannya adalah konkuren.

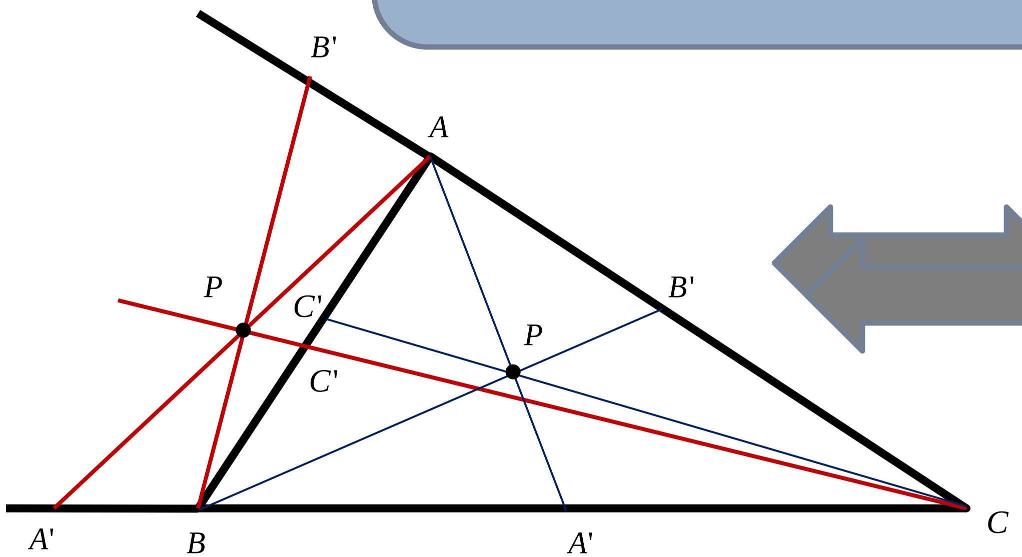


$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

TEOREMA CEVA

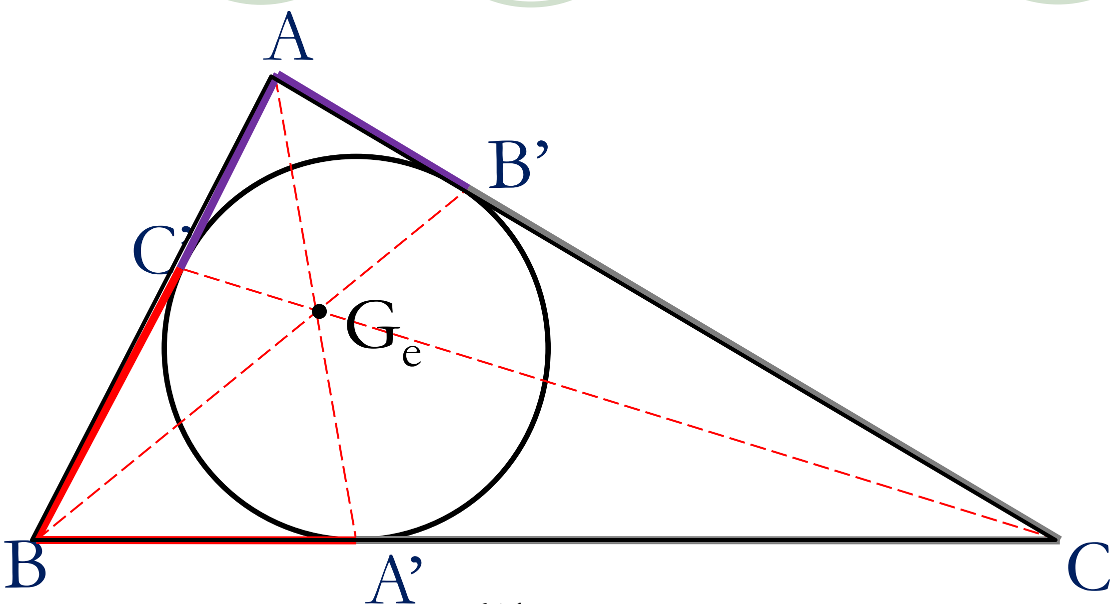
Kasus 2

jika dibentuk garis dari sudut *A*, terhadap perpanjangan sisi *BC* di titik *A'*, dari sudut *B* terhadap perpanjangan sisi *AB* dan dari sudut *C* terhadap sisi *AB* dititik *C'* maka garis *AA'*, *BB'* dan perpanjangan *CC'* dikatakan konkuren jika hanya jika



$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$$

1	Garis singgung lingkaran



AB’=AC’ (1)

BA’=BC’ (2)

CB’=CA’ (3)

Dengan mengalikan persamaan (1), (2) dan (3) diperoleh:

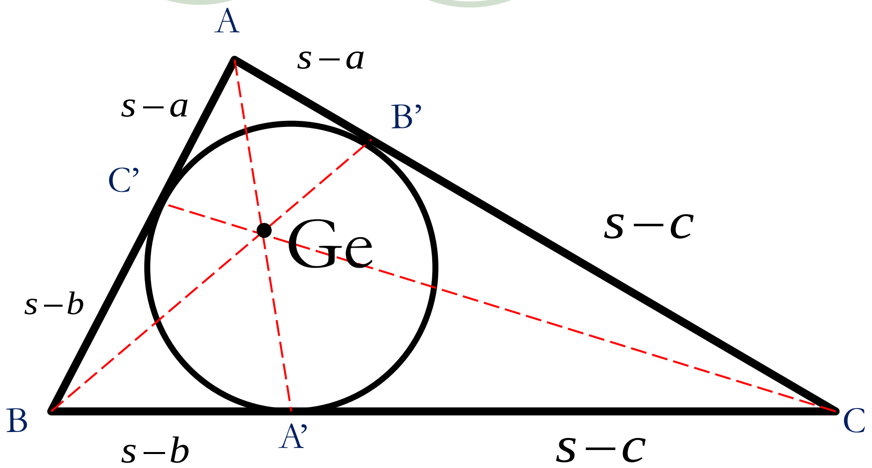
$$AB'\cdot BA'\cdot CA' = AC'\cdot BC'\cdot CB'$$

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$$

Sehingga persamaannya menjadi

$$\frac{AB'}{AC'}\cdot\frac{BA'}{BC'}\cdot\frac{CA'}{CB'}=\frac{AB'}{BC'}\cdot\frac{BA'}{CC'}\cdot\frac{CA'}{AB'}$$

2 Semiperimeter segitiga



AB'= s-a (4)

BC'= s-b (5)

CA'= s-c (6)

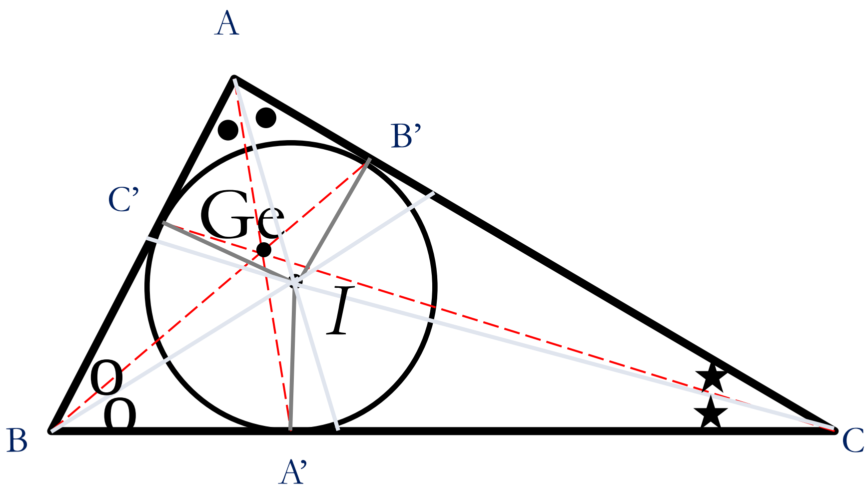
Dengan menggunakan teorema ceva pada kasus 1, persamaan (4), (5) dan (6) menjadi

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=\frac{s-a}{s-b}\cdot\frac{s-b}{s-c}\cdot\frac{s-c}{s-a}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$$

3 Segitiga kongruen



$\angle IBA' = \angle IBC'$	(sd) bisektor sudut
$IB = IB$	(s) segmen garis yang sama
$\angle BIA' \cong \angle BIC'$	(sd) diketahui

Berdasarkan korespodensi sd-s-sd diperoleh

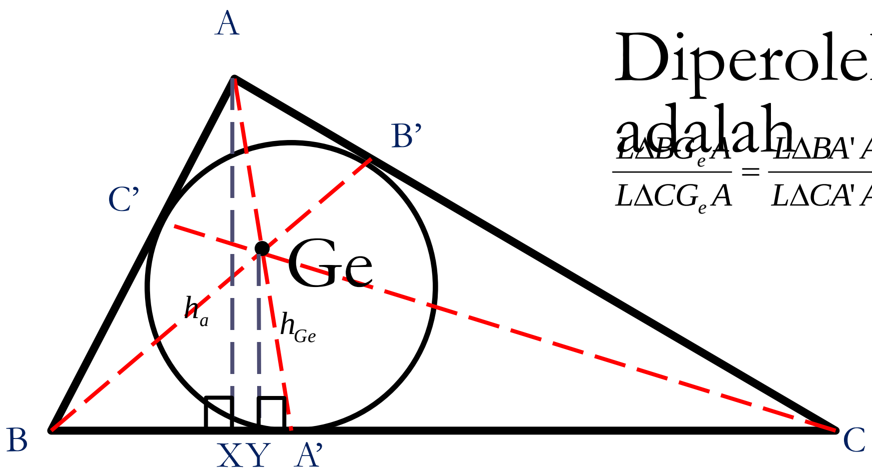
$\Delta IBA' \cong \Delta IBC' \longrightarrow CA' = CB'$

$\Delta ICA' \cong \Delta ICB' \longrightarrow BA' = BC'$

$\Delta IAB' \cong \Delta IAC' \longrightarrow AB' = AC'$

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{AB'}{CB'} = 1$$

4 Perbandingan luas segitiga



Diperoleh perbandingan luasnya adalah

$$\frac{L\Delta BG_eA}{L\Delta CG_eA}=\frac{L\Delta BA'A-L\Delta BA'G_e}{L\Delta CA'A-L\Delta CA'G_e}$$

8

Diperoleh perbandingan luas $\Delta BGeA$ dan $\Delta CGeA$

Diperoleh perbandingan luas $\Delta BA'A$ dan $\Delta CA'A$

$$\frac{L\Delta BG_eA}{L\Delta CG_eA}=\frac{\frac{1}{2}h_{Ge}\cdot BA'}{\frac{1}{2}h_{Ge}\cdot CA'}$$

$$\frac{L\Delta BA'A}{L\Delta CA'A}=\frac{\frac{1}{2}h_a\cdot BA'}{\frac{1}{2}h_a\cdot CA'}=\frac{BA'}{A'C}$$

7

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{L\Delta CG_eB}{L\Delta AG_eB}$$

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{L\Delta AG_eC}{L\Delta BG_eC}$$

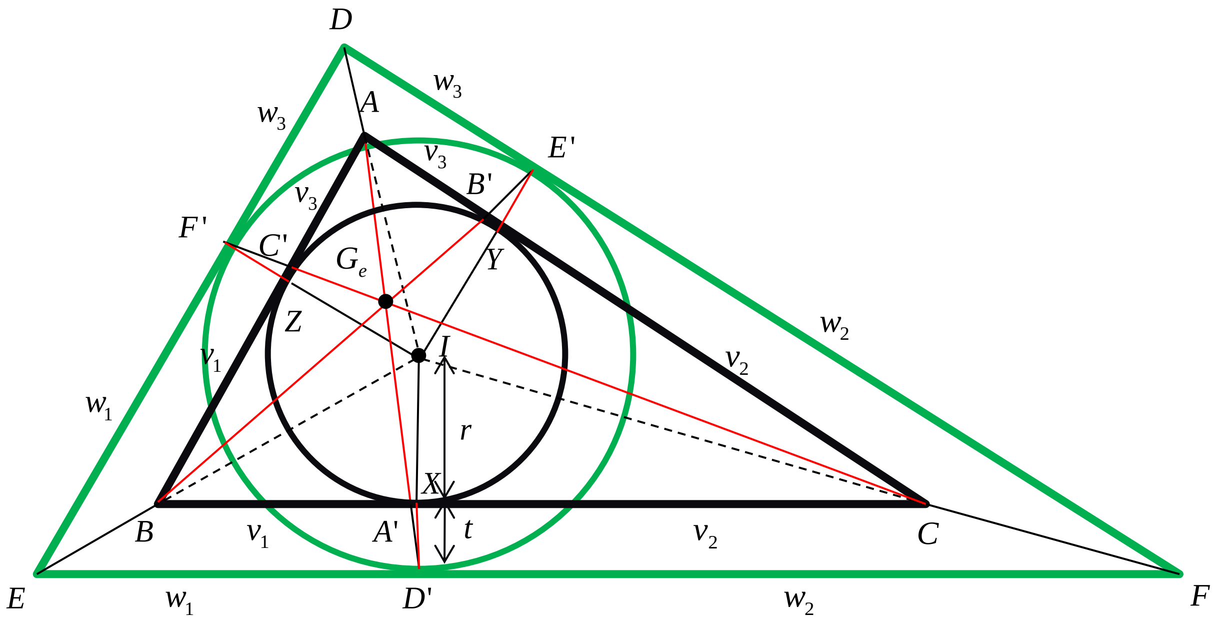
Subsitusikan persamaan (7) dan (8) ke persamaan (9), sehingga

Dengan menggunakan teorema ceva diperoleh

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{L\Delta BG_eA}{L\Delta CG_eA}\cdot\frac{L\Delta CG_eB}{L\Delta AG_eB}\cdot\frac{L\Delta AG_eC}{L\Delta BG_eC}=1$$

5

Lingkaran kosentrik



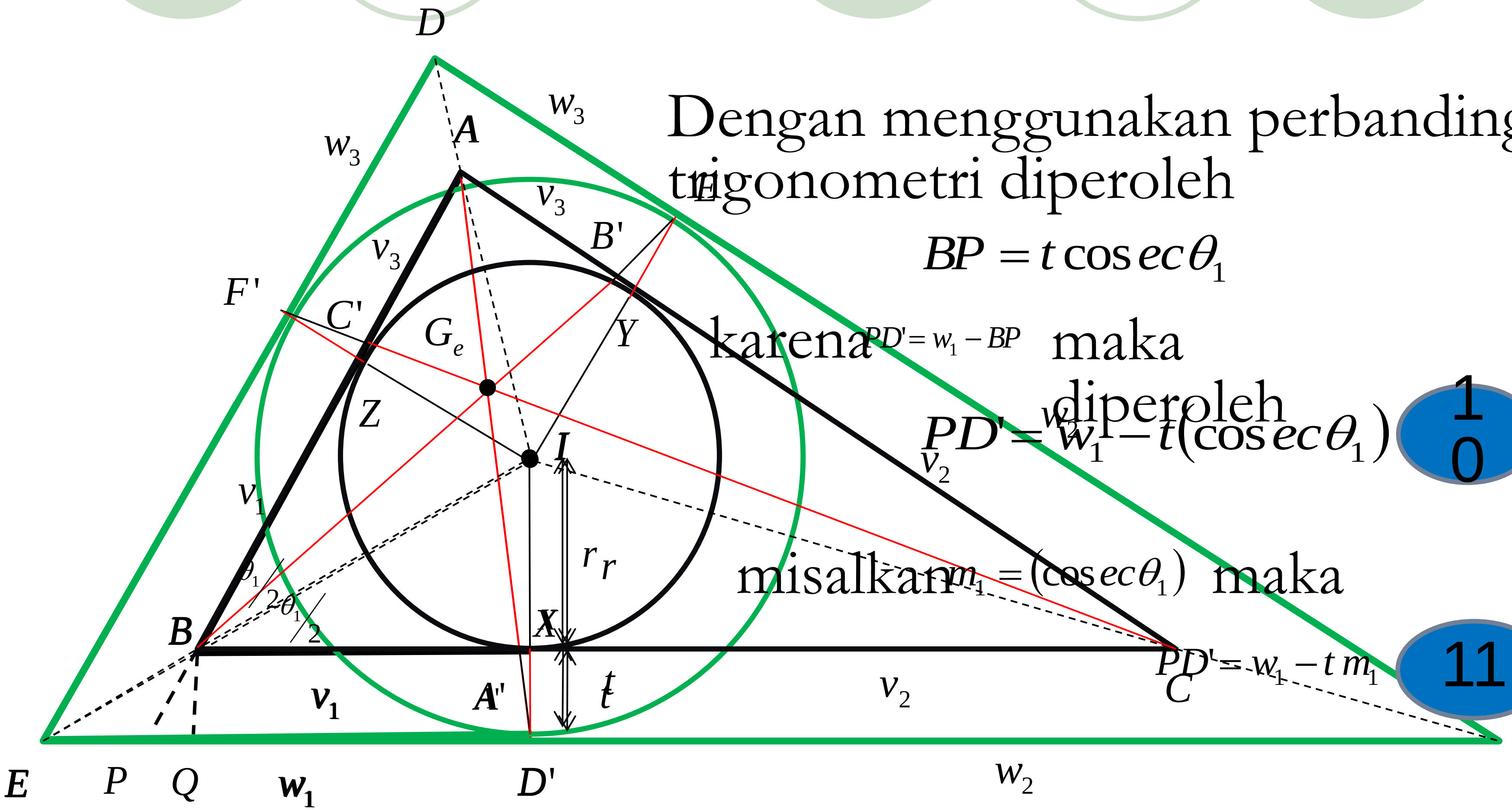
Bukti : Karena $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ maka $(r+t):r$,

sehingga

$$\frac{r+t}{r} = \frac{w_1}{Bx}$$

$$w_1 = \left(\frac{r+t}{r}\right) v_1$$

5 Lingkaran kosentrik



Dengan menggunakan perbandingan trigonometri diperoleh

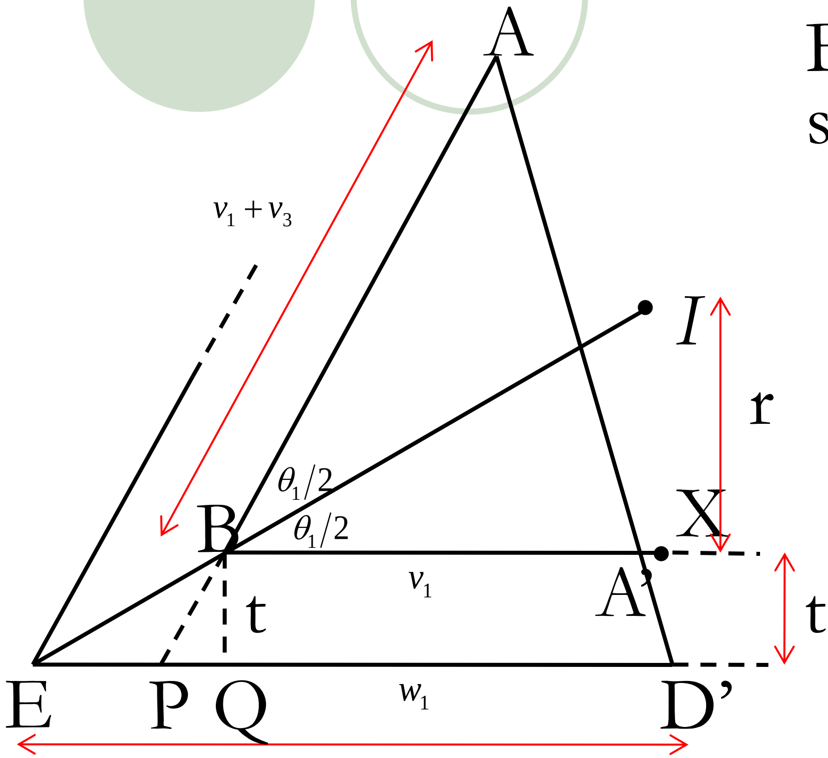
$$BP = t \cos ec\,\theta_1$$

karena $PD' = w_1 - BP$ maka diperoleh

$$PD' = w_1 - t(\cos ec\,\theta_1) \quad (10)$$

misalkan $m_1 = (\cos ec\,\theta_1)$ maka

$$PD' = w_1 - t\,m_1 \quad (11)$$



Berdasarkan kesebangunan sd-sd, maka $\Delta PAD' \sim \Delta BAA'$

$$\frac{PD'}{BA'} = \frac{v_1 + v_3 + t\,m_1}{v_1 + v_3}$$

Sehingga diperoleh

$$BA' = \frac{(v_1 + v_3)PD'}{v_1 + v_3 + t\,m_1} \quad (12)$$

Subsitusikan persamaan (10) dan (11) ke persamaan (12), sehingga

$$CB' = \frac{(v_1 + v_2)\left[\left((r+t)/r\right)v_2 - t\,m_2\right]}{v_1 + v_2 + t\,m_2}$$

$$CA' = \frac{(v_2 + v_3)\left[\left((r+t)/r\right)v_2 - t\,m_2\right]}{v_2 + v_3 + t\,m_2}$$

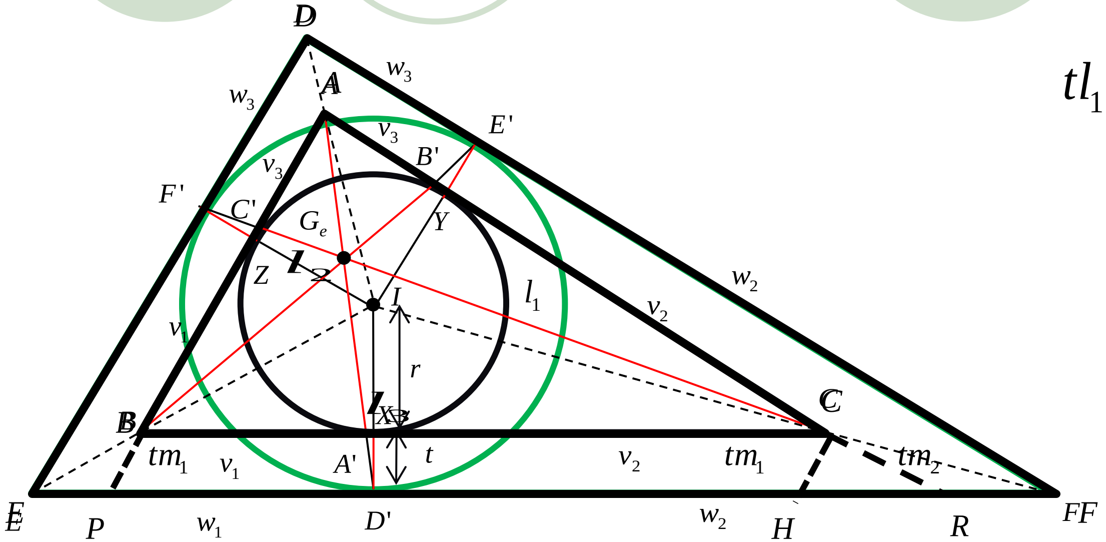
$$AB' = \frac{(v_1 + v_3)\left[\left((r+t)/r\right)v_3 - t\,m_3\right]}{v_1 + v_3 + t\,m_3}$$

$$AC' = \frac{(v_2 + v_3)\left[\left((r+t)/r\right)v_3 - t\,m_3\right]}{v_2 + v_3 + t\,m_3}$$

$$BC' = \frac{(v_1 + v_2)\left[\left((r+t)/r\right)v_1 - t\,m_1\right]}{v_1 + v_2 + t\,m_1}$$

$$BA' = \frac{(v_1 + v_3)\left[\left((r+t)/r\right)v_1 - t\,m_1\right]}{v_1 + v_3 + t\,m_1} \quad (13)$$

karena $\Delta ABC \sim \Delta GHR$ maka diperoleh $tl_1 m_1 = tl_2 m_2 = tl_3 m_3 = k$



$$BA' = \frac{l_2\left[l_1\left((r+t)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1 l_2 + k}$$

$$CA' = \frac{l_1\left[l_2\left((r+t)/r\right)v_2 - k\right]}{l_1 l_2 + k}$$

$$CB' = \frac{l_3\left[l_2\left((r+t)/r\right)v_2 - k\right]}{l_2 l_3 + k}$$

$l_1 = v_1 + v_2$

$l_2 = v_2 + v_3$

$l_3 = v_1 + v_3$

$$AB' = \frac{l_2\left[l_3\left((r+t)/r\right)v_3 - k\right]}{l_2 l_3 + k}$$

$$AC' = \frac{l_1\left[l_3\left((r+t)/r\right)v_3 - k\right]}{l_1 l_3 + k}$$

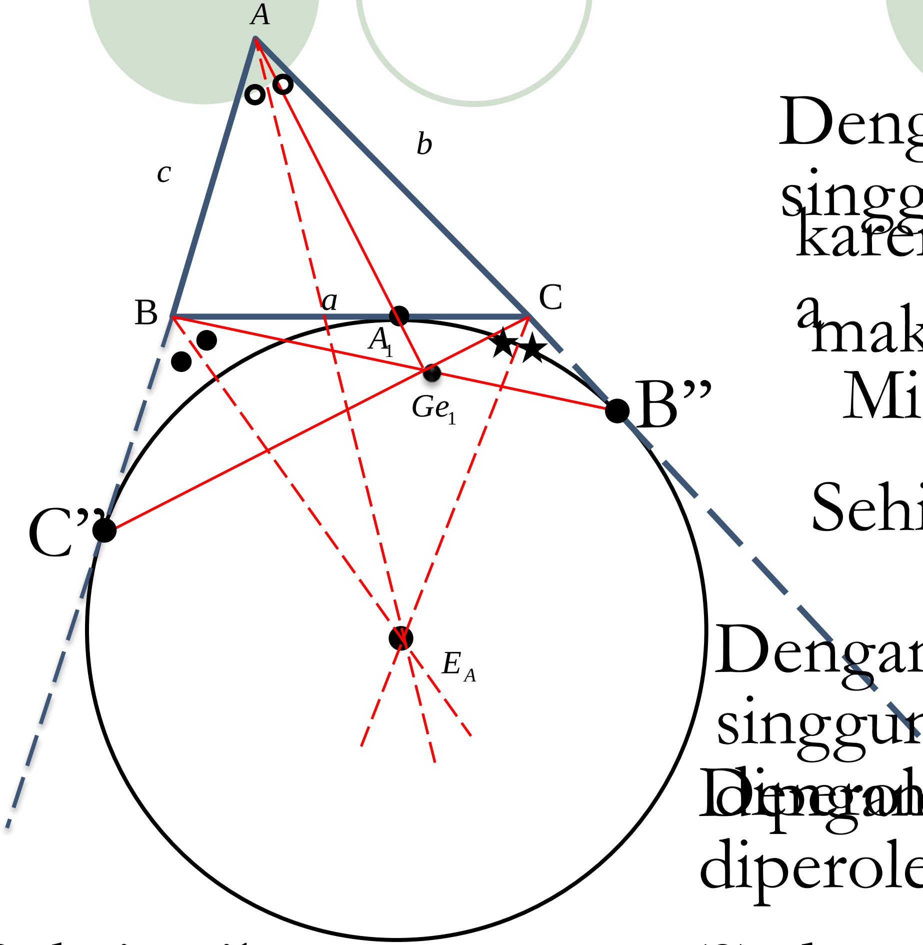
$$BC' = \frac{l_3\left[l_1\left((r+t)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1 l_3 + k}$$

Subsitusikan $l_1 = v_1 + v_2$ Ke persamaan 13, dan diperoleh

$$BA' = \frac{l_2\left[l_1\left((r+t)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1 l_2 + k}$$

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

TITIK GERGONNE LUAR SEGITIGA



Dengan menggunakan garis singgung lingkaran diperoleh

karena $AB'' = AC + CB''$

$CB'' = CA_1$ **9**

maka $AB'' = \frac{1}{2}(a+b+c) = s$

Misalkan $CB'' = n$ maka diperoleh

Sehingga diperoleh $BA_1 = a - n$ **10**

$C''B = BA_1 = s - c$

$CB'' = CA_1 = s - b$

Dengan menggunakan garis singgung lingkaran pada sisi BC

Diperoleh $AC'' + CB'' = AB + BC''$

Dengan menggunakan teorema ceva diperoleh **11**

$$\frac{AC''}{C''B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB''}{B''A} = 1$$

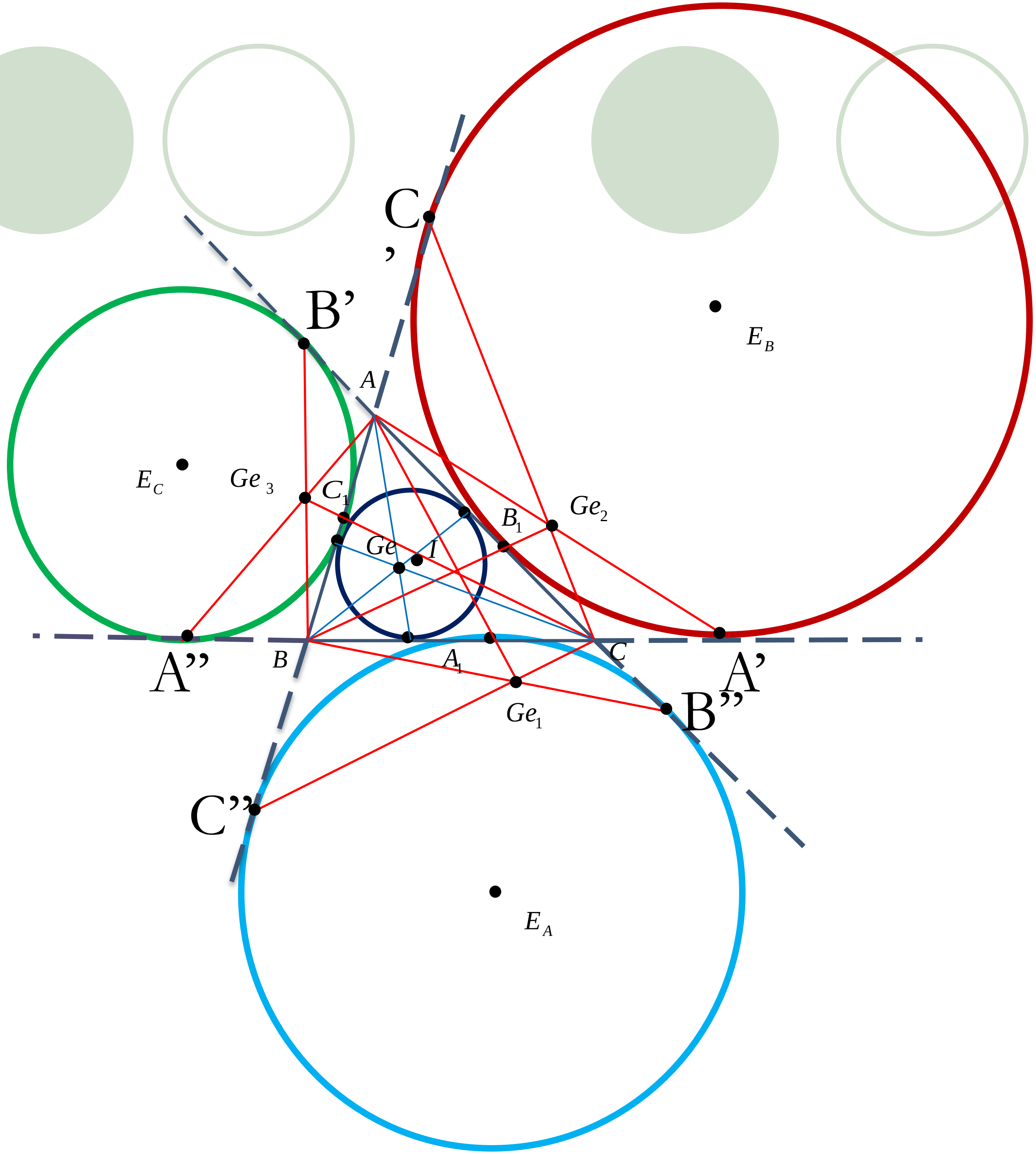
Subsitusikan persamaan (9) dan (10) ke persamaan (11)

Sehingga

$$\frac{AC''}{C''B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB''}{B''A} = \frac{s}{s}\cdot\frac{s-c}{s-c}\cdot\frac{s-b}{s-b}$$

sehingga

$$n = \frac{1}{2}(c+a-b)$$



C'
B'
A
E_B
E_C
Ge_3
C_1
Ge_2
B_1
Ge
I
A''
B
A_1
C
A'
B''
Ge_1
C''
E_A

MENGKONTRUKSI TITIK NAGEL MELALUI EXCIRCLE

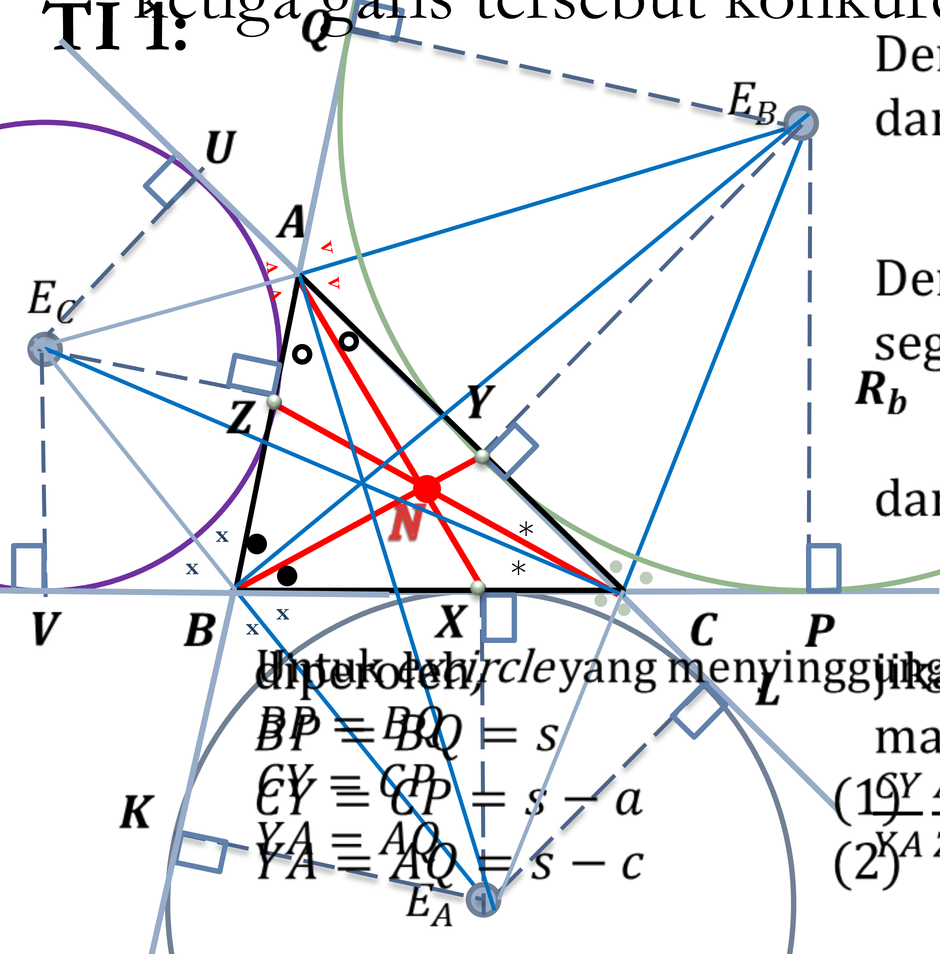
NAGEL

TEOREMA 1

Nagel merupakan titik konkurensi dari tiga sudut pada sebuah segitiga terhadap titik singgung lingkaran singgung luar (*excircle*) di hadapannya.

Jika setiap titik sudut pada segitiga dihubungkan terhadap titik singgung *excircle* di hadapannya, maka ketiga garis tersebut konkuren di titik Nagel.

BUKTI 1:



Untuk *excircle* yang menyinggung sisi *CA*, diperoleh,

$BP = BQ = s$ (1)

$CY = CP = s - a$

$YA = AQ = s - c$ (2)

Dengan membandingkan persamaan (1) dan (2), maka

$$\frac{CY}{YA} = \frac{s-a}{s-c} \quad (3)$$

Dengan cara yang sama, untuk sisi segitiga yang lainnya akan diperoleh

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{s-b}{s-a} \quad (4)$$

dan

$$\frac{BX}{XC} = \frac{s-c}{s-b} \quad (5)$$

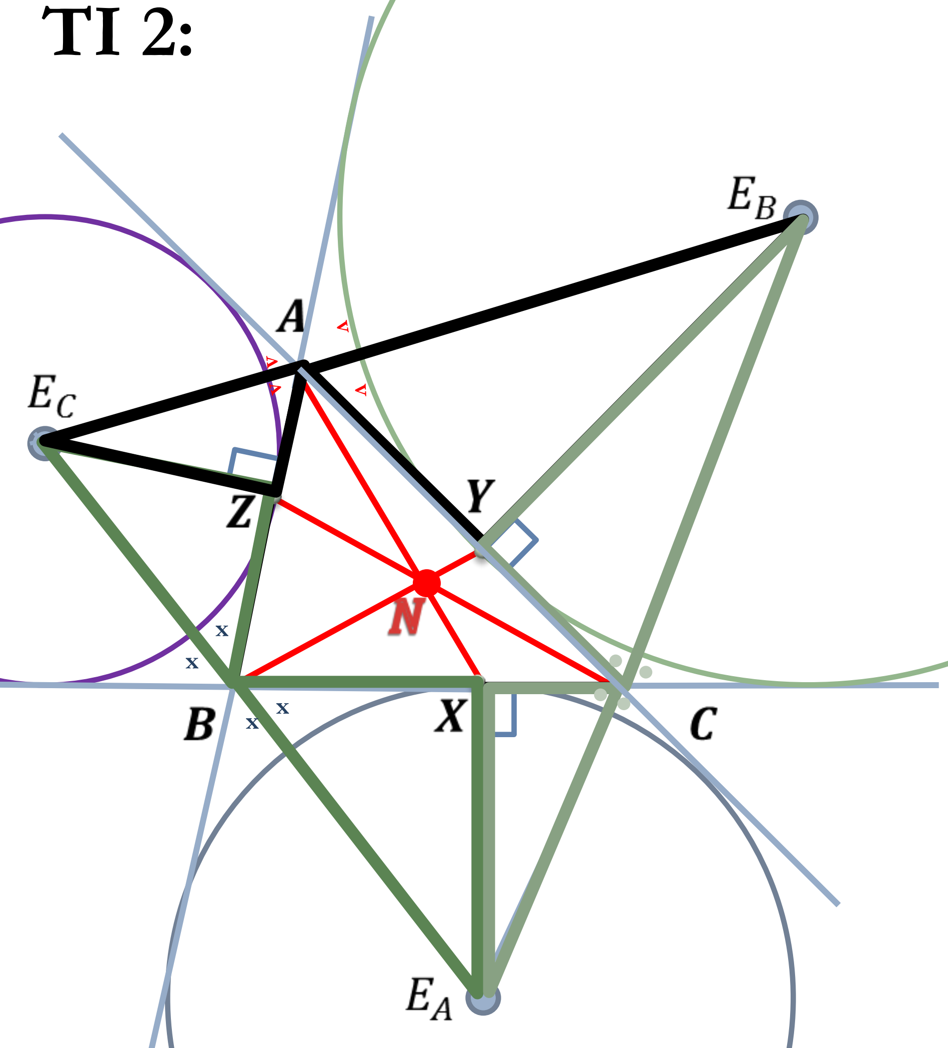
jika persamaan (3), (4), dan (5) dikalikan, maka

$$\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}\frac{BX}{XC} = \frac{s-a}{s-c}\frac{s-b}{s-a}\frac{s-c}{s-b} = 1.$$

MENGKONTRUKSI TITIK NAGEL MELALUI EXCIRCLE

TEOREMA 1

BUKTI 2:



$\angle BXE_A \cong \angle BZE_C$ (sd)

$\angle XBE_A \cong \angle ZBE_C$ (sd)

sehingga,

$\Delta BXE_A \sim \Delta BZE_C$

$$\frac{BX}{BZ} = \frac{XE_A}{ZE_C} \qquad (6)$$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$\Delta CYE_B \sim \Delta CXE_A$ $$\frac{CY}{CX} = \frac{YE_B}{XE_A} \qquad (7)$$

$\Delta AZE_C \sim \Delta AYE_B$ $$\frac{AZ}{AY} = \frac{ZE_C}{YE_B} \qquad (8)$$

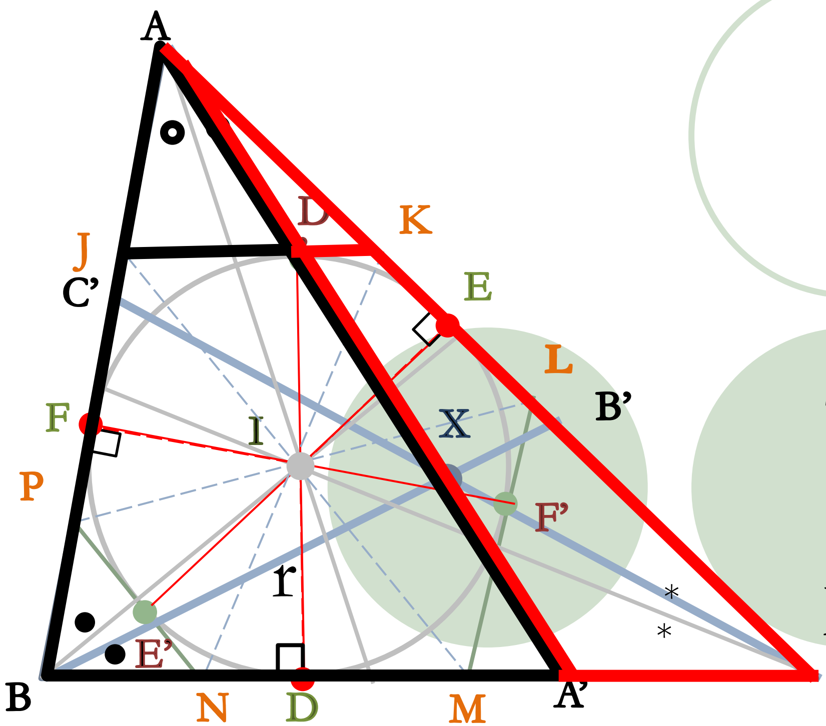
Dengan mengalikan persamaan (6), (7), dan (8), maka

$$\frac{BX}{BZ}\frac{CY}{CX}\frac{AZ}{AY} = \frac{XE_A}{ZE_C}\frac{YE_B}{XE_A}\frac{ZE_C}{YE_B} = 1$$

■

RABU, 15 JANUARI 2

MENGKONTRUKSI TITIK NAGEL MELALUI INCIRCLE



Akan ditunjukkan bahwa perpanjangan garis AD', BE', dan CF' konkuren

$\Delta ABA' \sim \Delta AJD'$ → $\dfrac{BA'}{JD'} = \dfrac{AA'}{AD'}$ (9)

$\Delta AJD' \sim \Delta AD'K$ → $\dfrac{A'C}{D'K} = \dfrac{AA'}{AD'}$ (10)

Sehingga persamaan (9) & (10) menjadi

$\dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{JD'}{D'K}$ (11)

Dengan menggunakan cara yang sama pada segitiga dengan sisi yang lainnya maka,

$\dfrac{CB'}{B'A} = \dfrac{NE'}{E'P}$ (12)

$\dfrac{AC'}{C'B} = \dfrac{LF'}{F'M}$ (13)

$\Delta KD'I \cong \Delta ND'I$ dan $\Delta KEI \cong \Delta NE'I$.

Sehingga,

$D'K = DN = E'N = EK$ (14)

$\Delta PE'I \cong \Delta LEI$ dan $\Delta PFI \cong \Delta LF'I$.

Sehingga,

$E'P = EL = F'L = FP$ (15)

$\Delta JFI \cong \Delta MF'I$ dan $\Delta JD'I \cong \Delta MDI$.

Sehingga,

$D'J = DM = F'M = EJ$ (16)

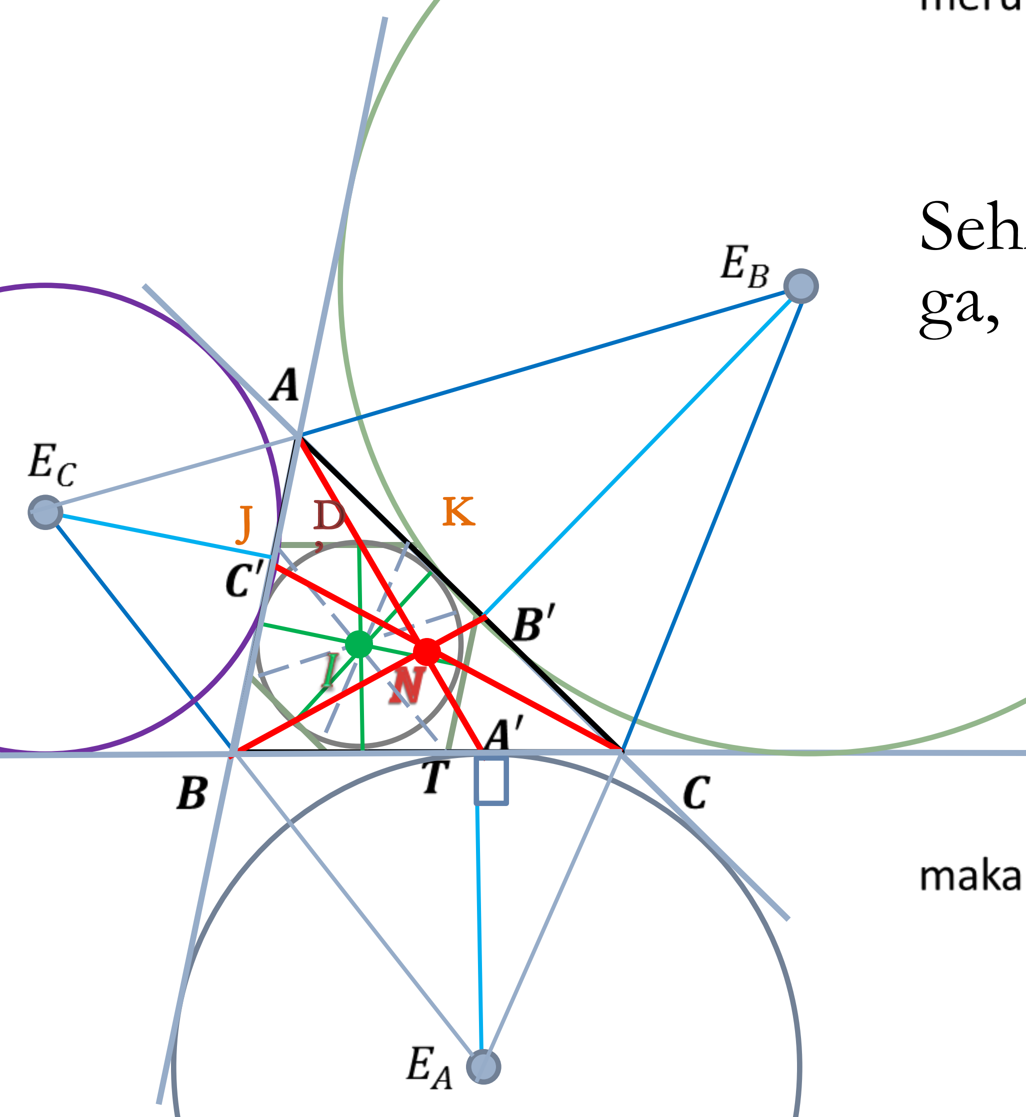
Dari perkalian persamaan (11), (12), dan (13) diperoleh

$$\frac{BA'}{A'C}\,\frac{CB'}{B'A}\,\frac{AC'}{C'B} = \frac{JD'}{D'K}\,\frac{NE'}{E'P}\,\frac{LF'}{F'M}$$

Berdasarkan persamaan (14),(15), dan (16) maka

$$\frac{BA'}{A'C}\,\frac{CB'}{B'A}\,\frac{AC'}{C'B} = \frac{DM}{EK}\,\frac{EK}{FP}\,\frac{FP}{DM} = 1$$

MENGKONTRUKSI TITIK NAGEL MELALUI INCIRCLE



Akan ditunjukkan bahwa $T = A'$ sehingga A' merupakan titik singgung Lingkaran singgung luar.

$\angle KJI \cong \angle CBE_A$ (sd)

$\angle JKI \cong \angle BCE_A$ (sd)

Sehingga,

$$\Delta BE_AC \sim \Delta JIK$$

$$\frac{BT}{JD'} = \frac{TC}{D'K}$$

$$\frac{BT}{TC} = \frac{JD'}{D'K}$$

$$\frac{BT}{TC} = \frac{BA'}{A'C}$$

$$TC = A'C$$

maka $T = A'$

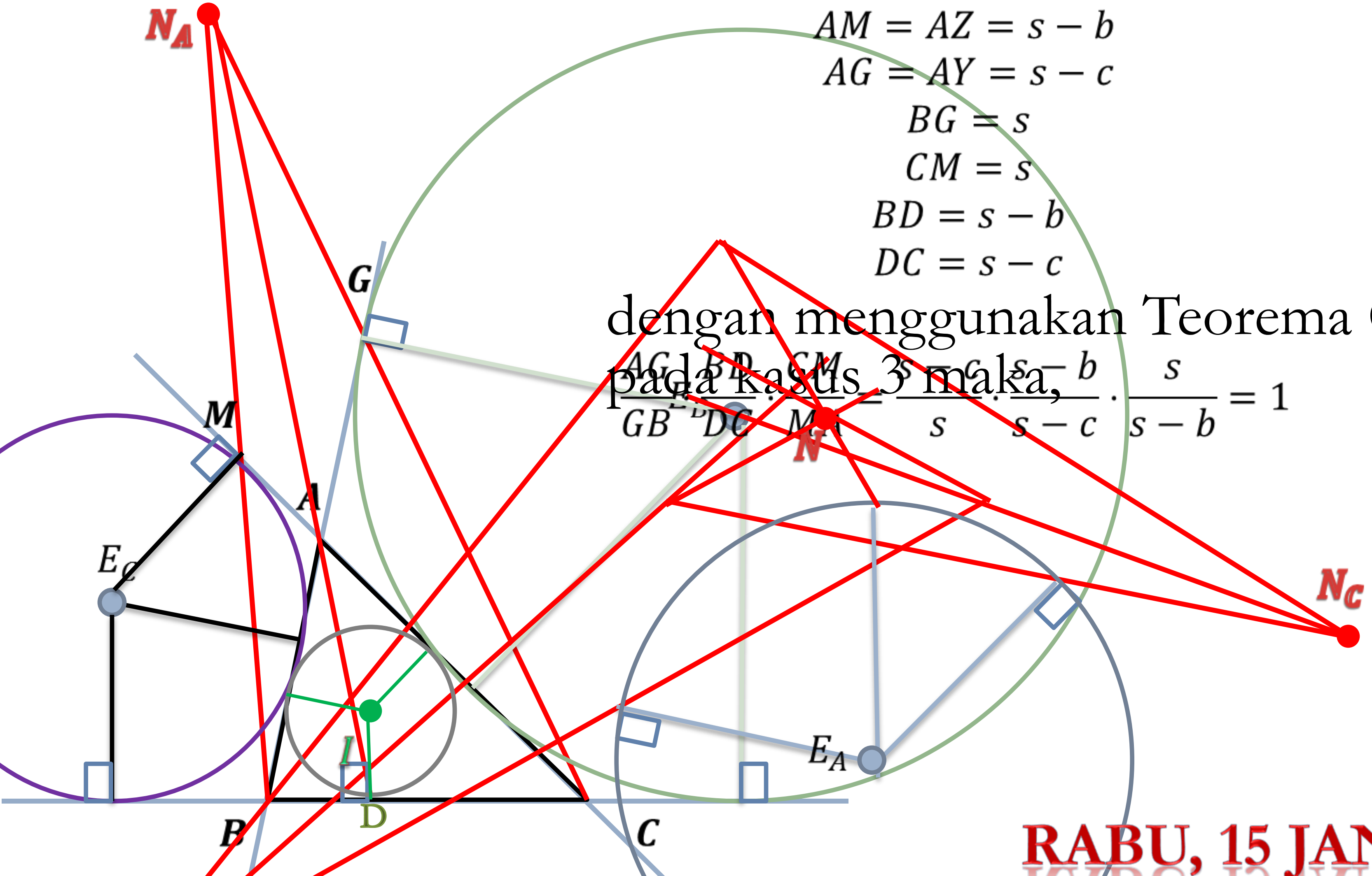
TITIK NAGEL LUAR

Akan ditunjukkan perpanjangan garis BM, DA, dan CG konkuren.

$$AM = AZ = s - b$$
$$AG = AY = s - c$$
$$BG = s$$
$$CM = s$$
$$BD = s - b$$
$$DC = s - c$$

dengan menggunakan Teorema Ceva pada kasus 3 maka,

$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{s-c}{s} \cdot \frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s}{s-b} = 1$$



THANK YOU

Terima kasih