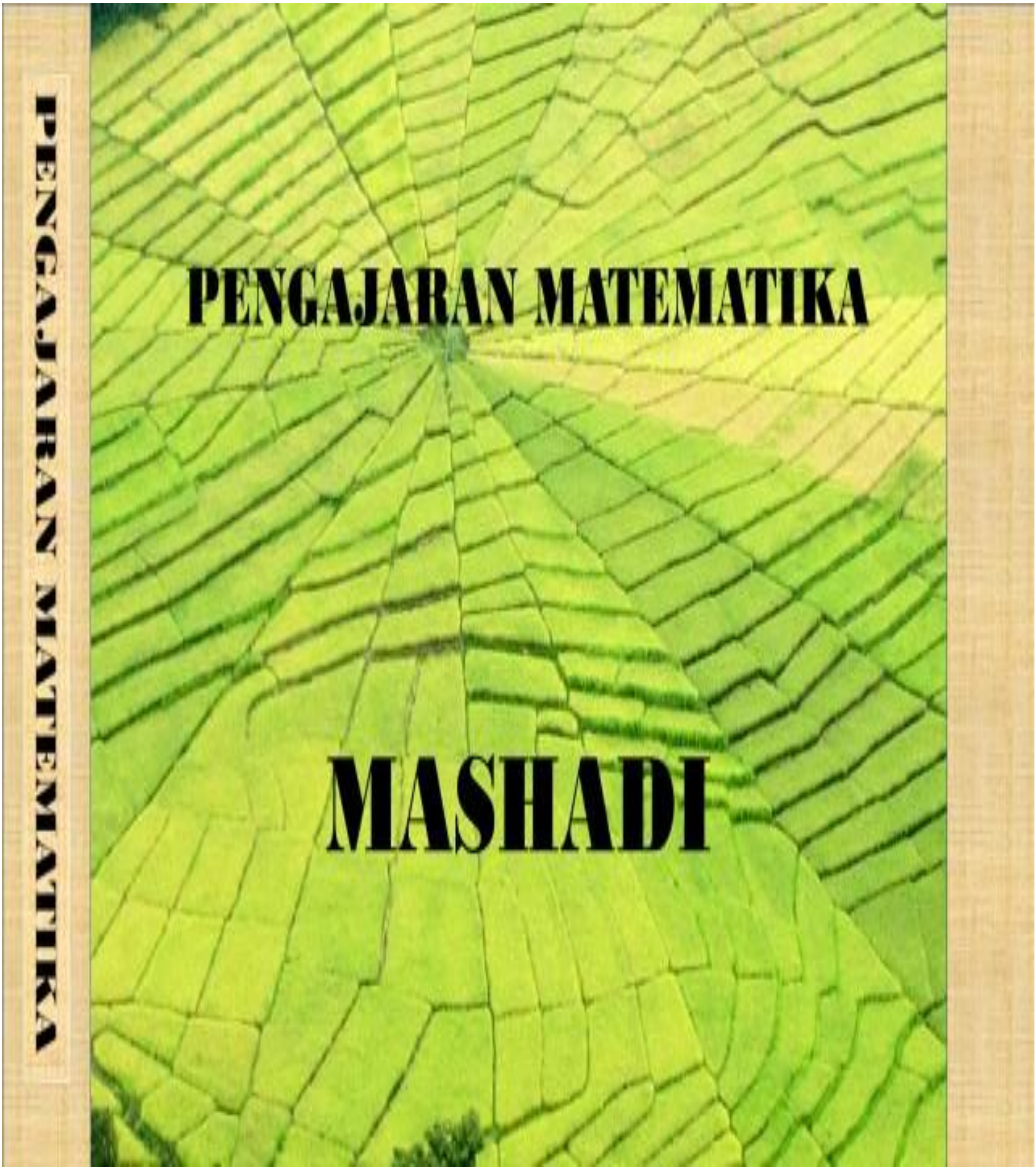

PENGAJARAN MATEMATIKA
PENGAJARAN MATEMATIKA
MASHADI

KATA PENGANGAR

Dalam berbagai proses pembelajaran, sering pengajar hanya mengajarkan kepada pelajar yaitu bagaimana mengitung suatu nilai dari suatu rumus. Jarang sekali para pengajara menjelaskan kepada pelajar dari mana datangnya rumus tersebut dan apa makna dari rumus tersebut. Akibat dari proses tersebut maka belajar matematika tidak obahnya seperti gabungan belajar sejarah dan berhitung, padahal nama mata pelajarannya matematika. Sehingga dari proses seperti itu tidak sedikit pelajar yang merasa bosan belajar matematika. Padahal dipihak lain sulit orang hidup tanpa matematika dan dunia tidak akan berkembang tanpa matematika.

Dalam buku ini diberikan berbagai cara dalam menemukan suatu formula (rumus) selain dari pada itu juga diberikan apa makna dari rumus tersebut dan apa sebenarnya yang dikerjakan oleh pelajar dalam menggunakan rumus tersebut. Seperti contoh, hampir semua pelajar SMA dan mahasiswa sangat terampil dalam menghitung Determinat suatu matrik, akan tetapi sangat aneh, mereka tidak tau apa arti dari determinat tersebut, dari mana dating rumusnya, serta hasil determinat itu sendiri menyatakan apa ????? tidak satupun penjelasan yang diberikan dengan mudah dalam berbagai buku yang mengajarkan tentang matrik. Hal lain misalnya selalu kita mengatakan sin α adalah perbandingan sisi dihadapan dibagi sisi miring. Bagaimana kalau semua sisi dari segitiga itu miring, yang mana yang mau disebut sisi miring. Atau waktu menghitung sin (180 - α) yang tidak lain adalah sin α. Carilah sisi dihadapan sudut (180 - α), apakah ada. Hal seperti ini perlu pemahaman dan pendefinisian yang baku dan baik.

Maka dalam buku ini hal itu dijelaskan dengan baik dan pembaca dibimbing untuk memahaminya serta pembaca juga dibimbing untuk melakukan proses pembuktian dan penemuan rumusnya. Selain itu dalam berbagai teorema juga diberikan berbagai alternatif pembuktiannya. Buku ini dibuat dengan tujuan agar guru/dosen dalam mengajarkan suatu topik apalagi dalam memperkenalkan suatu rumus, tidak hanya sekedar menyebutkan rumusnya selanjutnya memberikan contoh bagaimana menggunakannya. Sehingga perlu beberapa perhatian dari para pembaca untuk dapat memahami tujuan dari buku ini agar proses pembelajaran dapat berjalan dengan menyenangkan dan tujuan pembelajaran dapat dicapai dengan baik.

Untuk Guru/Dosen

Perlu diperhatikan bahwa dalam buku ini ada bukti teorema atau datangnya suatu rumus yang dibuktikan atau dijelaskan secara lansung. Akan tetapi cukup banyak rumus dan teorema yang diberikan hanya langkah pembuktiannya. Maka perlu diperhatikan :

i. Dalam memulai menjelaskan suatu topik, pengajar terlebih dahulu mestilah menjelaskan makna dan konsep dari definisi tersebut, misalnya tidak sedikit kita yang kabur akan definisi dari sinus dan kosinus serta salah kaprah dalam menjelaskan sin (180 - α) yang nilainya tidak lain adalah sama dengan sin α.
ii. Untuk teorema yang diberikan bukti secara lansung itu adalah bukti teorema yang terdapat dalam berbagai buku teks, maka bimbinglah pelajar untuk memahaminya.
iii. Untuk teorema yang diberikan langkah pembuktiannya, jangan sesekali pengajar menyebutkan/atau menurunkan pembuktiannya, akan tetapi ajak pelajar untuk menemukannya dan jadikan langkah pembuktian tersebut sebagai acuan saja, sehingga diharapkan daya kreatifitas dan inovatif dari pelajar dapat bekembang dengan baik.
iv. Untuk teorema yang diberikan interpretasi geometrisnya baik secara bertahap atau lansung, maka yang perlu dilakukan adalah membimbing pelajar untuk melakukan langkah pembuktian sesuai dengan interpretasi geometris yang diberikan.
v. Untuk kasus materi geometri, sebaiknya pengajar terlebih dahulu membimbing pelajar untuk mengkontruksi geometris dari teorema yang diberikan.

Selain ke empat point di atas, juga diberikan berbagai alternatif dalam membuktikan suatu rumus, maka sebaiknya pengajar hanya menjelaskan salah satu alternatif bukti. Sedangkan untuk alternatif yang lain dapat disuruh pelajar secara mandiri atau berkelompok mencoba membuktikannya dengan mengacu kepada langkah pembuktian yang diberikan. Perlu diperhatikan langkah yang diberikan hanyalah alternatif, artinya tidak mutlak langkah yang diberikan itu yang mesti diikuti.

Untuk Pelajar

Jangan pernah menghapal suatu rumus, yang perlu dilakukan adalah bagaimana menemukan rumus tersebut. Karena itu merupakan indikator pertama dalam setiap bahan ajar. Kemudian pahamilah maksud dari konsep tersebut dengan baik dan jangan lupa memperhatikan hal-hal berikut ini

i. Dalam proses penemuan suatu rumus, ikutilah langkah yang diberikan, kemudian setelah beberapa langkah lakukan perumuman dan ambilah kesimpulan kemudian tanyakan ke guru/dosen anda tentang kebenaran kesimpulan yang anda peroleh.
ii. Ikuti langkah pembuktian yang diberikan, akan tetapi sebaiknya itu hanya di-acu jika anda tidak punya ide untuk menurunkannya. Ingat langkah yang diberikan dapat anda lakukan dengan cara lain.
iii. Untuk kasus geometri, sebelum membuktikan teorema, maka anda sangat disarankan terlebih dahulu membuat gambarnya atau interpretasi geometrisnya. Sedapat mungkin lakukan juga untuk kasus diluar geometri. Lihat contoh penemuan determinat dan Teorema Nilai Rata-rata.
iv. Kerjakan sebanyak mungkin problem solving untuk meningkatkan pemahaman anda.

Pada dasarnya buku ini dapat dipahami oleh semua murid SMA/MA dan SMK serta Mahasiswa Matematika. Akan tetapi buku ini lebih ditujukan kepada mahasiswa S-2 Matematika dengan bidang minat Pengajaran Matematika. Dengan harapan, jika mereka nantinya mengajar di tingkat sekolah menengah dapat menerapkan cara yang diberikan dalam buku ini dalam melakukan proses pembelajaran.

Tidak ada yang sempurna, kecuali yang datang dari Allah, maka demi perbaikan pada edisi selanjutnya, kami dengan senang hati menerima kritikan positip dan masukan dari semua pihak.

Salam
Penulis

Mashadi

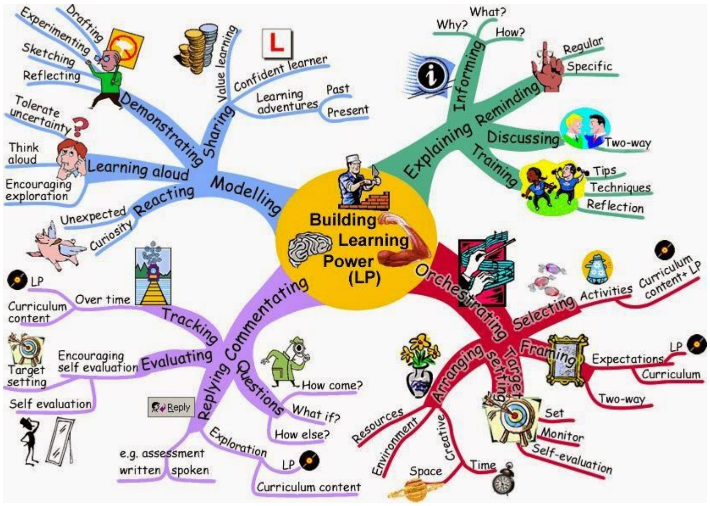
DAFTAR ISI

Daftar Pustaka
Daftar Istilah (Glosarium)
Daftar Simbol

Guru adalah profesi yang luar biasa mulia diantara profesi yang lain. Dengan kesabaran dan keprofesinalannya seorang guru berusaha mentransfer segala apa yang dimilikinya kepada anak didik tanpa lelah, setiap hari dan setiap saat. Seorang guru senantiasa ditruntut untuk melakukan pembaharuan dalam melaksanakan tugas dan perannya sebagai pendidik. Melalui penerapan dan pemodifikasian model pembelajaran yang sedang berkembang saat ini diharapkan anak didik menjadi subjek belajar yang baik dan generasi yang mandiri, mampu menciptakan sesuatu secara kreatif dan inovatif tanpa harus meniru bangsa lain. Tanpa mengurangi makna sebenarnya dari pembelajaran, marilah kita berusaha menciptakan pembelajaran yang menyenangkan, sehingga mampu mengubah *image* belajar sebagai suatu keterpaksaan menjadi suatu kebutuhan, dengan cara membawa peserta didik menikmati sisi-sisi keindahan dan kemenarikan dari suatu materi pelajaran yang sedang dipelajarinya dalam kemasan model pembelajaran yang tepat. Semoga kita termasuk guru yang dapat menciptakan kesenangan dalam belajar, bahkan kalau mungkin dapat menyebabkan anak didik kecanduan belajar. Hidup ini penuh pilihan, semoga pilihan kita sebagai guru adalah pilihan yang tepat untuk mengabdi kepada Negara (Amiiin).

B A B 1

MODEL PEMBELAJARAN



Kita sangat memaklumi, model pembelajaran itu sangat banyak sekali apalagi ditambah dengan inovasi dari berbagai peneliti bidang kependidikan. Tetapi konten dari model yang disampaikan dalam buku ini tidak bermaksud membahas berbagai model pembelajaran tersebut (karena itu ranahnya teman-teman bidang kependidikan). Akan tetapi adalah sebagai bahan renungan dasar saja untuk memahami isi buku ini yang bertujuan bagaimana caranya agar siswa memahami kontes bahan ajar dan berinovasi dalam mencari alternatif proses penemuan konsep dan alternatif proses pembelajaran dan berinovasi dalam mencari alternatif pembuktian.

B A B 1

MODEL PEMBELAJARAN

1.1. Sekilas Tentang Pengajaran

Sudah banyak model pembelajaran di kemukakan oleh berbagai ahli dengan berbagai bentuk variatif pengajaran yang dapat dilakukan di dalam kelas, akan tetapi mengapa kita masih mengeluh dengan hasil pembelajaran kita. Wajarkah kita memfonis siswa yang lemah. Sudahkah kita melakukan proses pembelajaran yang sesuai dengan tuntutan yang sebenarnya dan sesuai dengan kemampuan siswa/mahasiswa kita. Akan panjang pembicaraan untuk mendiskusikan hal tersebut. Akan tetapi perlu kita bertanya, pada saat kita mengajar, apakah kita hanya mengajarkan bahan ajar dengan melakukan penjelasan dari apa yang ada dalam buku teks saja ?. atau sudah berapa banyak inovasi proses pembelajaran yang kita lakukan agar perserta didik kita dapat memahami bahan ajar yang kita sampaikan dapat dengan mudah dipahami oleh perserta didik. Hal yang lebih tinggi lagi, sudahkah kita mencari pendekatan pengajaran yang berbeda dengan yang ada dalam buku teks, akan tetapi dapat lebih mudah dipahami oleh peserta didik ?.

Kedua pertanyaan di atas mustahil akan dapat dijawab tanpa memahami bahan ajar dengan sebaik mungkin. Inovasi apa yang dapat anda lakukan jika anda tidak menguasai dengan sempurna bahan ajarnya. Inilah yang menjadi permasalahan dasar bagai pengajaran kita saat ini terutama sampai tingkat sekolah menengah. Perlu kita sadari dengan betul bahwa tidak ada inovasi pembelajaran yang dapat dilakukan tanpa menguasai bahan ajar yang sempurna.

Karena inovasi pembelajaran juga tidak lepas dengan proses pengajaran, maka berikut ini sepintas akan dibahas sepintas tentang pengajaran secara umum. Banyak sekali buku-buku yang terkait model pengajaran memberikan masukkan tentang bagaimana seorang guru/dosen melakukan proses pengajaran. Akan tetapi proses pengajaran yang dianjurkan tersebut masih bersifat umum tidak khusus untuk bidang matematika. Sedangkan matematika dengan berbagai kerumitan dan kebutuhan penguasaan konsepnya, maka tidak dapat dilakukan dengan model pengajaran ilmu-ilmu lain, khususnya kalau dibandingkan dengan ilmu-ilmu social.

Berbagai model pengajaran yang dibicarakan dalam berbagai buku tersebut meliputi banyak aspek. Apakah itu aspek pembinaan, motivasi, keterampilan, penghapalan, pencapaian konsep, bentuk pengajaran, pengembangan diri dan lain sebagainya. Akan tetapi sedikit sekali buku yang membahas, bagaimana guru/dosen (dalam artian pengajar) melakukan inovasi pembelajaran untuk penguasaan konsep siswa/mahasiswa. Marilah kita lihat sepintas berbagai hal perlu diperhatikan dalam melakukan proses pembelajaran.,

- **Gaya, Model dan Keragaman Pengajaran**

Gaya-gaya dalam pengajaran biasanya meliputi, gaya profesi (gaya Individu), yang mencakup pola hapalan, variasi (perbedaan karakter) yang mana gara-gaya dalam pengajaran dan kemampuan belajar.

- **Belajar berfikir secara induktif**

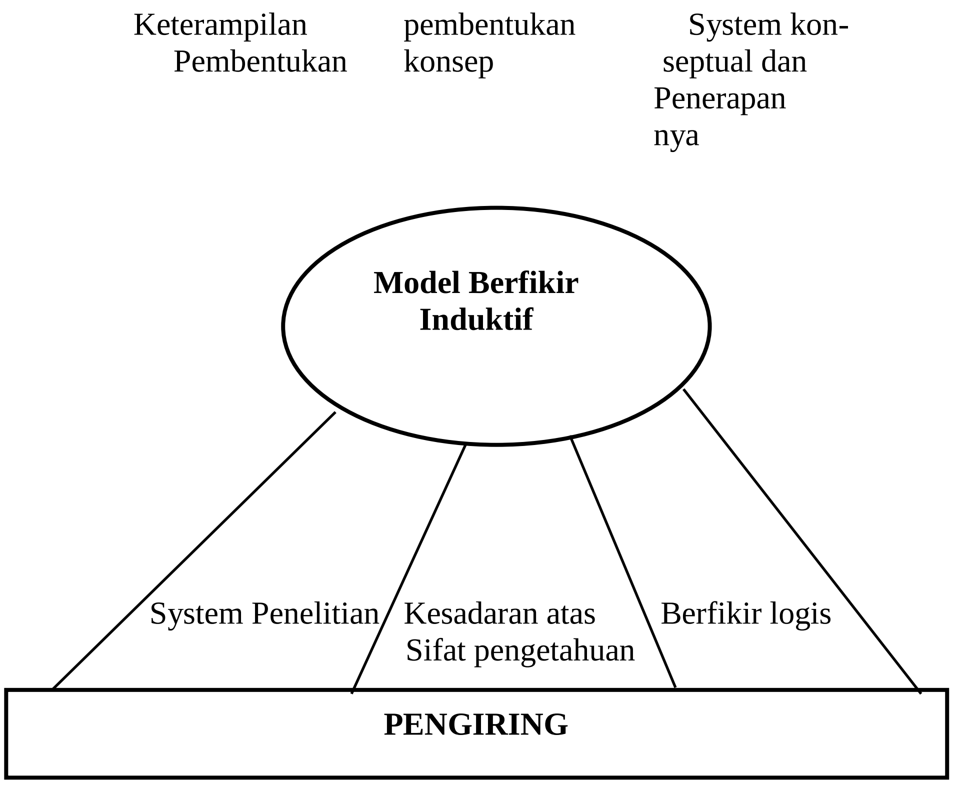
Berfikir secara induktif sebenarnya merupakan bawaan sejak lahir dan keberadaannya sudah abash. Ia hadir sebagai suatu kerja revolusioner, mengingat sekolah-sekolah saat ini telah memutuskan untuk mengajar dalam corak yang tidak abash dan sering menrongrong kapasitas bawaan sejak lahir.Proses belajar induktif membaha anak-anak untuk mengeksplorasi suatu bidang meteri sebagai suatu komunitas pemberajaran yang terlatih untuk menguasai bidang tersebut. Suatu hal yang sangat perlu diperhatikan disini adalah bahwa model pembelajaran dan pengajaran induktif dirancang untuk melatih siswa membuat konsep dan sekaligus untuk mengajarkan konsep-konsep dan cara penerapannya (generalisasi) pada mereka. Untuk bidang matematika model ini sangat baik untuk dikembangkan, karena akan membangun logika berfikir siswa. Perhatikan model pembelajaran induktif dari sisi intruksional dan pengirinya.

- **Pencapaian Konsep-Konsep**

Usaha awal yang diperlukan untuk pencapaian pencapaian konsep adalah mempertajam keterampilan keterampilah berfikir dasar. Yaitu penggolongan, pembentukan, dan penemuan konsep. Persoalan selanjutnya adalah ***menyusun strategi-strategi penemuan konsep*** (silakan dipelajaran bagaimana menyusun strategi-strategi penemuan konsep). Dan perhatikan skema berikut ini

INSTRUKSIONAL

Informasi, konsep, proses-proses konsep dan



- **Model Induktif Kata Bergambar**

Model pembelajaran ini lebih banyak digunakan untuk pengajaran bahasa dan bidang sejenis.

- Belajar dari Simulasi

Latihan dan melatih diri sendiri, itulah kata kunci belajar dari simulasi. Seberapa besar kita belajar dari quasi-realitas (simulasi) ? jawaan dari pertanyaan ini akan menjadi keputusan yang paling tepat. Simulasi memungkinkan kita untuk belajar dari kenyataan virtual, dimana kita dapat mengetahui secara langsung lingkungan dan masalah-masalah yang melampaui pengalaman yang kita lihat selama ini. Saat ini, simulasi-simulasi tersebut telah menjangkau cara-cara dalam penerbangan luar angkasa.

2.2. Model Pembelajaran

Berikut ini akan diberikan beberapa model pembelajaran yang lazim dilakukan oleh kebanyakan guru-guru / dosen didepan kelas. Model pembelajaran diartikan sebagai prosedur sistematis dalam mengorganisasikan pengalaman belajar untuk mencapai tujuan belajar. Jadi, sebenarnya model pembela-jaran memiliki arti yang sama dengan pendekatan atau strategi pembelajaran. Saat ini telah banyak dikembangkan berbagai macam model pembelajaran, dari yang sederhana sampai model yang agak kompleks dan rumit karena memerlukan banyak alat bantu dalam penerapannya.

Seorang guru/dosen diharapkan memiliki motivasi dan semangat pembaharuan dalam proses pembelajaran yang dijalaninya. Menurut Sardiman A. M. (2004 : 165), guru yang kompeten adalah guru yang mampu mengelola program belajar-mengajar. Mengelola di sini memiliki arti yang luas yang menyangkut bagaimana seorang guru mampu menguasai keterampilan dasar mengajar, seperti membuka dan menutup pelajaran, menjelaskan, menvariasi media, bertanya, memberi penguatan, dan sebagainya, juga bagaimana guru menerapkan strategi, teori belajar dan pembelajaran, dan melaksanakan pembelajaran yang kondusif. Pendapat serupa dikemukakan oleh Colin Marsh (1996 : 10) yang menya-takan bahwa guru harus memiliki kompetensi mengajar, memotivasi peserta didik, membuat model instruksional, mengelola kelas, berkomunikasi, merencanakan pembela-jaran, dan mengevaluasi. Semua kompetensi tersebut mendukung keberhasilan guru dalam mengajar. Setiap guru harus memiliki kompetensi adaptif terhadap setiap perkem-bangan ilmu pengetahuan dan kemajuan di bidang pendidikan, baik yang menyangkut perbaikan kualitas pembelajaran maupun segala hal yang berkaitan dengan peningkatan prestasi belajar peserta didiknya.

2.2.1. Model Pembelajaran SCL

Ada beberapa model pembelajaran yang dapat diterapkan pada saat ini yang berbasis pada *Student Centered Learning* (SCL). Model SCL sangat digemari karena berbagai alasan, diantaranya:

1. diterimanya pendekatan konstruktivisme dalam pembelajaran;
2. adanya pergeseran paradigma pengajaran ke pembelajaran;
3. adanya pergeseran dari *teacher oriented* ke *student oriented;*
4. adanya pergeseran dari orientasi hasil ke proses pembelajaran;
5. diterimanya konsep pendidikan sepanjang hayat;
6. diterimanya konsep *multiple intelligence;*
7. semakin mudah dan murahnya akses informasi melalui jaringan dan perangkat TI;

8. tersedianya buku-buku referensi yang mudah diperoleh. .

Sangat perlu diingat bahwa sebaik apapun model pembelajaran tersebut secara teoretik, tetapi keberhasilannya dalam membantu menciptakan pembelajaran yang kondusif bagi peserta didik sangat tergantung pada kepiawaian guru dalam menerapkannya. Penelitian di Jepang menunjukkan bahwa keunggulan pembelajaran di Jepang terutama disebabkan oleh peranan guru yang mampu memilih strategi pembelajaran yang efektif termasuk di dalamnya memilih model pembelajaran (Aleks Masyunis, 2000). Guru memberikan warna dan nilai terhadap model yang diterapkan.

Berikut ini akan disajikan beberapa contoh model pembelajaran yang berbasis pada SCL. Contoh suatu model tidak harus ditiru 100% oleh guru, tetapi guru harus dapat memodifikasi sesuai dengan karakteristik peserta didik dan fasilitas yang tersedia di sekolah. Dengan demikian penerapan model pembelajaran tidak membatasi kreativitas guru dalam menjalankan tugasnya, tetapi tetap mampu mengikuti perkembangan dunia pendidikan yang digelutinya.

Berbicara mengenai proses pembelajaran di sekolah seringkali membuat kita kecewa, apalagi bila dikaitkan dengan pemahaman peserta didik terhadap materi ajar. Mengapa demikian? Ya, karena kenyataan menunjukkan banyak peserta didik mampu menyajikan tingkat hafalan yang baik terhadap materi ajar yang diterimanya, tetapi mereka tidak memahaminya. Sebagian peserta didik tidak mampu menghubungkan antara apa yang mereka pelajari dengan bagaimana pengetahuan tersebut akan dipergunakan/ dimanfaatkan. Selain itu, peserta didik kesulitan memahami konsep yang diajarkan hanya dengan metode ceramah, apalagi jika konsep yang diajarkan sangat abstrak. Padahal mereka sangat butuh untuk dapat memahami konsep-konsep yang berhubungan dengan lingkungan dan masyarakat pada umumnya dimana mereka akan hidup dan bekerja.

Banyak pertanyaan muncul di diri guru yang berkeinginan untuk membantu masalah yang dihadapi peserta didiknya tersebut, seperti:

1. Bagaimana menemukan cara terbaik untuk menyampaikan berbagai konsep yang diajarkan di dalam mata pelajaran tertentu, sehingga semua peserta didik dapat menggunakan dan mengingatnya lebih lama konsep tersebut ?
2. Bagaimana setiap bagian mata pelajaran dipahami sebagai bagian yang saling berhubungan dan membentuk satu pemahaman yang utuh ?

3. Bagaimana seorang guru dapat berkomunikasi secara efektif dengan peserta didiknya yang selalu bertanya-tanya tentang alasan dari sesuatu, arti dari sesuatu, dan hubungan dari apa yang mereka pelajari ?
4. Bagaimana guru dapat membuka wawasan berpikir yang beragam dari peserta didiknya, sehingga mereka dapat mempelajari berbagai konsep dan mampu mengaitkannya dengan kehidupan nyata, sehingga dapat membuka berbagai pintu kesempatan selama hidupnya ?.

Semua pertanyaan itu merupakan tantangan bagi guru untuk selalu berusaha dan berusaha agar dapat menemukan solusi yang paling tepat untuk mengatasinya. Pengalaman di negara lain menunjukkan bahwa minat dan prestasi peserta didik dalam bidang matematika, sains, dan bahasa meningkat secara drastis pada saat:

1. Mereka dibantu untuk membangun keterkaitan antara informasi (pengetahuan) baru dengan pengalaman (pengetahuan lain) yang telah mereka miliki atau mereka kuasai.
2. Mereka diajarkan bagaimana mereka mempelajari konsep, dan bagaimana konsep tersebut dapat digunakan di luar kelas.
3. Mereka diperkenankan untuk bekerja secara bersama-sama (*cooperative)*.

Hal itulah yang merupakan jiwa dan inti pokok dari penerapan model pembelajaran berbasis CTL.

2.2.2. Model Pembelajaran Berbasis Pendekatan CTL

Pendekatan CTL (Contextual Teaching Learning) adalah konsep belajar yang membantu guru mengaitkan antara materi yang diajarkannya dengan situasi dunia nyata peserta didik, dalam artian yang luas, pembelajaran CTL tidak hanya berdasarkan situasi dunia nyata peserta didik, akan tetapi juga berdasarkan pendekatan materi yang sangat mudah dipahami oleh peserta didik. Dalam kontek situasi dunia nyata, guru mesti dapat mendorong peserta didik membuat hubungan antara pengetahuan yang dimilikinya dengan penera-pannya dalam kehidupan mereka sehari-hari, dengan melibatkan tujuh komponen utama pembelajaran efektif, yakni: konstruktivisme *(Constructivism),* bertanya (*Questinoning*), menemukan *(Inquiry),* masyarakat belajar *(Learning Community),* pemodelan *(Modeling),* refleksi (*reflection*), dan penilaian sebenarnya (*Authentic Assessment)* (Johnson, 2002). Tidak semua masalah dalam matematika dapat didekati dengan kehidupan peserta didik. Oleh karena itu guru juga sangat perlu melakukan pendekatan pembelajaran dengan memperkenalkan suatu konsep dengan menggunakan materi yang lebih mudah dipahami oleh para peserta didik tersebut. Contoh sederhana. Dalam perkuliahan geometri, bagaimana mungkin guru dengan baik bisa menjelaskan Teorema Carnot's I. Yaitu kesamaan yang dapat dilahirkan dari sebarang titik yang diambil dalam suatu segitiga. Akan tetapi mulai kelas IV SD siswa sudah belajar yang namanya rumus Pythagoras dan sangat dipahami oleh siswa dengan baik. Maka guru/dosen dapat memperkenalkan teorema Carnot's tersebut kepada siswa hanya dengan menggunakan teorema Pythagoras.

Penggunaan CTL dengan pendekatan lingkungan peserta didik, maka sesuai dengan faktor kebutuhan individual peserta didik, maka untuk dapat meng-implementasikan pembelajaran kontekstual guru seharusnya:

- Menyediakan lingkungan yang mendukung pembelajaran mandiri (*self-regulated learning*) dengan 3 karakteristik umumnya (kesadaran berpikir, penggunaan strategi dan motivasi berkelanjutan).
- Menggunakan teknik bertanya (*questioning*) yang meningkatkan pembelajaran peserta didik, perkembangan pemecahan masalah dan keterampilan berpikir tingkat tinggi.
- Mengembangkan pemikiran bahwa peserta didik akan belajar lebih bermakna jika ia diberi kesempatan untuk bekerja, menemukan, dan mengontruksi sendiri pengetahuan dan keterampilan baru (*contructivism*).
- Memfasilitasi kegiatan penemuan (*inquiry*) agar peserta didik memperoleh pengeta-huan dan keterampilan melalui penemuan sendiri (bukan hasil mengingat sejumlah fakta).
- Mengembangkan sifat ingin tahu peserta didik melalui pengajuan pertanyaan (*questioning*).
- Menciptakan masyarakat belajar (*learning community*) dengan membangun kerjasama antar peserta didik.
- Memodelkan (*modellin*g) sesuatu agar peserta didik dapat menirunya untuk memperoleh pengetahuan dan keterampilan baru.
- Mengarahkan peserta didik untuk merefleksikan tentang apa yang sudah dipelajari.
- Menerapkan penilaian autentik (*authentic assessment*).

2.2.3. Model Pembelajaran Berbasis Pendekatan PAIKEM

a. Pembelajaran Aktif

Sebelum kita membahas lebih lanjut tentang pembelajaran aktif, marilah kita lihat apa sebenarnya yang mendasari pembelajaran aktif tersebut. Mengapa siswa tidak hanya cukup dengan membaca dan memahami atau dengan melihat dan mendengan maka perhatikan grafik berikut yang merupakan purata tingkat pemahaman siswa dalam berbagai aktifitas.

Anak didik belajar, 10% dari apa yang dibaca, 20% dari apa yang didengar, 30% dari apa yang dilihat, 50% dari apa yang dilihat dan didengar, 70% dari apa yang dikatakan, dan 90% dari apa yang dikatakan dan dilakukan (Sheal, Peter, 1989). Pernyataan tersebut nampak sejalan dengan yang diharapkan dalam Kurikulum 2006, yang menginginkan peserta didik mencapai suatu kompetensi tertentu yang dapat diko-munikasikan dan ditampilkan.

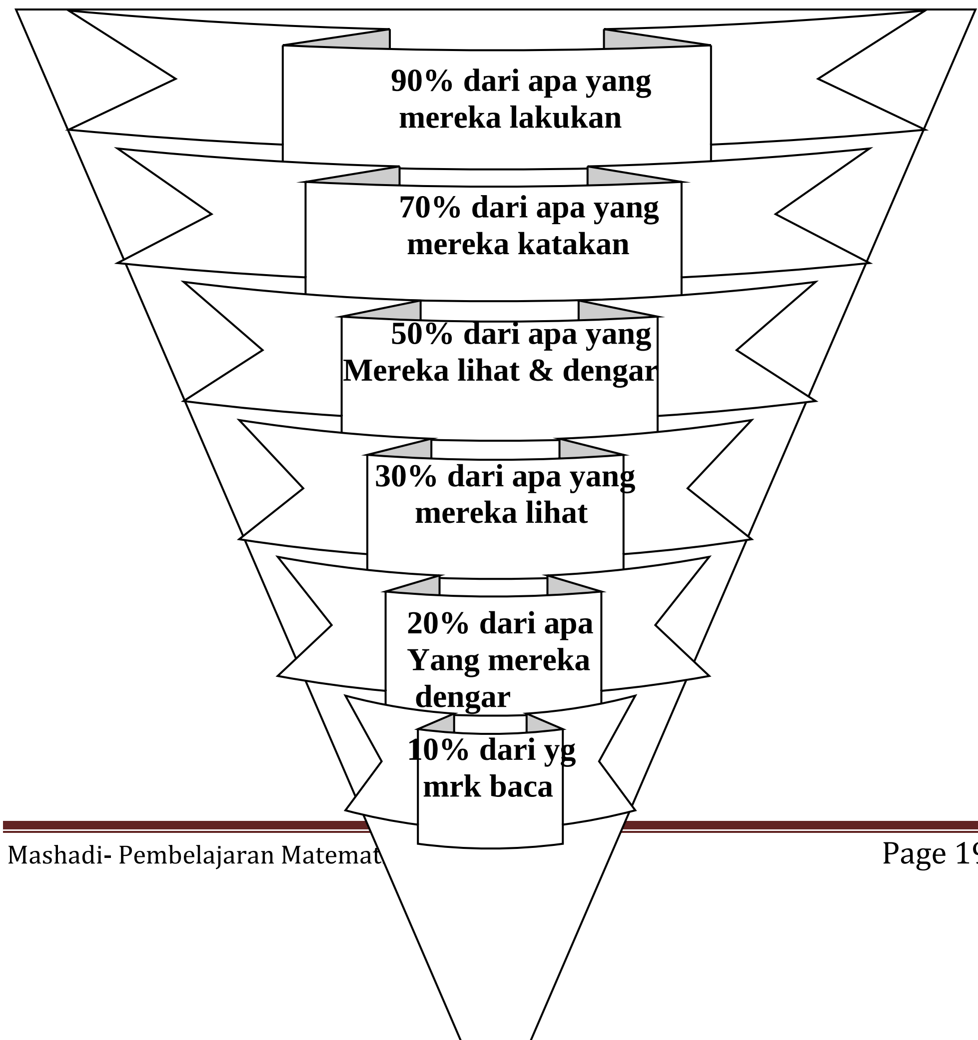
Kurikulum terbaru kita menginginkan adanya perubahan pembelajaran dari *teacher centered* ke *student centered*. Perubahan ini tidak semudah diucapkan, karena pola pembelajaran kita sudah terbiasa dengan cara guru menjelaskan dan menyampaikan informasi, sedangkan peserta didik lebih banyak menerima. Namun bukan berarti kita pesimis dengan perubahan itu, tetapi mungkin pencapaiannya memerlukan waktu. Bagaimanapun *habits* yang sudah terbentuk lama, untuk mengubahnya perlu kesung-guhan dan kemauan tinggi dari semua komponen yang terlibat dalam pembelajaran.

Pembelajaran aktif artinya pembelajaran yang mampu mendorong anak didik aktif secara fisik, sosial, dan mental untuk memahami dan mengembangkan kecakapan hidup menuju belajar yang mandiri, atau pembelajaran yang menekankan keaktifan anak didik untuk mengalami sendiri, berlatih, beraktivitas dengan menggunakan daya pikir, emosi-onal, dan keterampilannya. Melalui pembelajaran aktif diharapkan anak didik akan lebih mampu mengenal dan mengembangkan kapasitas belajar dan potensi yang dimilikinya. Selain itu, mereka secara penuh dan sadar dapat menggunakan potensi sumber belajar yang terdapat di sekitarnya, lebih terlatih untuk berprakarsa, berpikir secara sistematis, kritis, tanggap, sehingga dapat menyelesaikan masalah sehari-hari melalui penelusuran informasi yang bermakna baginya.

Guru yang aktif adalah guru yang memantau kegiatan belajar anak didik, memberi umpan balik, mengajukan pertanyaan yang menantang, dan memperbanyak gagasan anak didik untuk dapat dimunculkan. Sedangkan anak didik yang aktif adalah mereka yang sering bertanya, mengemukakan pendapat, mempertanyakan gagasan sendiri/orang lain, dan aktif melakukan suatu kegiatan belajar (Mel Silberman, 2002).

Sayangnya, sebagian guru kurang mampu mengajukan pertanyaan yang menan-tang kepada anak didik, sehingga pembelajaran aktifpun jarang tercipta. Hal ini kemung-kinan disebabkan berbagai hal, seperti alasan klise karena dikejar waktu untuk menye-lesaikan materi hingga tak sempat berpikir ke arah itu, ketidaksiapan guru itu sendiri untuk membuat dan menjawab pertanyaan menantang. Padahal dengan pertanyaan menantang sudah pasti anak didik kita terpacu dan termotivasi untuk mencari jawaban dan itu berarti aktivitas belajar mereka semakin tinggi dan wawasan pengetahuannya akan selalu ber-tambah dari hari ke hari.

Purata tingkat pemahaman peserta didik dalam berbagai aktifitas, bahwa pelajar akan memahami



b. Pembelajaran Inovatif dan Kreatif

Setiap manusia secara normal pasti memiliki ketertarikan dan rasa ingin tahu yang tinggi terhadap sesuatu yang baru. Demikian juga anak didik, jika dalam pembelajaran disuguhi sesuatu yang baru pasti akan timbul semacam energi baru dalam mengikuti pelajaran. Dengan kata lain, sesuatu yang baru mampu bertindak seperti magnet yang menarik minat dan motivasi anak didik untuk mengikutinya.

Pembelajaran inovatif adalah pembelajaran dengan memperkenalkan sesuatu yang berbeda yang belum dialami dari sebelumnya. Sesuatu yang baru tidak identik dengan sesuatu yang mahal. Apa yang nampaknya sepele, bisa saja mampu membuat pembelajaran lebih hidup hanya karena sang guru mampu melakukan inovasi. Dalam penciptaan pembelajaran inovatif yang terpenting adalah kemauan dan keinginan guru untuk membuat belajar menjadi menarik untuk diikuti dan menghilangkan kebosanan peserta didik dalam belajar.

Kreatif adalah cara berpikir yang mengajak kita keluar dan melepaskan diri dari pola umum yang sudah terpateri dalam ingatan. Pembelajaran kreatif adalah pembela-jaran yang mengajak anak didik untuk mampu mengeluarkan daya pikir dan daya karsanya untuk menciptakan sesuatu yang di luar pemikiran orang kebanyakan. Kreatif merupakan kata yang berasal dari bahasa Inggris *to create* yang dapat diurai : C (*combine*), R (*reverse*), E (*eliminate*), A (*alternatif*), T (*twist*), E (*elaborate*). Jadi, seorang anak didik yang berpikir kreatif dalam benaknya berisi pertanyaan : dapatkan saya mengkombinasi / menambah, membalik, menghilangkan, mencari cara / bahan lain, memutar, mengelaborasikan sesuatu ke dalam benda yang sudah ada sebelumnya ?

Melepaskan diri dari sesuatu yang sudah terpola dalam pikiran kita bukanlah pekerjaan yang mudah. Beberapa hal yang mampu membangkitkan pikiran kita untuk menjadi kreatif antara lain : berfantasi atau mengemukakan gagasan / ide yang tidak umum, terkesan “nyleneh”, berada pada satu gagasan / ide untuk beberapa saat, berani mengambil resiko, peka terhadap segala keajaiban, penasaran terhadap suatu kebenar-an, banyak membaca artikel penemuan yang membuatnya kagum dan terheran-heran.

Berpikir kreatif dapat diawali dengan bercanda dan berteka-teki tentang sesuatu, karena berpikir kreatif berlangsung ketika otak dalam keadaan santai. Seorang pemikir kreatif suka mencoba gagasan/ide yang berkebalikan dengan yang dipikirkan oleh orang banyak. Mereka suka melihat sisi-sisi lain yang baginya lebih menarik untuk dicermati dan dipikirkan. Kadang-kadang orang yang berpikir lurus tidak akan dapat “berteman baik” dengan orang yang berpikir kreatif, karena menganggap ia sebagai orang aneh.

Untuk dapat menciptakan pembelajaran inovatif maupun kreatif diperlukan tiga sifat dasar yang harus dimiliki anak didik maupun guru, yaitu peka, kritis, dan kreatif terhadap fenomena yang ada di sekitarnya. Peka artinya orang lain tidak dapat melihat keterkaitannya dengan konsep yang ada dalam otak, tetapi kita mampu menangkapnya sebagai fenomena yang dapat dijelaskan dengan konsep yang kita miliki. Kritis artinya fenomena yang tertangkap oleh mata kita mampu diolah dalam pikiran hingga memunculkan berbagai pertanyaan yang menggelitik kita untuk mencari jawabannya. Kreatif artinya dengan kepiawaian pola pikir dan didasari pemahaman yang mendalam tentang konsep-konsep tertentu lalu kita berusaha menjelaskan/menciptakan suatu aktivitas yang mampu menjelaskan fenomena tersebut kepada diri sendiri atau orang lain.

Guru yang kreatif dan inovatif adalah guru yang mampu mengembangkan kegiatan yang beragam di dalam dan di luar kelas, membuat alat bantu/media sederhana yang dapat dibuat sendiri oleh anak didiknya. Demikian pula anak didik yang kreatif dan inovatif mampu merancang sesuatu, menulis dan mengarang, dan membuat refleksi terhadap semua kegiatan yang dilakukannya.

c. Pembelajaran Efektif

Efektif memiliki makna tepat guna, artinya sesuatu yang memiliki efek/pengaruh terhadap yang akan dicapai/dituju. Pembelajaran efektif artinya pembelajaran yang mampu mencapai kompetensi yang telah dirumuskan, pembelajaran dimana anak didik memperoleh pengetahuan, keterampilan, dan sikap. Pembelajaran dikatakan efektif jika terjadi perubahan pada aspek kognitif, afektif, dan psikomotor.

Adapun ciri-ciri pembelajaran efektif diantaranya tercapainya tujuan yang diharap-kan, anak didik menguasai keterampilan yang ditargetkan. Belajar dan mengajar akan efektif jika anak didik aktif dan semua aktivitas pembelajaran berpusat pada anak didik. Hal ini karena pembelajaran yang berpusat pada anak didik akan mampu menimbulkan minatnya dan secara tidak langsung mereka memahami konsep dan kaitannya dengan aspek-aspek kehidupan.

d. Pembelajaran Menyenangkan (*Joyful Learning*)

Saat ini di berbagai negara sedang trend dan semangat mengembangkan *joyful learning* dan *meaningful learning,* yaitu dengan menciptakan kondisi pembelajaran sede-mikian rupa sehingga anak didik menjadi betah di kelas karena pembelajaran yang dijalani menyenangkan dan bermakna. Mereka merasakan bahwa pembelajaran yang dijalani memberikan perbedaan dalam basis pengetahuan yang ada di pikirannya, berbeda dalam memandang dunia sekitar, dan merasakan memperoleh sesuatu yang lebih dari apa yang telah dimilikinya selama ini. Sebagai bangsa yang ingin maju dalam era globalisasi yang kompetitif ini tentunya kita juga ingin merasakan pembelajaran yang demikian.

Semua mata pelajaran dapat dibuat menjadi menyenangkan, tergantung bagai-mana niat dan kemauan guru untuk menciptakannya. Pembelajaran yang dikemas dalam situasi yang menyenangkan, jenaka, dan menggelitik sangat diharapkan oleh anak didik saat ini yang sangat rawan stres karena saratnya materi ajar yang harus dikuasai. Penelitian terhadap beberapa anak-anak sekolah di dunia yang diadakan UNESCO menunjukkan sebagian dari mereka menginginkan belajar dengan situasi yang menyenangkan (Dedi Supriadi, 1999).

Pembelajaran menyenangkan artinya pembelajaran yang interaktif dan atraktif, sehingga anak didik dapat memusatkan perhatian terhadap pembelajaran yang sedang dijalaninya. Penelitian menunjukkan bahwa ketika seorang guru menjelaskan suatu materi tanpa ada selingan dan anak didik hanya mendengarkan, melihat, dan mencatat, maka perhatian dan konsentrasi mereka akan menurun secara draktis setelah 20 menit. Keadaan ini semakin parah jika guru tidak menyadari dan pembelajaran hanya berjalan monoton dan membosankan (Tjipto Utomo dan Kees Ruijter, 1994). Lebih lanjut dikemukakan, keadaan ini dapat diatasi apabila guru menyadari lalu mengubah pembelajarannnya menjadi menyenangkan dengan cara memberi selingan aktivitas atau humor. Tindakan ini secara signifikan berpengaruh meningkatkan kembali perhatian dan konsentrasi anak didik yang relatif besar.

Pembelajaran menyenangkan adalah pembelajaran yang membuat anak didik tidak takut salah, ditertawakan, diremehkan, tertekan, tetapi sebaliknya anak didik berani berbuat dan mencoba, bertanya, mengemukakan pendapat / gagasan, dan mempertanya-kan gagasan orang lain. Menciptakan suasana yang menyenangkan tidaklah sulit, karena kita hanya menciptakan pembelajaran yang relaks (tidak tegang), lingkuangan yang aman untuk melakukan kesalahan, mengaitkan materi ajar dengan kehidupan mereka, belajar dengan balutan humor, dorongan semangat, dan pemberian jeda berpikir. Dalam belajar guru harus menyadari bahwa banyak kata ”aku belum tahu” akan muncul dan kata ”aku tahu” sedikit muncul, karena mereka memang dalam tahap belajar. Demikian pula guru harus menyadari bahwa otak manusia bukanlah mesin yang dapat disuruh berpikir tanpa henti, sehingga perlu pelemasan dan relaksasi.

Sesuai dengan pendapat Ausubel bahwa belajar akan bermakna jika peserta didik dapat mengaitkan konsep yang dipelajari dengan konsep yang sudah ada dalam struktur kognitifnya, dan pendapat Bruner yang menyatakan belajar akan berhasil lebih baik jika selalu dihubungkan dengan kehidupan orang yang sedang belajar. Secara logika dapat dipahami, bahwa kita pasti akan belajar serius bila yang dipelajari ada kaitannya dengan kehidupan sehari-hari dan kata-kata atau kalimat yang didengar sudah *familiar* di kepala kita. Melalui *joyful learning* diharapkan ada perbaikan praktik pembelajaran ke arah yang lebih baik. Perubahan ini tidak harus terjadi secara draktis, perlahan-lahan tetapi pasti. Perbaikan proses sangat penting agar keluaran yang dihasilkan benar-benar berkualitas.

Seperti diketahui, otak kita terbagi menjadi dua bagian, yaitu kanan dan kiri. Terkadang dalam dunia pendidikan kita lupa akan pentingnya mengembangkan otak sebelah kanan. Secara umum hanya otak kiri yang menjadi sasaran pengembangan, terutama untuk ilmu eksakta. Otak sebelah kanan adalah bagian yang berkaitan dengan imajinasi, estetika, intuisi, irama, musik, gambar, seni. Sebaliknya otak sebelah kiri berkaitan dengan logika, rasio, penalaran, kata-kata, matematika, dan urutan. Untuk menepis hal itu, sebenarnya kita dapat tunjukkan bahwa ilmu apapun mampu digunakan sebagai bahan untuk mengembangkan otak sebelah kanan, diantaranya dengan cara memahami dan menghafal konsep melalui puisi, nyanyian, maupun permainan teka-teki.

Otak kita adalah bagian tubuh yang paling rawan dan sensitif. Otak sangat menyukai hal-hal yang bersifat tidak masuk akal, ekstrim, penuh warna, lucu, multisenso-rik, gambar 3 dimensi (hidup), asosiasi, imajinasi, simbol, melibatkan irama / musik, dan nomor/urutan. Berdasarkan hal ini, maka kita sebagai pendidik dapat merancang apa yang sebaiknya kita berikan kepada anak didik agar otak mereka menyukainya. Sebagai contoh mengemas pembelajaran dengan menggunakan puisi atau lagu untuk menyimpul-kan materi yang diajarkan, atau melalui teka-teki jenaka untuk mengevaluasi sejauhmana mereka menguasai materi yang diajarkan.

2.2.4. Model Pembelajaran dengan Pendekatan Kontekstual Berbasis Kontroversi Isu

Masyarakat kita adalah masyarakat yang heterogen dalam hal latar belakang budaya, pendidikan, status ekonomi, bahasa, agama, dan lain-lain. Latar belakang pendi-dikan yang berbeda akan mempengaruhi cara berpikir dan menerima informasi yang berkembang di masyarakat. Mulai dari informasi yang berkaitan dengan ekonomi, politik, sosial, budaya, ilmu pengetahuan dan teknologi. Apalagi saat ini kita berada di era globalisasi dimana kemajuan di bidang TIK demikian canggih, sehingga semua informasi dengan mudah dan cepat dapat diterima masyarakat.

Bagi masyarakat dengan latar belakang pendidikan yang relatif rendah akan menelan mentah-mentah segala informasi yang dilihat dan diterima dari berbagai media, karena keterbatasan ilmu pengetahuan yang dimiliki. Namun bagi guru yang termasuk dalam golongan intelektual tentunya tidak berpikir sama dengan mereka, karena guru memiliki bekal ilmu pengetahuan yang relatif cukup untuk dapat mencerna dan menelaah/ mengkaji kebenaran informasi yang masih bersifat isu tersebut.

Ball (1988) menyatakan bahwa penguasaan guru terhadap bidang ilmunya meru-pakan sesuatu yang fundamental agar peserta didik dapat dibantu dalam mempelajari bidang ilmu tersebut. Menurut Amy J. Phelps & Cherin Lee (2003), guru akan dapat memberikan pengetahuan kepada peserta didiknya dalam suatu prosedur yang sederhana dan tepat bila ia menguasai materi yang akan diajarkan dengan baik. Hal ini sejalan dengan kebijakan Pemerintah tentang Standar Nasional Pendidikan Pasal 28 PP RI No 19/2005 bahwa seorang guru harus memiliki empat jenis kompetensi, diantaranya kompetensi profesional. Keprofesionalan guru harus ditunjukkan melalui aktivitas penggalian dan pengembangan wawasan bidang ilmu yang ditekuninya secara terus menerus tanpa batas waktu dan ruang. Termasuk ketika ada suatu isu yang berkembang di masyarakat yang ada kaitannya dengan bidang ilmu yang ditekuninya, guru harus secara cepat dan tanggap mencari informasi lebih lanjut untuk mengetahui lebih jelas dan benar tentang isu tersebut.

Constance Blasie & George Palladino (2005) berpendapat bahwa pengetahuan dan penggunaan teknologi informasi secara tepat dalam pengajaran dan pembelajaran adalah kemampuan yang harus dikuasai oleh guru sekolah lanjutan. Hal ini mengisyarat-kan pada kita selaku guru akan pentingnya penguasaan penggunaan kemajuan TIK dalam menunjang kelancaran dan keberhasilan menjalankan tugas. Contoh konkretnya penguasaan penggunaan internet dalam menelusuri informasi yang diperlukan untuk mengkaji kebenaran isu yang berkembang di masyarakat.

Beberapa contoh isu yang berkembang di masyarakat yang sempat membuat masyarakat bingung dan resah dan memerlukan penjelasan ilmiah yang mampu menepis isu-isu yang kontroversial tersebut agar meredam keresahan masyarakat diantaranya isu MSG, isu minyak babi, isu banyu geni, isu merkuri, isu kiamat, isu kontroversi buku gurita Cikeas, isu batas TOEFL untuk kelulusan mahasiswa, dan sebagainya.

Salah satu wujud nyata peningkatan profesional guru adalah kemampuan guru dalam menerapkan pendekatan dan metode pembelajaran baru yang dipandang sesuai dengan nuansa dan esensi kurikulum yang berlaku. Salah satunya adalah pendekatan kontekstual yang mengharuskan guru mengaitkan materi ajar dengan dunia nyata peserta didik, sehingga peserta didik memiliki *transfer of knowledge* dan *transfer of value* di lingkungan keluarga dan masyarakat.

Banyaknya isu yang terekspose di masyarakat melalui kecanggihan TIK menuntut guru untuk mampu menerapkan pendekatan kontekstual dengan cara melihat keterkaitan isu-isu tersebut dengan materi yang diajarkan dan kebutuhan peserta didik akan penje-lasan/informasi yang benar dan tepat. Dengan demikian berarti guru mampu tampil seba-gai “pahlawan” dalam menenangkan keresahan masyarakat, sekaligus sarana bagi guru dalam mengembangkan ilmunya. Jika pembelajaran kontekstual berbasis kontroversi isu yang berkembang di masyarakat ini dapat terimplementasi dengan baik secara terus menerus, maka citra dan martabat guru semakin gemilang.

2.2.5. Model Pembelajaran dengan Pendekatan Kontekstual Berbasis Lingkungan

Ketiadaan alat dan bahan laboratorium sering menjadi kendala tidak dilakukannya praktikum, meskipun guru pengampu memiliki petunjuk praktikumnya. Oleh karena itu sangat diperlukan kreativitas guru IPA dalam mencari alternatif bahan dan alat lain yang dapat digunakan agar praktkum tetap dapat dilaksanakan. Dengan demikian pelaksanaan praktikum tidak bergantung pada fasilitas laboratorium yang ada di sekolah, tetapi cukup menggunakan bahan dan alat yang dengan mudah dijumpai dalam kehidupan sehari-hari.

Metode praktikum sangat dianjurkan dalam pembelajaran IPA, karena sesuai dengan tujuan pendidikan yang meliputi 3 aspek, yaitu mengembangkan pengetahuan, menanamkan sikap ilmiah, dan melatih keterampilan. Melalui praktikum peserta didik memperoleh pemahaman yang mendalam tentang suatu konsep, sebab mereka melaku-kan dan melihat sendiri.

Bila dilihat dari buku petunjuk praktikum yang sudah ada di lapangan, nampaknya tidak semua materi pokok yang ada dalam kurikulum mata pelajaran IPA terwakili oleh suatu topik percobaan. Ironisnya, sebagian besar buku petunjuk praktikum yang beredar di pasaran isinya sama, tidak ada yang memiliki kelebihan, misalnya menyajikan topik percobaan yang berbeda dan baru/aktual. Meskipun semua percobaan bertujuan mengaktifkan peserta didik, namun akan lebih menarik minat belajar peserta didik bila buku petunjuk praktikum berisikan aktivitas percobaan sederhana yang menarik dengan bahan dan alat yang digunakan dapat diperoleh di lingkungan sekitar, sehingga peserta didik dapat mencobanya di rumah.

Bagaimanakah cara kita sebagai guru menciptakan suatu percobaan baru sehing-ga peserta didik tertantang dan tertarik untuk melakukannya ? Suatu materi ajar dapat dikonstruksi menjadi percobaan dengan mengikuti langkah-langkah berikut ini :

a. Pelajari secara mendalam materi ajar tersebut, lalu coba cari hubungan setiap konsep yang ada dengan fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari.
b. Setelah kita menemukan suatu fenomena, cobalah berpikir bagaimana mengangkat fenomena tersebut menjadi suatu rancangan percobaan sederhana dengan mencari hubungannya dengan konsep kimia tertentu.
c. Buatlah langkah-langkah pengujian / pembuktiannya.
d. Ujicobalah sesuai dengan rancangan yang dibuat.
e. Tulis rancangan kita dengan format prosedur sederhana yang mudah dipahami.

Untuk dapat menemukan fenomena yang berkaitan dengan materi ajar mungkin dirasa sulit oleh kita, namun sebenarnya semakin banyak membaca buku dan membuka internet, semakin besar kepekaan kita terhadap fenomena kimia di sekitarnya.

2.2.6. Model Pembelajaran Berbasis Pendekatan Konstruktivistik

Menurut Canella & Reiff (1994: 27-28) belajar dengan pendekatan konstruktivistik berarti mengonstruksi atau menyusun struktur pemahaman/pengetahuan dengan cara mengaitkan dan menyelaraskan fenomena, ide, atau pengetahuan baru ke dalam struktur pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya.

Aliran konstruktivisme memandang bahwa pengetahuan adalah hasil konstruksi atau bentukan manusia. Manusia mengonstruksi pengetahuannya melalui interaksi dengan objek, fenomena, pengalaman dan lingkungannya. Pengetahuan tidak dapat ditransfer begitu saja dari seorang guru kepada peserta didik, tetapi harus diinter-prestasikan sendiri oleh mereka. Pengetahuan bukan sesuatu yang sudah jadi, melainkan suatu proses yang berkembang terus menerus. Jawaban peserta didik atas suatu persoalan adalah jawaban yang masuk akal bagi mereka saat itu. Jika ada jawaban salah, bukan disalahkan, tetapi ditanyakan bagaimana ia dapat memperoleh jawaban itu. Dengan demikian peserta didik terlibat aktif dalam proses perolehan suatu konsep.

Strategi pembelajaran dengan pendekatan konstruktivistik dapat dilakukan guru dengan memperhatikan beberapa hal, yaitu:
a. Menyajikan masalah-masalah aktual kepada peserta didik dalam konteks yang sesuai dengan tingkat perkembangan mereka

b. Menekankan pembelajaran di sekitar konsep-konsep primer
c. Mendorong peserta didik untuk mengajukan pertanyaan sendiri
d. Mengkondisikan peserta didik berani menemukan jawaban dari pertanyaan sendiri
e. Mengkondisikan peserta didik untuk berani mengemukakan pendapat dan menghargai sudut pandangnya sendiri.
f. Menantang peserta didik agar dapat melakukan pemahaman yang mendalam, bukan sekedar penyelesaian tugas melalui pertanyaan yang menantang.
g. Menganjurkan peserta didik belajar dalam kelompok
h. Mendorong peserta didik untuk berani menemukan tanggungjawab
i. Melakukan penilaian, baik terhadap proses maupun hasil belajar peserta didik dalam konteks pembelajaran.

Inti pendekatan konstruktivistik adalah peserta didik diharuskan mampu mengons-truksi sendiri pemahaman terhadap suatu konsep berdasarkan struktur kognitif yang telah ada, dimana peserta didik melakukan penyelarasan dengan konsep baru yang diterimanya

2.3. Sisi Lain Pembelajaran Inovatif

Pembelajaran inovatif adalah pembelajaran yang bersifat *student-centered,* artinya, pembelajaran yang lebih memberikan peluang kepada siswa untuk mengkonstruksi pengetahuan secara mandiri *(self directed)* dan dimediasi oleh teman sebaya *(peer mediated instruction).* Pembelajaran inovatif mendasarkan diri pada paradigma konstruktivistik. Pembelajaran inovatif yang berlandasakan paradigma konstruktivistik membantu siswa untuk mengiternalisasi, membentuk kembali, atau mentransformasi informasi baru (Oentoro, 2010:376).

Pengembangan pembelajaran yang diperlukan saat ini adalah pembelajaran inovatif yang memberikan iklim kondusif di kelas dalam pengembangan daya nalar, daya inkuiri dan kreatifitas siswa. Strategi belajar mengajar mempunyai andil yang cukup besar dalam kegiatan belajar mengajar (Susatyo, dkk., 2009:463). Pembelajaran inovatif memiliki ciri mendorong peserta didik menemukan gagasan baru dan mendorong peserta didik membuat hal-hal yang baru.

Pembelajaran yang inovatif diharapkan mampu membuat siswa yang mempunyai kapasitas berpikir kritis dan terampil dalam memecahkan masalah. Siswa yang seperti ini mampu menggunakan penalaran yang jernih dalam proses memahami sesuatu dan piawai dalam mengambil pilihan serta membuat keputusan. Selain itu, pembelajaran yang inovatif juga tercemin dari hasil yang diperlihatkan siswa yang komunikatif dan kolaboratifdalam mengartikulasikan pikiran dan gagasan secara jelas dan efektif melalui tuturan/lisan dan tulisan (Hamied, 2009:102).

2.3.1. Model Pembelajaran Inovatif

Model pembelajaran dapat dijadikan pola pilihan, artinya para guru boleh memilih model pembelajaran yang sesuai dan efisien untuk mencapai tujuan pendidikannya. Rusman (2011:189) membagi model-model pembelajaran inovatif menjadi 9 macam, yaitu:

a. **Model Pembelajaran Kontekstual *(Contextual Teaching and Learning),*** merupakan konsep belajar yang dapat membantu guru mengaitkan antara materi yang diajarkan dengan situasi dunia nyata siswa dan mendorong siswa membuat hubungan antara pengetahuan yang dimilikinya dengan penerapannya dalam kehidupan mereka sebagai anggota keluarga dan masyarakat (Nurhadi, 2002 dalam Rusman , 2011:189).
b. **Model Pembelajaran Kooperatif *(cooperative learning),*** merupakan bentuk pembelajaran dengan cara siswa belajar dan bekerja dalam kelompok-kelompok kecil secara kolaboratif yang anggotanya terdiri dari empat sampai enam orang dengan struktur kelompok yang bersifat heterogen.
c. **Model Pembelajaran Berbasis Masalah (PBM),** adalah inovasi yang paling signifikan dalam pendidikan. Kurikulum pembelajaran berbasis masalah membantu untuk meningkatkan perkembangan keterampilan belajar sepanjang hayat dalam pola pikir yang terbuka, reflektif, kritis, dan belajar aktif.
d. **Model Pembelajaran Tematik,** merupakan salah satu model dalam pembelajaran terpadu *(integrated instruction)* yang merupakan suatu sistem pembelajaran yang memungkinkan siswa, baik secara individual maupun kelompok, aktif menggali dan menemukan konsep serta prinsip-prinsip keilmuan secara holistik, bermakna, dan autentik.
e. **Model Pembelajaran Berbasis Komputer,** merupakan kegiatan pembelajaran yang dilakukan melalui sistem komputer. Pembelajaran berbasis komputer sangat dipengaruhi oleh teori belajar kognitif model pemrosesan informasi.

f. **Model Pembelajaran Berbasis Web *(E-Learning)*,** merupakan aplikasi teknologi web dalam dunia pembelajaran untuk sebuah proses pendidikan. Model pembelajaran dirancang dengan mengintegrasikan pembelajaran berbasis web dalam program pembelajaran konvensional tatap muka.

g. **Model Pembelajaran PAKEM (Partisipatif, Aktif, Kreatif, Efektif, dan Menyenangkan),** merupakan model pembelajaran dan menjadi pendoman dalam bertindak untuk mencapai tujuan yang telah ditetapkan. Dengan pelaksanaan pembelajaran PAKEM, diharapkan berkembangnya berbagai macam inovasi kegiatan pembelajaran untuk mencapai tujuan pembelajaran yang partisipatif, aktif, kreatif, efektif, dan menyenagkan.

h. **Model Pembelajaran Mandiri,** merupakan pembelajaran yang memberikan keleluasan kepada siswa untuk dapat memilih atau menetapkan sendiri waktu dan cara belajarnya sesuai dengan ketentuan sistem kredit semester di sekolah.

i. **Model Lesson Study,** merupakan salah satu upaya pembinaan untuk meningkatkan proses pembelajaran yang dilakukan oleh sekelompok guru secara kolaboratif dan bersinambungan, dalam merencanakan, melaksanakan, mengobservasi, dan melaporkan hasil refleksi kegiatan pembelajaran.

Guru dituntut keprofesionalitasannya dalam meramu proses pembelajaran dengan model pembelajaran yang inovatif dengan menempatkan peserta didik sebagai subyek pembelajaran bukan obyek pembelajaran, serta dapat menggali pengetahuan peserta didik secara kongkret dan mandiri. Salah satu inovasi yang mengiringi paradigma pembelajaran adalah diformulasikan serta diaplikasikannya model-model pembelajaran inovatif yang berorientasi kepada konstruktivistik. Model-model pembelajaran inovatif yang bernaung di bawah teori konstruktivistik antara lain (Suhardiyanto, 2009:69):

a. Pembelajaran Kooperatif *(Cooperatif Learning)*
b. Model Pengajaran Langsung *(Direct Instructions)*
c. Pengajaran Kontektual *(Contectual Teaching and Learning).*

2.3.2. Pembelajaran Matematika Yang Menyenangkan.

Pemebelajaran matematika yang menyenangkan (Joyfull Learning) merupakan salah satu dari 5 prinsip dasar dalam pembelajaran, yang mana kelima prinsip dasar pembelajaran tersebut adalah :

a. Pembelajaran Siswa Aktif

b. Kelompok Belajar Kooferatif.
c. Pembelajaran Partisipatif
d. Pembelajaran Reaktif (Reactive Teaching)
e. Pembelajaran Menyenangkan (Joyfull Learning).

Dalam pembelajaran menyenangkan ada beberapa prinsip yang mesti dipenuhi yaitu

i. Sesulit apapun materi pelajaran apabila dipelajari dalam suasana yang menyenangkan akan mudah dipahami.

ii. belajar akan efektif kalau anda dalam keadaan *"FUN"*.

iii. Impliksinya: Ciptakan suasana *enjoy*, *fun*, relaks melalui sikap ramah guru (5S), humor edukatif, variasi gaya mengajar, teknik *reinforcement*, multi media, games, Kuiz, lomba, menggambar, cerita, dan kegiatan menyenangkan siswa; siswa harus melihat, mendengar, dan merasakan apa yang dipelajarinya

iv. Memenuhi kondisi PAKEM (PEMBELAJARAN AKTIF, KREATIF, EFEKTIF, dan MENYENANGKAN)

Maka dalam melaksanakan proses pembelajaran diperlukan sejumlah prinsip dan standar yang dapat menjadi pedomanbagiguru agar terfokus pada sasaran pembelajaran, dan selalu berupaya meningkatkan pemahaman dan keterampilan siswa secara bertahap dan berkesinambungan, melalui kegiatan pembelajaran yang menyenangkan. Yang selalu para pendidik susah untuk membedakan pembelajaan dengan pengarajaran, kedua konsep ini sebenarnya sangat berbeda, perhatikan bahwa Pembelajaran adalah upaya yang dilakukan oleh guru agar siswa belajar. Hal ini analog dengan pemberdayaan yang bermakna upaya yang dilakukan untuk/agar seseoran gatau sekelompok orang berdaya, sehingga dalam hal ini berlaku prinsip :

Guru = pembelajar, bukansekadar pengajar.
Siswa = pelajar(*student*) atau pemelajar(*learner*).

Maka perbedaan antara pengajaran dan pembelajaran adalah sebagai berikut :

Pengajaran	Pembelajaran
• Fokus pada materi • Penekanan pada aspek what	• Fokus pada proses • Penekanan pada aspek how

• Siswa dependence pada guru • Pengetahuan ditransfer dari guru ke siswa. • Kegiatan didominasi dalam bentuk ceramah • Guru bertindak sebagai narasumber/pakar	• Siswa independence • Siswa aktif membangun pengetahuan. • Kegiatan bervariasi • Guru bertindak sebagai fasilitator

Maka berdasarkan uraian diatas, prinsip pembelajaran matematika adalah sebagai berikut :

- Kurikulum harus koheren dan terfokus pada topik-topik esensial
- Pembelajaran (o/ guru) harus benar, efektif, dan menyenangkan
- Pemelajaran (o/ siswa) harus benar dan berbekas
- Penilaian harus sejalan dengan tujuan pembelajaran
- Teknologi harus mendukung
- Perlakuan terhadap siswa tidak diskriminatif

Menurut NTCM-AS, proses pembelajaran matematika menyenangkan haruslah memenuhi unsur-unsur berikut :

1. Berupa pemecahan masalah
2. Membangun penalaran
3. Memiliki unsur keterkaitan
4. Membangun komunikasi
5. Menyatakan suatu representasi.

Kondisi inilah yang sedikit berbeda dengan apa yang diterjadi diberbagai sekolah di Indonesia, di banyak proses pembelajaran di Indonesia penekanannya lebih pada prosedur dan aplikasi dalam bentuk artificial. Banyak makna yang kita berikan pada unsur-unsur di atas, akan tetapi sebenarnya dalam proses pembelajaran matematika ke lima unsur di atas lebih difokuskan pada :

Pemecahan masalah adalah dalam bentuk :

- Memecahkan masalah dalam matematika dan konteks lainnya
- Menerapkan berbagai strategi untuk pemecahan masalah;
- Mengevaluasi proses pemecahan masalah matematika;
- Mengembangkan pengetahuan baru melalui pemecahan masalah.

Pernalaran

- Membuat dugaan matematika dan menyelidiki kebenarannya;
- Mengembangkan dan mengevaluasi argumentasi dan bukti matematika;
- Memilih dan menggunakan berbagai cara pernalaran dan pembuktian;
- Mengenali pernalaran dan pembuktian sebagai aspek mendasar matematika.

Keterkaitan

- Mengenali dan menggunakan keterkaitan antar-gagasan matematika;
- Memahami bagaimana gagasan-gagasan matematika terkait;
- Mengenali dan menerapkan matematika dalam konteks di luar matematika.

Komunikasi

- Mengelola dan mengungkapkan pemikiran matematika melalui komunikasi;
- Mengkomunikasikan/menangkap pemikiran matematika secara koheren dan jelas kepada/dari teman dan gurunya;
- Menggunakan bahasa dan notasi matematika untuk menyatakan gagasan matematika secara persis.

Representasi

- Membuat dan menggunakan representasi untuk mengelola, merekam, dan mengkomunikasikan gagasan matematika;
- Memilih, menerapkan, dan menerjemahkan representasi matematika untuk memecahkan masalah;
- Menggunakan representasi untuk memodelkan dan menafsirkan fenomena fisis dan matematis.

Sebagai bahan acuan lainnya, perhatikan permendiknas nomor 22 tahun 2006 yang mengatakan bahwa tujuan pembelajaran matematika adalah :

- Memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antarkonsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma, secara luwes, akurat, efisien, dan tepat, dalam pemecahan masalah
- Menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika

- Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh
- Mengomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah
- Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah.

Maka yang perlu menjadi perhatian bagi para pembelajar adalah ***melaksanakan pembelajaran yang benar dan efektif.*** Yang dalam hal ini, pembelajar (guru) diasumsikan :

- Menguasai matematika denganbaik (sehingga matematika yang diajarkan adalah matematika yang benar)
- Mengetahui beberapa metode umumpembelajaran (misal: ceramah, kerja kelompok, projek)
- Mengetahui beberapa gaya belajar.

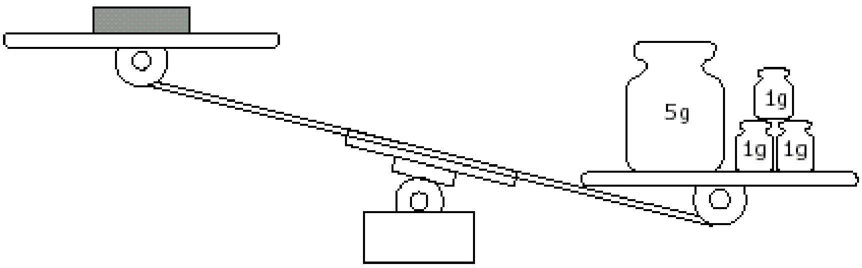
Sangat perlu dipahami dan dibedakan antara belajar dan gaya belajar, proses ketika seseorang ketika seseorang memrosesi nformasi atau bereaksi (melakukan sesuatu) terhadap sesuatu yang dihadapkan kepadanya, iasesungguhnya sedang belajar sedangkan Gaya belajar seseorang adalah cara ia memahami dan memroses informasi baru, memperoleh pengalaman belajar baru, dan/atau memecahkan suatu masalah. Maka Seorangguru yang efektif dalam memberdayakan siswanya dalam belajara dalah seorang motivator, pakar, dan sekaligus pelatih, serta tahu kapan ia harus membiarkan siswanya belajar sendiri.

Kembali ke persoalan awal, yaitu bagaimana membuat pembelajaran matematika itu menjadi sesuatu yang menyenangkan, untuk itu sang fasilitor (guru) haruslah : Menyenangi matematika, mempunyai semangat atau antusiasme yang tinggi dalam pembelajaran dan meluangkan waktu yang cukup untuk menyiapkan pembelajaran. Inilah yang menjadi kata kunci untuk menjadi seorang guru yang dapat melakukan proses pembelajaran matematika yang menyenangkan.

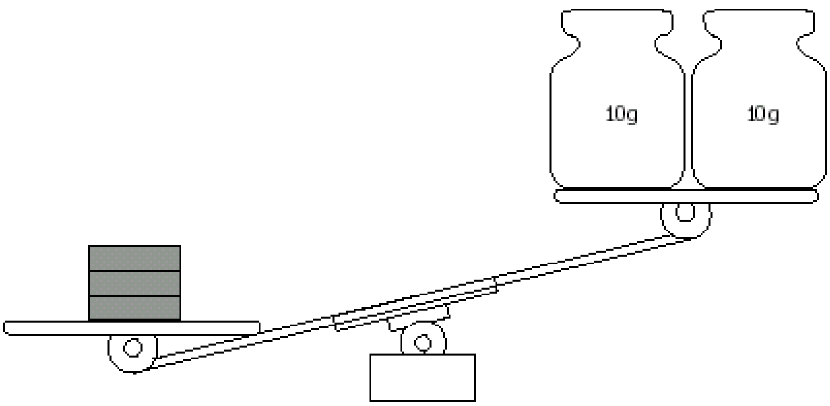
Latihan 1.

Berikut ini akan diberikan beberapa soal, anda diminta untuk memberikan analisis terhadap soal tersebut dan juga memberikan langkah fasilitor yang dapat dilakukan untuk mengembangkan koknifit siswa dalam kondisi pembelajaran yang menyenangkan.

1. Jon mempunyai tiga balok logam yang sama beratnya. Ketika satu balok ditimbang dengan beban 8 gram (8g), terjadi seperti pada gambar 1. Ketika ketiga balok tersebut ditimbang dengan beban 20 gram, terjadi seperti pada gambar 2.
2. Perhatikan gambar di bawah. Dari bilangan berikut, bilangan manakah yang dapat digunakan untuk menyatakan berat satu balok logam?
   a) Tersedia 2 takaran berukuran 3 lt dan 5 lt. Bagaimana caranya memperoleh 7 lt?
   b) Tersedia 2 takaran berukuran 4 lt dan 5 lt. Bagaimana caranya memperoleh 7 lt?

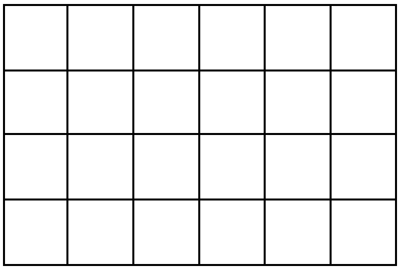


Gambar 1



Gambar 2

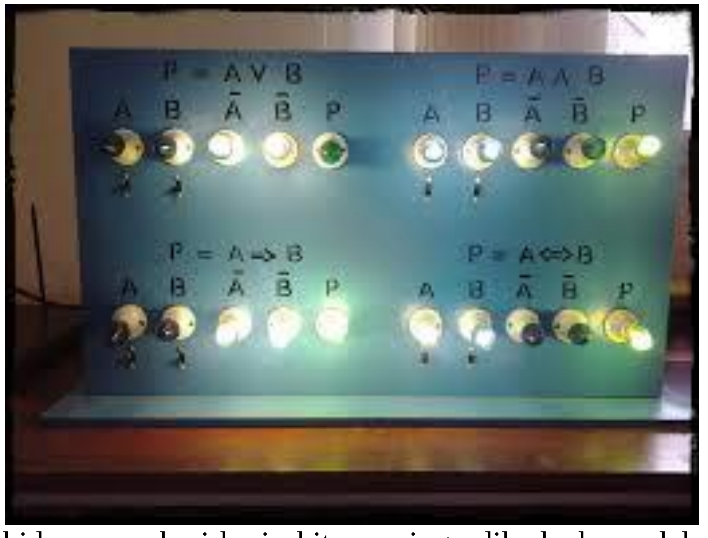
3. Di negara Zedland dengan mata uang ς, hanya terdapat perangko dengan harga ς.3 dan ς.7. Bagaimana kombinasinya untuk surat yang bea posnya ς.13? Bagaimana untuk surat yang bea posnya ς.20? Surat dengan bea pos berapakah yang tidak dapat dibayar dengan pas oleh perangko yang ada?
4. Berapa macam persegi panjang yang dapat disusun dari 24 persegi berukuran 1 x 1 cm2? Persegi panjang berikut adalah salah satu contohnya



5. Urutan bilangan 7, 11, 15, 19, 23, …bertambah dengan 4, sedangkan urutan bilangan 1, 10, 19, 28, 37, …bertambah dengan 9. Angka 19 berada pada kedua urutan bilangan tersebut. Jika kedua urutan bilangan diteruskan, berapa angka sama berikutnya yang akan muncul pada KEDUA urutan bilangan tersebut?
6. Tentukan ukuran tabung lingkaran yang paling ekonomis!

BAB 2

PENGAJARAN LOGIKA MATEMATIKA



Dalam kehidupan sehari-hari kita sering dihadapkan dalam bentuk pernyataan, jika begini maka begitu. Logika Matematika dalam Kehidupan Hehari-hari" adalah dapat membuat kita menjadi insan yang lebih baik seperti lebih bijak dalam mengambil keputusan. Menjadi orang yang berpikir kritis dalam memecahkan suatu masalah. Dan dapat membantu aktifitas kita sehari-hari karena logika matematika mempunyai banyak peran dalam banyak bidang kehidupan seperti dalam bidang Ilmu, Teknologi, Psikologi, dan lain sebagainya.

BAB 2

PENGAJARAN LOGIKA MATEMATIKA

2.1. Pendahuluan

Dalam pembelajaran logika matematika, khususnya dalam mempelajari konjungsi, disjungsi, Implikasi dan Biimplikasi. Kebanyakan guru lansung menjelaskan tabel konjungsi, disjungsi, Implikasi dan Biimplikasi. Padahal dalam Indikator 1 dalam setiap Kompetensi dasar selalu dibuat, guru membimbing siswa menemukan rumus. Tentunya untuk logika matematika ini guru membimbing siswa membuat tabel Konjungsi, Disjungsi, Implikasi dan Biimplikasi. Bukannya dengan meminta siswa untuk menghapal table tersebut. Inilah hal yang selalu membuta siswa tidak meminati mata pelajaran matematika. Pola pendekatan pembelajaran yang membuat siswa jadi sipenghapal inilah yang harus dihindari. Harap diingat bahwa salah satu tujuan pembelajaran matematika tersebut adalah mengasah kemampuan berfikir kritis. Kalau sebagai guru masih juga mengajarkan berhitung dengan pendekatan menghapal rumus, maka cobalah anda ***bayangkan apa yang ada dalam pikiran siswa kalau siswa diminta menghapal*** tabel-tabel kebenaran berikut :

Tabel kebenaran Konjungsi

p	q	$P \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Tabel kebenaran disjungsi

p	q	$P \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Tabel 2.1.1.a

Tabel kebenaran Implikasi

p	q	$P \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B

Tabel kebenaran Biimplikasi

p	q	$P \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S

S	S	B	S	S	B

Tabel 2.1.1.b

Mestinya yang harus dilakukan adalah guru dengan benar membimbing siswa mengkontruksi tabel kebenaran di atas, dengan terlebih dahulu menjelaskan :

- Pengertian logika
- Pernyataan
- Teori Korespondensi
- Teori Koherensi
- Perakit atau perangkat pernyataan
  -. “dan” (disimbolkan dengan $\wedge$)
  -. “atau” (disimbolkan dengan $\vee$)
  -. Jika . . . maka . . . (disimbolkan dengan $\Rightarrow$)
  -. Jika dan hanya jika . . . (disimbolkan dengan $\Leftrightarrow$)
- Negasi.

Setelah hal di atas di jelaskan alangkah inovatifnya jika guru dalam menjelaskan konjungsi meminta siswa membuat tabel seperti berikut :

p	q	P $\wedge$ q
B	B	
B	S	
S	B	
S	S	

Tabel 2.1.2

Kemudian meminta siswa untuk mengisi kolom p $\wedge$ q, sehingga siswa paham dengan benar apa itu konjungsi dan bagaimana membuat tabel kebenarannya. Harapannya siswa tidak lagi menghapal, akan tetapi mereka yang menemukannya. Lakukan hal yang sama untuk pembelajaran Disjungsi, Implikasi dan Biimplikasi serta yang lainnya. Inilah proses pembelajaran yang benar dalam matematika. Bukan berhitung dan sejarah (dalam artian menghapal). Kalau ini dapat kita lakukan, semoga makin banyak siswa kita yang berminat untuk mempelajari matematika.

2.2. Tujuan

Adapun tujuan dalam pembelajaran logika matematika ini adalah peserta didik dapat :

1. Mengkontruksi sendiri table dari inplikasi, disjungsi, Konjungsi, Implikasi, Biimplikasi dan lain sebagainya
2. Menentukan ingkaran atau Negasi dari suatu pernyataan dan dapat mengkontrluksi berbagai tabel kebenaran.
3. Menentukan ingkaran Implikasi, Konvers, Invers, dan Kontraposisinya
4. Menentukan bermacam-macam bentuk Kalimat Terbuka, Pernyataan dan Kuantor

2.3. Logika Matematika

- **Perakit Dan Negasinya**

Kebenaran suatu teori yang dikemukakan setiap ilmuwan, matematikawan, maupun para ahli merupakan hal yang sangat menentukan reputasi mereka. Untuk mendapatkan hal tersebut, mereka akan berusaha untuk mengaitkan suatu fakta atau data dengan fakta atau data lainnya melalui suatu proses penalaran yang sahih atau valid. Setiap pernyataan harus ditentukan lebih dahulu kebenarannya. Adakalanya, mereka harus menegasikan atau membuat pernyataan baru yang menunjukkan pengingkaran atas pernyataan yang ada, dengan menggunakan perakit “bukan” atau “tidak”. Di samping itu, mereka harus menggabungkan dua pernyataan atau lebih dengan menggunakan perakit “***atau***”, “***dan***”, “***Jika … maka …***”, maupun “… ***jika dan hanya jika …***.” yang dikenal dimatematika sebagai ***konjungsi***, ***disjungsi***, ***implikasi*** dan ***biimplikasi***. Bagian ini akan membahas perakit-perakit tersebut.

- **Perakit atau Perangkai**

Perakit atau perangkai ini sering juga disebut dengan operasi. Dari satu atau dua pernyataan tunggal dapat diberikan perakit “tidak” , “dan”, “atau”, “jika … maka …”, dan “ … jika dan hanya jika … “ sehingga terbentuk suatu negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi. Sub bagian ini akan membahas tentang perakit atau penggandeng tersebut.

2.3.1. Negasi

Jika *p* adalah "Pekanbaru ibukota Provinsi Riau", maka negasi atau ingkaran dari pernyataan p tersebut adalah ~p yaitu: "Pekanbaru bukan ibukota Riau." atau "Tidak benar bahwa
Pekanbaru ibukota Provinsi Riau.". Dari contoh di atas nampak jelas bahwa p merupakan pernyataan yang bernilai benar karena Pekanbaru pada kenyataannya memang ibukota Provinsi Riau, sehingga ~p akan bernilai

salah. Namun jika p bernilai salah maka ~p akan bernilai benar seperti ditunjukkan oleh tabel kebenaran di bawah ini.

p	~p
B	S
S	B

Tabel 2.3.1

2.3.2. Konjungsi

Konjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang menggunakan perakit "dan". Contohnya,
pernyataan Adi berikut:

"Mashadi makan nasi dan minum kopi."

Pernyataan tersebut ekivalen dengan dua pernyataan tunggal berikut:

"Mashadi makan nasi."dan sekaligus "Mashadi minum kopi."

Dalam proses pembelajaran di kelas, berilah kesempatan kepada para siswa untuk bertanya kepada diri mereka sendiri, dalam hal mana pernyataan Adi di atas bernilai benar dan dalam hal mana bernilai salah dalam empat kasus berikut:

- Kasus pertama, Mashadi memang benar makan nasi dan ia juga minum kopi.
- Kasus kedua, Mashadi makan nasi namun ia tidak minum kopi.
- Kasus ketiga, Mashadi tidak makan nasi namun ia minum kopi.
- Kasus keempat, Mashadi tidak makan nasi dan ia tidak minum kopi.

Pada kasus pertama, Mashadi memang benar makan nasi dan ia juga minum kopi. Dalam kasus seperti ini, tidaklah mungkin Anda akan mengatakan pernyataan Adi tadi bernilai salah. Alasannya, pernyataan Adi tadi sesuai dengan kenyataannya.

Pada kasus kedua, Mashadi makan nasi namun ia tidak minum kopi. Dalam hal ini, tentunya Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai salah karena meskipun Mashadi sudah makan nasi namun ia tidak minum kopi sebagaimana yang dinyatakan Adi.

Pada kasus ketiga, Mashadi tidak makan nasi meskipun ia sudah minum kopi. Sebagaimana kasus kedua tadi, Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai salah karena Mashadi tidak makan nasi sebagaimana yang dinyatakan Adi bahwa Mashadi makan nasi dan minum kopi.

Pada kasus keempat, Mashadi tidak makan nasi dan ia tidak minum kopi. Dalam hal ini Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai salah karena tidak ada kesesuaian antara yang dinyatakan dengan kenyataan yang sesungguhnya.

Berdasar penjelasan di atas, dapatlah disimpulkan bahwa suatu konjungsi $p \wedge q$ akan bernilai benar hanya jika komponen-komponennya, yaitu baik p maupun q, keduanya bernilai benar, sedangkan nilai kebenaran yang selain itu akan bernilai salah. Dari kesimpulan tersebut mintalah siswa melangkapi tabel 2.1.2 di atas dengan harapan hasil yang diperoleh oleh siswa adalah seperti tabel kebenaran konjungsi berikut ini

Tabel kebenaran Konjungsi

p	q	$P \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Tabel 2.3.2

2.3.3. Disjungsi

Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang menggunakan perakit "atau". Contohnya, pernyataan Adi berikut: "Mashadi makan nasi atau minum kopi." Sekarang, bertanyalah kepada diri Anda sendiri, dalam hal mana pernyataan Adi di atas akan bernilai benar dalam empat kasus berikut:

- Kasus pertama, Mashadi memang benar makan nasi dan ia juga minum kopi.
- Kasus kedua, Mashadi makan nasi namun ia tidak minum kopi.
- Kasus ketiga, Mashadi tidak makan nasi namun ia minum kopi.
- Kasus keempat, Mashadi tidak makan nasi dan ia tidak minum kopi.

Pada kasus pertama, Mashadi memang benar makan nasi dan ia juga minum kopi. Dalam kasus seperti ini, tidaklah mungkin Anda akan mengatakan pernyataan Adi tadi bernilai salah, karena pernyataan Adi tadi sesuai dengan kenyataannya.

Pada kasus kedua, Mashadi makan nasi namun ia tidak minum kopi. Dalam hal ini, tentunya Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai benar karena Mashadi sudah benar makan nasi meskipun ia tidak minum kopi sebagaimana yang dinyatakan Adi.

Pada kasus ketiga, Mashadi tidak makan nasi namun ia minum kopi. Sebagaimana kasus kedua tadi, Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai benar karena meskipun Mashadi tidak makan nasi namun ia sudah minum kopi sebagaimana yang dinyatakan Adi.
Akhirnya, pada kasus keempat, Mashadi tidak makan nasi dan ia tidak minum kopi. Dalam hal ini Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai salah karena tidak ada kesesuaian antara yang dinyatakan dengan kenyataan yang sesungguhnya. Ia menyatakan Mashadi makan nasi atau minum kopi namun kenyataannya, Mashadi tidak melakukan hal itu.

Berdasar penjelasan di atas, dapatlah disimpulkan bahwa suatu disjungsi $p \vee q$ akan bernilai salah hanya jika komponen-komponennya, yaitu baik p maupun q, keduanya bernilai salah, yang selain itu akan bernilai benar. Kembali minta siswa untuk membuat tabel kebenaran disjungsi yang harapak guru, hasil pekerjaan siswa adalah sebagaimana ditunjukkan pada tabel kebenaran berikut:

Tabel kebenaran disjungsi

p	q	$P \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Tabel 2.3.3

2.3.4. Implikasi

Misalkan ada dua pernyataan p dan q. Yang sering menjadi perhatian para ilmuwan maupun matematikawan adalah menunjukkan atau membuktikan bahwa jika p bernilai benar akan mengakibatkan q bernilai benar juga. Untuk mencapai keinginannya tersebut, diletakkanlah kata "Jika" sebelum pernyataan pertama lalu diletakkan juga kata "maka" di antara pernyataan pertama dan pernyataan kedua, sehingga didapatkan suatu pernyataan majemuk yang disebut dengan implikasi, pernyataan bersyarat, kondisional atau hypothetical dengan notasi " $\Rightarrow$ " seperti ini: $p \Rightarrow q$

Notasi di atas dapat dibaca dengan:
1) Jika p maka q,
2) q jika p,
3) p adalah syarat cukup untuk q, atau
4) q adalah syarat perlu untuk p.

Implikasi p $\Rightarrow$ q merupakan pernyataan majemuk yang paling sulit dipahami para siswa SMU. Untuk membantu para siswa memahami kalimat majemuk implikasi tersebut, Bapak dan Ibu Guru dapat memulai proses pembelajaran dengan berceritera bahwa Adi menyatakan pernyataan majemuk berikut ini:

Jika saya mandi maka saya (Adi) basah.

Dalam hal ini dimisalkan:

p: Saya Mandi.
q: Saya Basah.

Berilah kesempatan bagi siswa untuk berpikir, dalam hal manakah pernyataan Adi tadi akan bernilai benar atau salah untuk empat kasus berikut:

- Kasus pertama: Saya mandi dan saya basah.
- Kasus kedua: saya mandi namun saya tidak basah.
- Kasus ketiga: Saya Tidak Mandi namun saya Basah.
- Kasus keempat: saya tidak mandi dan saya tidak basah.

Pada kasus pertama, saya mandi da saya basah, maka pernyataan ini jelas bernilai benar, karena tidak ada orang yang mandi tapi tidak basah.
Pada kasus kedua, saya mandi akan tetapi saya tidak basah, hal ini mana mungkin terjadi, maka jelas pernyataan tersebut bernilai salah.
Pada Kasus ketiga, saya tidak mandi namun saya basah, kondisi ini dapat bernilai benar, karena banyak orang yang basah tapi tidak mandi, misalnya kena siram dan lain sebagainya.

Akhirnya untuk pernyataan keempat, saya tidak mandi dan saya tidak basah, jelas bernilai benar karena sangat memungkinkan orang yang tidak mandi tentunya tidak basah.

Kembali seperti langkah sebelumnya mintalah siswa untuk membuat tabel kebenaran untuk implikasi, dengan harapan siswa akan memperoleh tabel kebenaran seperti tabel kebenaran implikasi di bawah ini :

Tabel kebenaran Implikasi		
p	q	$P \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Tabel 2.3.4

2.3.5. Biimplikasi

Akan lebih menarik jika sekiranya bukan guru yang membuat pernyataan untuk Biimplikasi ini. Berdasarkan table-tabel yang sudah di buat di atas, maka dalam pembelajaran biimpikasi berikut diharapkan guru dapat berinovasi. Carilah berbagai cara agar siswa dapat memahami dengan baik apa yang kita ajarkan sehingga tujuan pembelajaran kita tercapai. Misalnya mungkin akan lebih baik, guru cukup menjelaskan bahwa Biimplikasi atau bikondisional adalah pernyataan majemuk dari dua pernyataan p dan q yangdinotasikan dengan $p \Leftrightarrow q$ yang bernilai sama dengan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ sehingga dapat dibaca: "p jika dan hanya jika q" atau "p bila dan hanya bila q.". Kemudian mintalah siswa membuat contoh dan membagi kasusnya menjadi 4 kasus seperti di atas, sehingga siswa sampai pada kesimpulan seperti tabel kebenaran di bawah ini :

Tabel kebenaran Biimplikasi		
p	q	$P \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Tabel 2.3.5

Cara lain yang dapat ditempuh oleh guru dalam membimbing siswa untuk membuat tabel kebenaran biimplikasi adalah dengan mengingatkan kepada siswa bawah pernyataan $P \Leftrightarrow q$ adalah ekivalen dengan pernyataan $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$, pernyataan $p \Rightarrow q$ sudah ada seperti pada tabel kebenaran implikasi, sehingga bimbinglah siswa untuk melakukan langkah sebagai berikut :

- Minta siswa membuat tabel kebenaran $q \Rightarrow p$

- Gabungkan tabel kebenaran p $\Rightarrow$ q dengan tabel kebenaran q $\Rightarrow$ p
- Lakukan operasi dan (konjungsi)
- Periksa hasilnya apakah sama dengan tabel berikut

Tabel kebenaran Biimplikasi

p	q	p $\Rightarrow$ q	q $\Rightarrow$ p	(p$\Rightarrow$q)$\wedge$(q$\Rightarrow$p) = (p $\Leftrightarrow$ q)
B	B	B	B	B
B	S	S	B	S
S	B	B	S	S
S	S	B	B	B

Tabel 2.3.6

Dengan melakukan cara ke dua ini diharapkan kemampuan analisis siswa juga berkembang, sehingga dengan modal ini nantinya mereka dapat membuat tabel kebenaran untuk suatu tautology.

- **Materi Diskusi Siswa**

Untuk meningkatkan pemahaman siswa, sebaiknya siswa mendiskusikan hal berikut ini :

1. Suatu segitiga adalah segitiga siku-siku jika dan hanya jika luas persegi pada hipotenusanya sama dengan jumlah luas dari persegi-persegi pada kedua sisi yang lain.
2. Suatu segitiga adalah segitiga sama sisi bila dan hanya bila ketiga sisinya sama.

Tabel kebenaran dari suatu negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi di atas merupakan dasar dalam mencari nilai kebenaran pernyataan-pernyataan majemuk seperti di saat menentukan nilai kebenaran pernyataan majemuk (~p $\wedge$ r) $\vee$ (~r $\Rightarrow$ q) seperti ini. Untuk itu mintalah secara berkelompok siswa untuk mengisi tabel berikut ini :

p	q	r	~p	~r	(~p $\wedge$ r)	(~r $\Rightarrow$ p)	(~p $\wedge$ r) $\vee$ (~r $\Rightarrow$ p)
B	B	B	S	S			
B	B	S	S	B			
B	S	B	S	S			
B	S	S	S	B			
S	B	B	B	S			
S	B	S	B	B			
S	S	B	B	S			

S	S	S	B	B			

Tabel 2.2.7

Akan lebih baik jika hasil dari suatu kelompok, diminta tanggapan dari kelompok lainnya, sehingga terjadi diskusi untuk meningkatkan daya pemahaman siswa.Kemudian bandingkanlah hasil pekerjaan siswa dengan tabel berikut ini :

p	q	r	~p	~r	$(\sim p \wedge r)$	$(\sim r \Rightarrow p)$	$(\sim p \wedge r) \vee (\sim r \Rightarrow p)$
B	B	B	S	S	S	B	B
B	B	S	S	B	S	B	B
B	S	B	S	S	S	B	B
B	S	S	S	B	S	S	S
S	B	B	B	S	B	B	B
S	B	S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B	B
S	S	S	B	B	S	S	S

Tabel 2.2.8

Selanjutnya mintalah siswa untuk memberikan komentar terhadap hasil yang mereka peroleh dengan hasil tabel 2.2.8.

2.3.6. Ingkaran Atau Negasi Suatu Pernyataan

- **Negasi Suatu Konjungsi**

Konjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang menggunakan perakit "dan". Contohnya,
pernyataan Adi berikut:

"Mashadi makan nasi dan minum kopi."

Pernyataan tersebut ekivalen dengan dua pernyataan tunggal berikut: "Mashadi makan nasi." dan sekaligus "Mashadi minum kopi." Suatu konjungsi $p \wedge q$ akan bernilai benar hanya jika komponen-komponennya, yaitu baik p maupun q, keduanya bernilai benar. Sedangkan negasi atau ingkaran suatu pernyataan adalah pernyataan lain yang bernilai benar jika pernyataan awalnya bernilai salah dan bernilai salah jika pernyataan awalnya bernilai benar. Karena itu, negasi dari: "Mashadi makan nasi dan minum kopi." adalah suatu pernyataan majemuk lain yang salah satu komponennya merupakan negasi dari komponen pernyataan awalnya. Dengan demikian, negasinya adalah “"Mashadi tidak makan nasi atau tidak minum kopi."; sebagaimana ditunjukkan tabel kebenaran berikut:

p	q	$p \wedge q$	~p	~q	$\sim p \vee \sim q$
B	B	B	S	S	S
B	S	S	S	B	B
S	B	S	B	S	B
S	S	S	B	B	B

Tabel 2.3.9

2.3.7. Negasi Suatu Disjungsi

Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang menggunakan perakit "atau". Contohnya, pernyataan Adi berikut: "Mashadi makan nasi atau minum kopi." Suatu disjungsi $p \vee q$ akan bernilai salah hanya jika komponen-komponennya, yaitu baik p maupun q, keduanya bernilai salah, yang selain itu akan bernilai benar. Karenanya, negasinya adalah "Mashadi tidak makan nasi dan tidak minum kopi," selanjutnya mintalah siswa membuat tabel kebenaran dari :

p	q	$p \vee q$	~p	~q	$\sim p \wedge \sim q$
B	B				
B	S				
S	B				
S	S				

Tabel 2.3.10

Kemudian bandingkanlah hasil pekerjaan siswa dengan tabel berikut ini

p	q	$p \vee q$	~p	~q	$\sim p \wedge \sim q$
B	B	B	S	S	S
B	S	B	S	B	S
S	B	B	B	S	S
S	S	S	B	B	B

Tabel 2.3.11

2.3.8. Negasi Suatu Implikasi

Perhatikan pernyataan berikut yang merupakan suatu implikasi:

"Jika hari hujan maka Adi membawa payung."

Telah dibahas di bagian depan bahwa pada suatu implikasi $p \Rightarrow q$, pernyataan p memuat pernyataan q. Karenanya, negasi pernyataan tersebut adalah suatu pernyataan yang pernyataan p- nya bernilai benar namun pernyataan q-nya bernilai salah. Pada contoh di atas, negasinya adalah: "Hari hujan namun Adi tidak membawa payung," seperti ditunjukkan
tabel kebenaran berikut ini:

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$
B	B	S	B	S
B	S	B	S	B
S	B	S	B	S
S	S	B	B	S

Tabel 2.3.12.

Mintalah siswa untuk memberikan argumentasi bahwa berdasar penjelasan di atas,

$$p \Rightarrow q \equiv \sim[\sim (p \Rightarrow q)] \equiv \sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$$

2.3.9. Biimplikasi

Biimplikasi atau bikondisional adalah pernyataan majemuk dari dua pernyataan p dan q yang dinotasikan dengan $p \Leftrightarrow q$ yang ekuivalen $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$; sehingga:

$$\begin{aligned} \sim (p \Leftrightarrow q) &\equiv \sim[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \\ &\equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \\ &\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)] \\ &\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \end{aligned}$$

Tabel kebenaran dari suatu negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi di atas merupakan dasar dalam mencari nilai kebenaran pernyataan-pernyataan majemuk seperti di saat menentukan nilai kebenaran pernyataan majemuk $(\sim p \wedge r) \vee (\sim r \Rightarrow q)$. Mintalah siswa untuk membuat :

- Merancang model tabel yang diperlukan untuk membuat pernyataan majemu
  $(\sim p \wedge r) \vee (\sim r \Rightarrow q)$.
- Jangan sampai guru yang membuatkannya akan tetapi bimbinglah mereka untuk dapat mengkontruksi bentuk tabel yang benar.

- Bila ditemukan beberapa siswa mengalami kesulitan dalam mengkontruk bentuk tabelnya, maka dapat diminta mereka untuk bekerja secara berkelompok, sehingga pembelajaran sebaya dapat terjadi.
- Selanjutnya mintalah siswa untuk mengisi tabel kebenaran berikut ini :

p	q	r	~p	~r	$(\sim p \wedge r)$	$(\sim r \Rightarrow q)$	$(\sim p \wedge r) \vee (\sim r \Rightarrow q)$
B	B	B					
B	B	S					
B	S	B					
B	S	S					
S	B	B					
S	B	S					
S	S	B					
S	S	S					

Tabel 2.3.13

Latihan 2

1. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut!
   a. Jika $x^2 = 4$ maka $x = 2$.
   b. Jika $x = -2$ maka $x^2 = 4$.
   c. Jika $3x + 4 = 2$ dan $x \in B$, maka $x = -1$.
   d. $3 + 2 = 6 \Leftrightarrow 4 + 2 = 5$.
   e. $3 + 2 = 5 \Rightarrow 4 + 2 = 5$.
   f. $3 + 2 = 5$ atau Jakarta ibukota DI Aceh.
2. Jika p : 10 habis dibagi 5.
   q : 8 adalah bilangan prima.
   Nyatakan dalam kalimat sehari-hari pernyataan-pernyataan di bawah ini lalu tentukan nilai kebenarannya.
   a. ~p   b. ~q   c. $p \wedge q$

d. $p \vee q$ e. $\sim p \wedge \sim q$ f. $\sim p \sim q$

g. $p \wedge \sim q$ h. $p \Rightarrow q$ i. $p \Leftrightarrow q$.

j. $(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$

3. Jika a: Lisa gadis cantik dan

   b: Lisa gadis cerdas,

   Nyatakan pernyataan di bawah ini dengan menggunakan a, b dan simbol-simbol logika matematika.

   a. Lisa gadis yang cantik namun tidak cerdas.
   b. Lisa gadis yang tidak cantik dan tidak cerdas.
   c. Meskipun Lisa bukanlah gadis yang cantik namun ia gadis yang cerdas.
   d. Lisa gadis yang cantik sekaligus juga gadis yang cerdas.
   e. Tidak benar bahwa Lisa gadis yang cantik dan cerdas.
   f. Jika Lisa gadis yang cantik maka ia tidak cerdas.
   g. Jika Lisa gadis yang tidak cantik maka ia tidak cerdas.
4. Buatlah tabel kebenaran dari pernyataan ini:
   a. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
   b. $p \wedge q \Rightarrow (q \wedge \sim q \Rightarrow r \wedge q)$
   c. $\sim[(\sim p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow \sim q)] \wedge r$
5. Tentukan negasi dari pernyataan berikut ini lalu tentukan nilai kebenarannya.
   a. $3 + 2 = 6 \Leftrightarrow 4 + 2 = 5$
   b. $3 + 2 = 5 \Rightarrow 4 + 2 = 5$.
   c. $3 + 2 = 5$ atau Jakarta ibukota DI Aceh.
   d. Jika saya makan maka saya menjadi kenyang
   e. Amir makan nasi dan minum kopi
   f. Amir ke rumah Anto atau ia nonton film bersama chandra

2.4. Konvers, Invers dan Kontraposisi Suatu Implikasi

A. Konvers, Invers dan Kontraposisi

Pada dasarnya kita telah melatih siswa untuk membuat bermacam-macam tabel kebenaran, maka kemampuan siswa tersebut mesti kita kembangkan untuk membahas tabel kebenaran lain yang terkait dengan Konvers, Invers dan Kontraposisi. Guru cukup menjelaskan apa itu Konvers, Invers dan Kontraposisi serta memberikan beberapa pernyataan yang terkait dengan konvers, Invers dan kontraposisi :

Untuk itu ajaklah siswa untuk memperhatikan pernyataan berupa implikasi ini:

Jika suatu bendera adalah bendera RI maka bendera tersebut berwarna merah dan putih.

Bentuk umum suatu implikasi adalah

$p \Rightarrow q$

Pada kasus di atas,

p : Bendera RI

q : Bendera berwarna merah dan putih

Dari implikasi di atas, dapat dibentuk implikasi berikut:

a) Jika suatu bendera berwarna merah dan putih maka bendera tersebut adalah bendera RI.
b) Jika suatu bendera bukan bendera RI maka bendera tersebut tidak berwarna merah dan putih.
c) Jika suatu bendera tidak berwarna merah dan putih, maka bendera tersebut bukan bendera RI.

Berdasar penjelasan di atas, jawablah pertanyaan berikut:

a. Jika implikasinya dinotasikan dengan $p \Rightarrow q$, nyatakan implikasi pada a, b, dan c di atas dalam p, q, ~p, atau ~q.
b. Manakah yang menjadi konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi $p \Rightarrow q$ jika:

   Konversnya adalah $q \Rightarrow p$

   Inversnya adalah $\sim p \Rightarrow \sim q$

   Kontraposisinya adalah $\sim q \Rightarrow \sim p$
c. Tentukan nilai kebenaran dari implikasi, konvers, invers, dan kontraposisinya.
d. Hal menarik apa saja yang Anda dapatkan dari kegiatan c di atas?

B. Ingkaran Implikasi, Konvers, Invers, dan Kontraposisinya

Sekali lagi perlu ditegaskan bahwa jangan melakukan proses pengajaran dengan sepenuhnya menjelaskan kepada siswa, bukankah tujuan pembelajaran kita membuat siswa belajar. Untuk itu karena sudah dibahas di bagian depan tentang negasi atau ingkaran suatu pernyataan, termasuk ingkaran dari suatu implikasi. Untuk mengingatnya, tentuka ingkaran pernyataan berikut:

1. $p \wedge q$
2. $p \vee q$
3. $p \Rightarrow q$
4. $q \Rightarrow p$

5. $\sim p \Rightarrow q$
6. $\sim q \Rightarrow p$
7. $\sim p \Rightarrow \sim q$
8. $\sim q \Rightarrow \sim p$

Isikan negasi atau ingkaran pernyataan di atas pada tempat di bawah ini.
1. …
2. …
3. …
4. …
5. …
6. …

C. Pernyataan Berkuantor Dan Negasinya

Pada bagian ini dimulai dengan membahas perbedaan antara kalimat terbuka dan pernyataan sebagai suatu pengetahuan prasyarat. Soal-soal berikutnya adalah menyusun beberapa kalimat yang didapat dengan menambahkan kata-kata tertentu terhadap suatu kalimat terbuka. Kata-kata tertentu yang ditambahkan terhadap suatu kalimat terbuka itulah yang dikenal sebagai kuantor *(quantifier),* sehingga didapat pernyataan berkuantor yang bernilai benar saja atau salah saja. Dari contoh-contoh tersebut, pengertian kuantor yang terdiri atas dua macam yaitu kuantor universal dan kuantor eksistensial secara terinci akan dibahas. Pembahasan materi ini akan menggunakan pertanyaan-pertanyaan sehingga memungkinkan bagi Anda untuk mengalami sendiri proses pembelajaran 'Kuantor' yang berbasis pada pemecahan masalah (*problemsolving*),
dengan harapan pengalaman itu dapat diaplikasikan langsung di dalam proses pembelajaran tentang 'Kuantor' ini di kelasnya masing-masing.

- **Kalimat Terbuka, Pernyataan, dan Kuantor**

Pada bagian ini lakukan remedial atau mengingatkan kembali kepada siswa tentang pengertian kalimat terbuka, pernyataan dan kuantor. Misalnya dengan melakukan langkah berikut :
Guru meminta siswa untuk memperhatikan tiga kalimat berikut:
1. $3 + 4 = 6$
2. $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x \in$A

3. $2x + 5 > 4$, $x \in A$

Mintalah siswa untuk membahas beberapa pertanyaan berkait dengan kalimat di atas, diantaranya:

1. Mengapa kalimat pertama disebut dengan pernyataan? Mengapa kalimat kedua dan ketiga disebut dengan kalimat terbuka?
2. Dapatkah Anda mengubah kalimat terbuka menjadi pernyataan? Bagaimana caranya?

Kalimat 1 bernilai salah, sedangkan kalimat 2 dan 3 belum dapat ditentukan nilai kebenarannya sebelum peubah atau *variabel* x-nya diganti dengan salah satu anggota semesta pembicaraannya. Karenanya, kalimat pertama dapat dikategorikan sebagai pernyataan, sedangkan kalimat kedua dan ketiga dikategorikan sebagai kalimat terbuka.

Yang perlu mendapat perhatian adalah, kalimat terbuka $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x \in A$ akan bernilai benar hanya jika peubahnya diganti dengan $x = 2$ atau $x = 3$. Artinya, hanya ada dua anggota bilangan asli A yang jika digantikan atau disubstitusikan ke kalimat terbuka tersebut akan menyebabkan kalimat terbuka tersebut menjadi bernilai benar. Sedangkan kalimat terbuka $2x + 5 > 4$, $x \in A$ akan bernilai benar jika peubah x-nya diganti oleh setiap anggota semesta pembicaraannya.

Cara lain mengubah kalimat terbuka menjadi suatu pernyataan adalah dengan menambahkan kata-kata yang berkait dengan banyaknya pengganti variabel atau peubah x-nya, seperti contoh berikut.

1. Untuk setiap bilangan asli x, $x^2 - 5x + 6 = 0$.
2. Terdapat bilangan asli x sedemikian sehingga $x^2 - 5x + 6 = 0$.
3. Tidak ada bilangan asli x, sedemikian sehingga $x^2 - 5x + 6 = 0$.
4. Untuk semua bilangan asli x, $2x + 5 > 4$
5. Ada beberapa bilangan asli x sedemikian sehingga $2x + 5 > 4$
6. Tidak ada bilangan asli x sedemikian sehingga $2x + 5 > 4$

Perhatikan sekali lagi ke-enam kalimat di atas. Beberapa pertanyaan yang dapat diajukan
kepada siswa adalah:

a. Dapatkah Anda menentukan nilai kebenaran ke-enam kalimat di atas?
b. Tentukan nilai kebenaran setiap kalimat di atas. Jelaskan jawaban Anda.

Dari beberapa contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa terhadap suatu kalimat terbuka dapat ditambahkan kata-kata seperti:

- "Untuk semua *x* … " atau "Untuk setiap *x* … ";
- "Beberapa *x* … "; "Terdapat *x* … "; ataupun "Ada *x* …".
- "Tidak ada *x* …"

Karena itulah Wheeler (1977:23) menyatakan: *"Quantifiers are most useful in rewriting assertions that cannot be classified as true or false … so that they can be classified either as true or false."* yang dapat diterjemahkan menjadi: "Kuantor sangat berguna dalam mengubah kalimat berita yang tidak dapat dinyatakan bernilai benar atau salah … sedemikian sehingga kalimat berita tersebut dapat dikategorikan sebagai kalimat yang bernilai benar saja atau salah saja."

Menurut jenisnya kuantor dibedakan menjadi 2, yaitu Kuantor Universal (Kuantor Umum) yang menggunakan kata "untuk setiap" atau "untuk semua" dan Kuantor Eksistensial (Kuantor Khusus) yang menggunakan kata "beberapa", "terdapat'" atau "ada". Sedangkan kuantor "tidak ada *x*" dapat diubah ke bentuk "semua *x* tidak" atau "setiap *x* tidak". Secara lengkap kedua macan kuantor tersebut akan dibahas pada bagian berikut ini.

- **Kuantor Universal**

Kuantor jenis ini mempunyai lambang " dan dibaca "untuk setiap" atau "untuk semua". Misalkan $p(x)$ adalah suatu kalimat terbuka, pernyataan "*x* . $p(x)$ dibaca "untuk setiap *x* berlaku $p(x)$" atau "untuk semua *x* berlaku $p(x)$". Berikut ini adalah beberapa contoh pernyataan berkuantor universal:

Contoh 1

'*Semua* artis adalah cantik.' Pernyataan berkuantor universal ini menggambarkan adanya dua himpunan, yaitu himpunan artis dan himpunan orang cantik. Di samping itu, pernyataan tadi menjelaskan tentang semua artis namun tidak menjelaskan tentang semua orang cantik. Pernyataaan itu menjelaskan bahwa setiap anggota himpunan artis adalah merupakan anggota himpunan orang cantik, namun pernyataan itu tidak menjelaskan bahwa setiap anggota himpunan orang cantik adalah merupakan anggota himpunan artis. Hal terpenting yang pada akhirnya didapat adalah, pernyataan berkuantor: "*Semua* artis adalah orang cantik," menunjukkan bahwa himpunan artis termuat atau menjadi himpunan bagian dari himpunan orang cantik. Pernyataan "*Semua* artis adalah cantik," ini akan bernilai benar jika telah ditentukan criteria artis dan kriteria cantik serta dapat ditunjukkan bahwa setiap artis yang merupakan anggota himpunan artis adalah cantik.

Namun pernyataan berkuantor universal tadi akan bernilai salah jika dapat ditunjukkan adanya satu atau beberapa orang yang dapat dikategorikan sebagai artis namun ia tidak termasuk pada kriteria cantik.

Contoh yang menunjukkan salahnya suatu pernyataan berkuantor universal ini disebut dengan *counterexample* atau contoh sangkalan sebagaimana dinyatakan Clemens, O'daffer, dan Cooney (1984: 49) berikut: "*A counterexample is a single example that shows a generalization to be false* "

Contoh 2
Jika $p(x)$ adalah "$x + 4 > 1$" dengan x adalah peubah pada himpunan bilangan bulat B maka (untuk setiap $x \in$ B) $p(x)$ adalah ((untuk setiap $x \in$ B) $x + 4 > 1$ dan. Pernyataan ini bernilai salah, karena jika x-nya diganti dengan bilangan bulat –5 misalnya akan didapat pernyataan $-5 + 4 > 1$ yang bernilai salah.

Contoh 3
Jika $q(n)$ berarti: $2^n - 1$ adalah bilangan prima untuk n bilangan bulat, maka (($\forall$ $n \in$ B) $q(n)$ berarti: (($\forall$ $n \in$ B) $2^n - 1$ adalah bilangan prima, dan dibaca: "Untuk setiap bilangan bulat n berlaku $2^n - 1$ adalah bilangan prima". Pernyataan ini bernilai salah. Mengapa salah? Bagaimana dengan pernyataan ((untuk setiap $x \in$ R) $x^2 = x$, bernilai salah juga. Mengapa?

Jika pernyataan berkuantor universal, seperti *"Semua* artis adalah cantik" bernilai benar maka pernyataan itu dapat ditunjukkan dengan Diagram Venn berikut. Sebagaimana dijelaskan di bagian depan, himpunan artis A harus termuat atau menjadi himpunan bagian dari himpunan manusia cantik C; atau A $\subset$ C. Paling tidak, A dan C bisa saja sama atau A = C.

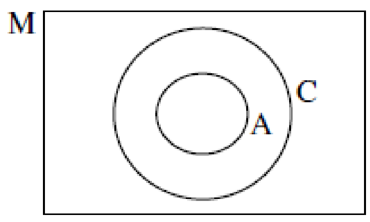
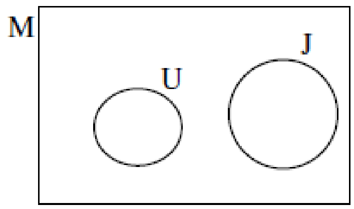
	M = {semua manusia} A = {artis} C = {cantik}.

Diagram 2.3.14

Berdasarkan Diagram Venn di atas, para siswa diharapkan dapat menyimpulkan bahwa suatu pernyataan berkuantor universal dapat diubah menjadi suatu implikasi. Pada contoh di atas, pernyataan berkuantor universal: “Semua artis adalah cantik.” adalah ekivalen dengan implikasi: “Jika x adalah artis maka x adalah cantik.”

Sebagaimana dinyatakan di bagian depan, pernyataan berkuantor dengan kata awal “Tidak ada… .” dapat diubah ke bentuk pernyataan berkuantor universal. Contohnya, jika pernyataan berkuantor “Tiada murid SMU yang senang mendapat nilai ulangan jelek,” bernilai benar, maka pernyataan tersebut dapat digambarkan dengan Diagram Venn 2.3.15.
Dengan demikian, jika pernyataan “Tiada murid SMU yang senang mendapat nilai ulangan jelek,” bernilai benar dan jika digambarkan dengan Diagram Venn, pernyataan itu akan menyebabkan $U \cap J = \varnothing$. Alasannya, tidak ada satupun siswa SMU yang senang mendapat nilai jelek, sehingga kedua himpunan tersebut akan saling asing. Karenanya, pernyataan “Tiada murid SMU yang senang mendapat nilai ulangan jelek,” itu adalah sama dengan pernyataan berkuantor universal: “Semua murid SMU tidak senang mendapat nilai ulangan jelek.”



M = {semua manusia}
U = {murid SMU}
J = {manusia yang senang mendapat nilai jelek}.

Diagram 2.3.15

- **Kuantor Eksistensial**

Kuantor jenis ini mempunyai lambang ∃ dan dibaca “beberapa”, “terdapat”, atau “ada”. Jika dimisalkan $p(x)$ adalah suatu kalimat terbuka maka $\exists\, x \ni p(x)$ dibaca “terdapat x sedemikian sehingga berlaku $p(x)$”.

Contoh 1
“Terdapat bilangan asli x sedemikian sehingga $x^2 - 5x + 6 = 0$,” atau “Beberapa bilangan asli x memenuhi $x^2 - 5x + 6 = 0$.”

Kata “beberapa” atau “*some*” menurut Copi (1978:179) adalah *indefinite* atau tidak terdefinisikan secara jelas. Apakah kata “beberapa” berarti “paling sedikit satu,” “paling sedikit dua,” ataukah berarti “paling sedikit seratus”?. Karena itu, meskipun dapat berbeda dengan pengertian sehari-hari, kata ‘beberapa’ adalah berarti “paling sedikit satu”. Dengan demikian, untuk menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan berkuantor eksistensial adalah cukup dengan menunjukkan adanya satu anggota Himpunan Semesta yang memenuhi. Karena dapat ditunjukkan bahwa untuk $x = 2$ atau $x = 3$ memenuhi persamaan $x^2 - 5x + 6 = 0$ sehingga dapat disimpulkan bahwa pernyataan berkuantor eksistensial “Beberapa bilangan asli x memenuhi $x^2 - 5x + 6 = 0$,” memiliki nilai benar.

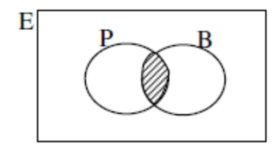
Contoh 2

Jika $p(x)$ adalah “$x^2 + 4x + 3 = 0$ dengan x bilangan asli A, ” maka $(\exists\ x \in A)$ $p(x)$ adalah $(\exists\ x \in \mathrm{A})$ $x^2 + 4x + 3 = 0$ yang dibaca “Ada bilangan asli x sedemikian sehingga $x^2 + 4x + 3 = 0$”. Pernyataan ini bernilai salah. Mengapa?

Jika $p(x)$ adalah “$x^2 + 4x + 3 = 0$ dengan x bilangan real R, ” maka $(\exists\ x \in \mathrm{R})$ $p(x)$ adalah $(\exists\ x \in \mathrm{R})$ $x^2 + 4x + 3 = 0$ yang dibaca “Ada bilangan real x sedemikian sehingga $x^2 + 4x + 3 = 0$”.
Pernyataan ini bernilai benar. Mengapa?

$(\exists\ x \in \mathrm{B})$ $2x + 3 = 4$. Pernyataan ini bernilai salah. Mengapa?

Pernyataan berkuantor eksistensial “Ada pria yang baik,” menunjukkan adanya himpunan manusia sebagai himpunan semestanya (E), adanya himpunan pria (P) dan adanya himpunan manusia yang baik (B). Jika pernyataan berkuantor eksistensial “Ada pria yang baik,” bernilai benar maka dapat ditarik suatu kesimpulan akan adanya anggota Himpunan Semesta (minimal satu anggota) yang merupakan anggota himpunan pria dan juga merupakan anggota manusia yang baik. Artinya, kedua himpunan tersebut tidak saling asing. Dengan demikian, $P \cap B = \varnothing$, yang dapat ditunjukkan dengan Diagram Venn berikut.



E = {semua manusia}
P = {semua pria}
B = {semua orang baik}.

Diagram 2.3.16

Berdasar Diagram Venn di atas yang menunjukkan PÇB _ f , maka pernyataan berkuantor eksistensial dapat dinyatakan dalam bentuk konjungsi. Contohnya, pernyataan berkuantor eksistensial: “Ada pria yang baik,” adalah sama dengan konjungsi berikut: “Ada *x* sedemikian sehingga *x* adalah pria dan *x* adalah baik”.

- **Negasi Pernyataan Berkuantor Universal**

Sudah dibahas di bagian depan bahwa pernyataan p (contohnya 10 habis dibagi 5) yang bernilai benar akan mengakibatkan pernyataan ~p (yaitu 10 tidak habis dibagi 5) bernilai salah. Sebaliknya, pernyataan q (contohnya 8 adalah bilangan prima) yang bernilai salah mengakibatkan pernyataan ~q (yaitu 8 adalah bukan bilangan prima) bernilai benar. Secara umum, suatu pernyataan p yang bernilai benar akan menyebabkan ~p bernilai salah, dan jika p bernilai salah maka ~p akan bernilai benar seperti ditunjukkan tabel kebenaran di bawah ini.

p	~p
B	S
S	B

Tabel 2.3.17

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa negasi pernyataan berkuantor adalah pernyataan lain yang bernilai benar jika pernyataan awalnya bernilai salah dan akan bernilai salah jika pernyataan awalnya bernilai benar. Kesimpulan inilah yang menjadi dasar penentuan negasi atau ingkaran suatu pernyataan berkuantor.

Bagian berikut ini akan membahas tentang negasi atau ingkaran pernyataan berkuantor, dimulai dengan negasi pernyataan berkuantor universal, lalu negasi pernyataan berkuantor eksistensial, dan diakhiri dengan negasi pernyataan berkuantor yang memuat dua peubah atau lebih.
Perhatikan dua pernyataan berkuantor r dan s berikut:

r : Semua Guru Indonesia kaya.

s : Semua bilangan jika dibagi 1 akan menghasilkan bilangan itu sendiri.

Pertanyaan tantangan yang dapat diajukan Bapak atau Ibu Guru kepada siswa di antaranya adalah: “Bagaimana menentukan negasi dari dua pernyataan berkuantor universal di atas?” dan “Apa yang dapat Anda lakukan untuk menjawab pertanyaan di atas?” Untuk menjawab pertanyaan di atas, dengan bantuan Bapak atau Ibu Guru para siswa harus mengingat dan menyimpulkan lebih dahulu bahwa: Karena pernyataan: “Semua Guru

Indonesia kaya," merupakan pernyataan awal yang bernilai salah, maka untuk mencari negasi atau ingkaran dari pernyataan tadi adalah menurunkan dari pernyataan awal tersebut suatu pernyataan lain yang bernilai benar. Sedangkan negasi atau ingkaran dari pernyataan "Semua bilangan jika dibagi 1 akan menghasilkan bilangan itu sendiri", yang bernilai benar adalah suatu pernyataan lain yang bernilai salah.

Di dalam kehidupan sehari-hari, jika ada orang yang menyatakan di depan Bapak atau Ibu Guru bahwa "Semua Guru Indonesia kaya", apa yang Bapak atau Ibu akan lakukan? Mungkin Bapak atau Ibu akan menyatakan "Yang benar saja, masak saya yang berprofesi guru sampai saat ini belum punya rumah termasuk orang kaya?" Hal ini menunjukkan bahwa satu orang gurupun yang tidak termasuk kategori kaya dapat dijadikan dasar untuk mengingkari atau menegasikan pernyataan berkuantor tadi. Dengan demikian, negasi dari pernyataan berkuantor universal tadi adalah pernyataan berkuantor eksistensial yang dapat dipenuhi oleh minimal satu orang saja yang tidak memenuhi kriteria kaya tadi. Dengan demikian, negasi atau ingkaran "Semua Guru Indonesia kaya" adalah pernyataan berkuantor eksistensial yang tidak memenuhi kriteria kaya, yaitu "Beberapa Guru Indonesia tidak kaya"

Pernyataan berkuantor "Semua Guru Indonesia kaya", sebagaimana dibahas pada Bagian III di depan, menunjukkan bahwa himpunan Guru Indonesia (G) termuat atau merupakan himpunan bagian dari himpunan orang-orang kaya (K), sebagaimana ditunjukkan pada Diagram Venn berikut:

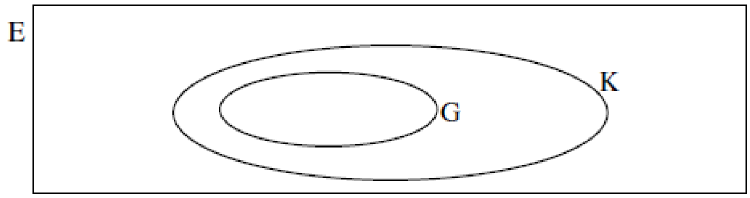
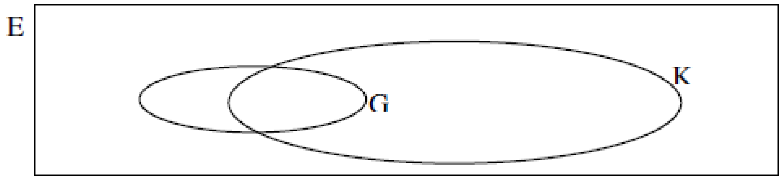


Diagram 2.3.18

Berdasar Diagram Venn di atas, negasi dari pernyataan "Semua Guru Indonesia kaya" yang bernilai salah adalah adanya minimal satu anggota G yang berada di luar K. Dengan kata lain, ada anggota G yang tidak menjadi anggota K sebagaimana ditunjukkan Diagram Venn berikut.



Digram 2.3.19

Dengan cara sama, negasi atau ingkaran dari pernyataan berkuantor universal “Semua bilangan jika dibagi 1 akan menghasilkan bilangan itu sendiri,” dengan nilai benar adalah pernyataan berkuantor eksistensial “Beberapa bilangan jika dibagi 1 akan tidak menghasilkan bilangan itu sendiri.” Negasi atau ingkaran dari “Semua bunga indah” adalah “Tidak benar bahwa semua bunga indah” atau “Beberapa bunga tidak indah”. Dengan simbol, negasi dari “$\forall x\ (x^2 \geq 0)$” adalah “$\forall x\ (x^2 < 0)$”. Secara umum negasi pernyataan kuantor universal dapat dinyatakan sebagai berikut:

Pernyataan	Negasi
$\forall\ x\ p(x)$	$\sim (\forall\ x\ p(x)) \equiv \exists\ x \sim p(x)$

- **Negasi Pernyataan Berkuantor Eksistensial**

Beberapa contoh pernyataan berkuantor eksistensial adalah: “Beberapa Guru Indonesia kaya,”dan “Beberapa segitiga merupakan segitiga siku-siku samakaki.”

Di dalam kehidupan nyata sehari-hari, jika ada orang yang menyatakan di depan Bapak atau Ibu Guru bahwa “Beberapa Guru Indonesia kaya”, apa yang Bapak atau Ibu akan lakukan? Mungkin Bapak atau Ibu akan menyatakan “Memang benar bahwa beberapa Guru Indonesia kaya”. Pernyataan lain yang jelas salahnya dari pernyataan tadi adalah “Semua Guru Indonesia tidak kaya.” Dengan demikian, negasi dari suatu pernyataan berkuantor eksistensial adalah pernyataan berkuantor universal yang seluruh anggotanya tidak memenuhi kriteria kaya tadi. Intinya, negasi atau ingkaran “Beberapa Guru Indonesia kaya” adalah pernyataan berkuantor universal yang tidak memenuhi kriteria kaya, yaitu “Semua Guru Indonesia tidak kaya” yang bernilai salah.

Pernyataan berkuantor “Beberapa Guru Indonesia kaya”, sebagaimana dibahas di depan, menunjukkan adanya (paling sedikit satu dan tidak tertutup kemungkinan untuk semua) anggota himpunan Guru Indonesia (G) yang sekaligus merupakan himpunan bagian dari himpunan orang-orang kaya (K), sebagaimana ditunjukkan pada Diagram Venn berikut:

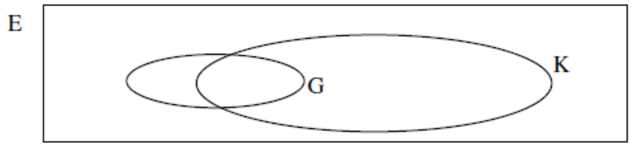
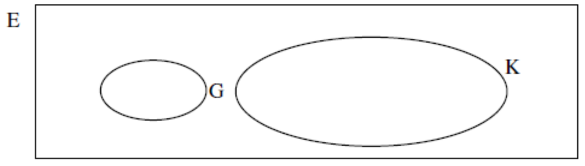


Diagram 2.3.20

Berdasar Diagram Venn di atas, dapatlah disimpulkan bahwa negasi pernyataan "*Beberapa* Guru Indonesia kaya" bukanlah "*Semua* Guru Indonesia kaya", dan juga bukan "*Beberapa* Guru Indonesia miskin". Alasannya, dua pernyataan terakhir ini dapat bernilai benar juga, padahal yang akan dicari adalah pernyataan yang bernilai salah. Sekali lagi, berdasar Diagram Venn di atas, dapatlah disimpulkan bahwa negasi "Beberapa Guru Indonesia kaya" dengan nilai benar adalah 'semua' Guru Indonesia harus tidak termasuk himpunan K. Dengan kata lain, semua anggota G harus tidak menjadi anggota K sebagaimana ditunjukkan Diagram
Venn berikut.



Digram 2.3.21

Dengan cara sama, negasi atau ingkaran dari pernyataan berkuantor eksistensial lainnya, yaitu "Beberapa segitiga merupakan segitiga siku-siku samakaki," dengan nilai benar adalah "Semua segitiga tidak ada yang merupakan segitiga siku-siku samakaki." Negasi dari pernyataan "Ada siswa yang senang matematika" adalah "Tidak benar bahwa ada siswa yang senang matematika" atau "Semua siswa tidak senang matematika". Secara umum negasi pernyataan kuantor eksistensial dapat dinyatakan sebagai berikut:

Pernyataan	Negasi
$\exists\, x\, p(x)$	$\sim (\exists\, x\, p(x)) \equiv \forall\, x \sim p(x)$

- **Negasi Pernyataan Berkuantor Yang Memuat Lebih Dari Satu Peubah**

Pernyataan berkuantor dengan dua peubah atau lebih sering juga ditemui, terutama pada mata pelajaran Aljabar. Contohnya, pernyataan berikut:

1. Ada (terdapat) bilangan asli x sehingga untuk setiap bilangan asli y akan berlaku $x \times y = y$. Pernyataan tersebut akan bernilai benar, karena 1 yang merupakan salah satu anggota himpunan bilangan asli jika dikalikan dengan bilangan asli lainnya akan menghasilkan bilangan asli itu sendiri. Notasi matematisnya adalah $(\exists\ x \in \text{A})(\ \forall\ y \in\text{A})\ x \times y = y$. Pernyataan berkuantor dengan dua peubah di atas bernilai benar.
2. Ada (terdapat) bilangan asli x sehingga untuk setiap bilangan asli y akan berlaku $x + y = y$. Pernyataan seperti ini bernilai salah karena tidak ada bilangan asli yang memenuhinya. Pengganti x yang memenuhi adalah 0, namun 0 bukan anggota himpunan bilangan asli namun 0 anggota himpunan bilangan cacah. Bagaimana notasi matematisnya?

Ada empat variasi untuk pernyataan berkuantor dengan dua peubah (Bunarso Tanuatmodjo,
1987:45–46) beserta artinya yaitu:

-. $\forall x\ \ \forall y\ p(x, y)$: "Untuk setiap x dan untuk setiap y berlaku $p(x$, y)."
-. $\forall x\ \ \exists y\ p(x, y)$: "Untuk setiap x, ada y sehingga berlaku $p(x, y)$."
-. $\exists x\ \forall y\ p(x, y)$: "Ada x sehingga untuk setiap y berlaku $p(x, y)$."
-. $\exists x\ \exists y\ p(x, y)$: "Ada x dan ada y sehingga berlaku $p(x, y)$."

Contoh :

1. $(\forall\ x \in\ \ \text{A})(\exists\ y \in\text{A}) \ni x < y$
   Dibaca "Untuk setiap bilangan asli x terdapat asli y sedemikianhingga $x < y$". Untuk $x = 10$ misalnya dapat ditentukan $y = 12$ yang memenuhi $x < y$. Begitu juga untuk nilai x lainnya, dapat ditentukan nilai y yang memenuhi $x < y$. Dengan demikian, untuk setiap nilai x, dapat ditentukan satu atau lebih nilai y yang memenuhi $x < y$. Karena itu, pernyataan ini bernilai benar.

2. $(\exists\ x \in \text{A})(\forall\ y \in\text{A}) \ni x < y$.
   Dibaca: "terdapat bilangan asli x sehingga untuk setiap bilangan asli y berlaku $x < y$." Pernyataan ini bernilai salah, Anda tahu sebabnya?

Negasi dari kuantor yang memuat lebih dari satu peubah menggunakan pola yang sama dengan negasi pernyataan berkuantor dengan satu peubah, yaitu:

Pernyataan	Negasi
$\forall\ x\ p(x)$	$\sim(\forall\ x\ p(x)) \equiv \exists\ x \sim p(x)$

$\exists\ x\ p(x)$	$\sim(\exists\ x\ p(x)) \equiv \forall\ x \sim p(x)$

3. $\sim[\ \exists x\ \forall y\ p(x,y) \equiv \sim[\exists x\ \{\forall\ y\ p(x,y)\}]$
   $\equiv \forall x \sim[\forall y\ p(x,y)]$
   $\equiv \forall x\ \exists y \sim p(x,y)$.
4. $\sim[\exists x\ \forall y\ (p(x) \Rightarrow q(y))] \equiv \forall x\ \exists y \sim [p(x) \Rightarrow q(y)]$
   $\equiv \forall x\ \exists y\ \ (\mathrm{p}(x) \wedge \sim q(y))$

Contoh ini menunjukkan bahwa untuk menentukan negasi pernyataan berkuantor dengan dua peubah atau lebih haruslah menggunakan kombinasi pola atau aturan dasar yang bersesuaian.

Latihan 3.

1. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi berikut:
   a. Jika suatu bendera adalah bendera Jepang, maka ada bintang pada bendera tersebut.
   b. $a > 0 \Rightarrow a^3 > 0$
   c. $a = 0 \Rightarrow ab = 0$
   d. Jika dua persegipanjang kongruen maka luasnya sama.
   e. $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$
   f. Jika segitiga ABC adalah segitiga samasisi maka sisi-sisi segitiga tersebut samapanjang.
2. Tentuka nilai kebenaran implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi dari soal di atas.
3. Apa yang anda dapatkan dari hasil pada kegiatan 2 itu?
4. Buatlah ingkaran dari implikasi, beserta konvers, invers, dan kontraposisinya.
5. Apa yang anda dapatkan dari hasil pada kegiatan 4 itu?
6. Dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan bulat, gunakan kuantor dengan uruturutan: “Semua…”, “Beberapa…”, “Tidak ada…”, pada kalimat terbuka di bawah ini, sehingga didapat pernyataan berkuantor yang bernilai benar.
   a. $2x - 4 = -5$
   b. $x + 2 = -5$
   c. $x^2 - 16 = 0$
   d. $x + 3 = 3 + x$
7. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berikut ini.

a. Setiap perwira TNI adalah laki-laki.
b. Beberapa Gubernur di Indonesia adalah perempuan.
c. Setiap bilangan jika dipangkatkan 0 akan bernilai sama dengan 1.
d. Setiap bilangan memiliki lawan (invers penjumlahan).
e. Setiap bilangan memiliki kebalikan (invers perkalian).
f. Setiap persegi adalah jajargenjang.
g. Setiap jajargenjang adalah trapesium.
h. Terdapat bilangan sedemikian sehingga setiap bilangan jika ditambahkan ke bilangan tersebut akan menghasilkan bilangan itu sendiri.
i. Terdapat bilangan sedemikian sehingga setiap bilangan jika dibagi dengan bilangantersebut akan menghasilkan bilangan itu sendiri.
j. Setiap jajargenjang memiliki simetri setengah putaran.
k. Beberapa siswa menganggap matematika sulit.
l. Setiap tahun yang habis dibagi 4 adalah tahun kabisat.

8. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berikut ini dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan real.
   1. $\exists x\ (x^2 = x)$
   2. $\exists x\ (|x| = 0)$
   3. $\forall \mathrm{x}\ (x < x + 1)$
   4. $\forall x\ (x - 1 = x)$
   5. $\exists x\ (x^2 - 2x + 1 = 0)$
   6. $\forall x\ (x^2 + 2x + 1 > 0)$
   7. $\exists x\ (|x| \geq 0)$
   8. $\forall x\ (x^2 - 3x + 2 = 0)$
9. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan di atas dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan asli.
10. Dengan menggunakan huruf yang disarankan, buatlah Diagram Venn-nya lalu tulis implikasi atau konjungsi yang sesuai dengan pernyataan-pernyataan berikut:
    a. Semua anjing mempunyai empat kaki (A, K).
    b. Beberapa matriks tidak memiliki invers (M, I).
    c. Semua laki-laki dapat dipercaya (L, P).
    d. Ada segitiga sama kaki yang bukan segitiga sama sisi (K, S).
    e. Tidak semua pulau di Indonesia didiami oleh penduduk (P, D).
11. Tentukan nilai kebenaran setiap pernyataan di bawah ini dengan semesta pembicaraannyaadalah X = {1,2,3,4,5}.
    a. $\forall x\ (4 + x < 10)$
    b. $\exists x\ (4 + x = 7)$
    c. $\forall x\ (4 + x \leq 7)$
    d. $\exists x\ (4 + x > 8)$

12. Tentukan negasi dari pernyataan berikut:

a. $\exists x\ (x^2 = x)$
b. $\exists x\ (|x| = 0)$
c. $\forall x\ (x < x + 1)$
d. $\forall x\ (x - 1 = x)$
e. $\exists x\ (x^2 - 2x + 1 = 0)$
f. $\forall x\ (x^2 + 2x + 1 > 0)$
g. $\exists x\ (|x| \geq 0)$
h. $\forall x\ (x^2 - 3x + 2 = 0)$

13. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berikut ini dengan semesta pembicaraan A = {1, 2, 3}.

1. $\forall x\ \exists y\ (x + y = 4)$
2. $\exists x\ \forall y\ (x + y = 4)$
3. $\exists x\ \forall y\ (xy = x)$
4. $\exists x\ \forall y\ (xy = y)$
5. $\exists x\ \forall y\ (x^2 < y + 1)$
6. $\exists x\ \forall y\ \forall z\ (x^2 + y^2 < z^2)$
7. $\exists x\ \forall y\ \exists z\ (x^2 + y^2 < z^2)$
8. $\exists x\ \forall y\ (x^2 < y + 1)$
9. $\forall x\ \exists y\ (x^2 < y + 1)$
10. $\forall x\ \exists y\ (x^2 + y^2 < 10)$
11. $\exists x\ \forall y\ (x^2 + y^2 > 10)$
12. $\exists x\ \exists y\ (x^2 + y^2 > 10)$
13. $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x^2 + y^2 < z^2)$
14. $\exists x\ \exists y\ \exists z\ (x^2 + y^2 < z^2)$

14. Tentukan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan berikut dengan semesta himpunan bilangan real R.

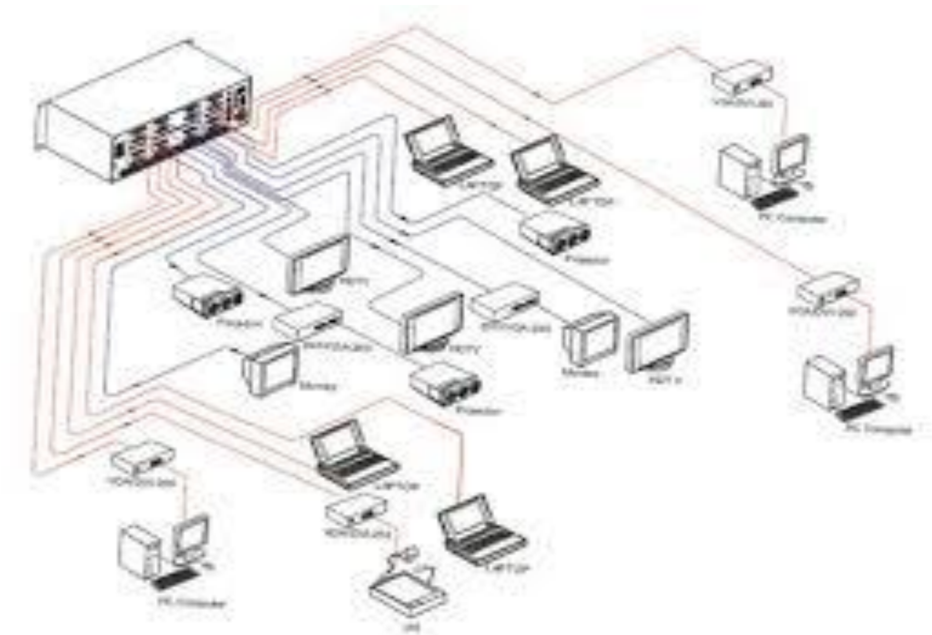
a. $\forall x\ \exists y\ (x + y = 6)$
b. $\exists x\ \forall y\ (x + y = 6)$
c. $\forall x\ \exists y\ (x + y = 6)$
d. $\forall x\ \forall y\ (x + y = 6)$
e. $\exists x\ \exists y\ (x + y = 6)$
f. $\exists x\ \forall y\ (x + y = x)$
g. $\exists x\ \forall y\ (x + y = y)$
h. $\forall x\ \forall y\ (x + y > 0)$
i. $\forall x\ \exists y\ (xy = 6)$

15. Tentukan negasi pernyataan-pernyataan berikut.

a. $\exists x\ \forall y\ [p(x) \wedge q(y)]$
b. $\forall x\ \forall y\ [\sim p(x) \vee q(y)]$
c. $\exists x\ \forall y\ [p(x) \Rightarrow q(y)]$
e. $\exists x\ \exists y\ (\ |x\ y| = |\ x\ |\ |\ y\ |\ )$

BAB 3

PENGAJARAN MATRIKS



Kalau pengajaran matriks, mungkin tidak perlu lagi dijelaskan pendekatannya, karena hampir semua kehidupan masyarakat dan di banyak kegiatan kita memerlukan matriks. Sehingga sangat diperlukanlah matriks ini dikuasai oleh setiap mahasiswa dengan baik.

BAB 3

PENGAJARAN MATRIKS

3.1. Pendahuluan

Sangat banyak dari para guru yang memperkenalkan matrik kepada siswa adalah dengan lansung memberikan definisi matrik, Misalnya matrik adalah . . . . . dan kemudian memberikan contoh matrik. Lalu memperkenalkan rumus-rumus dan aturan yang berlaku pada matrik, mulai dari penjumlahan/pengurangan, perkalian, invers, jenis-jenis matrik, sampai menghitung determinat dan lain sebagainya. Sebagus apapun kita mengajar, kalau yang kita berikan kepada siswa adalah seperti hal yang disebutkan di atas, pertanyaannya adalah " APAKAH BETUL KITA SUDAH MENGAJARKAN SISWA BERMATEMATIKA" Atau kita hanya mengajar siswa berhitung tanpa makna, siswa tidak tau apa yang dia hitung, sepintar apapun siswa berhasil kita didik dapat menghitung determinat atau invers dari suatu matrik, pernyataannya adalah "TAUKAH SISWA APA MAKNA YANG MEREKA HITUNG TERSEBUT" Mampupun siswa tersebut menghitung sejuta soal yang sulit, apa gunanya. Kalau dia hanya menjadi tukang hitung.

Dari pada mengajar siswa menjadi tukang hitung lebih baik pasang saja chip di belakang kepalanya, maka dia akan lebih cepat dan tepat dalam menghitung apapun ?

Jadi, janganlah para guru hanya mengajarkan siswa berhitung, karena dengan berhitung tidak akan banyak membantu mengembangkan kemampuan psyikomotorik siswa apalagi mengembangkan kemampuan analisisnya dalam berfikir. Ajarkanlah kepada mereka konsep yang benar serta makna daripada apa yang mereka lakukan. Banyak cara yang dapat ditempuh dalam memperkenalkan suatu konsep kepada para siswa, memang dalam banyak buku teks tidak ada, akan tetapi kitalah sebagai guru yang mesti mencari dan berinovasi dalam melakukan proses pembelajaran.

Dalam memperkenalkan matrik kepada siswa, mungkin anda dapat melakukan langkah atau memberikan suatu cerita sebagai berikut :

Gambar 3.1.1

Kekurangan isi dalam dalam buku

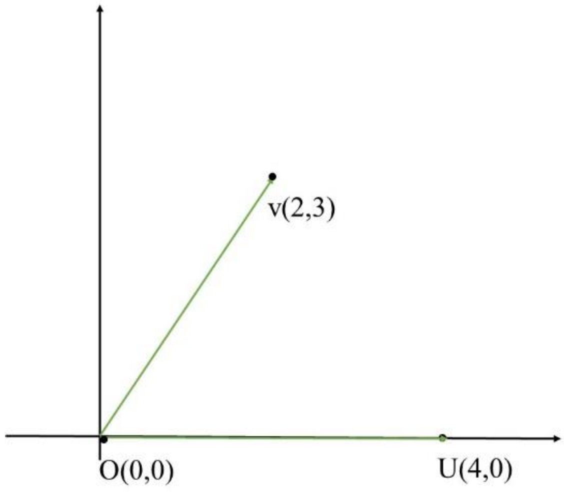
3.4.Determinant dan Invers Matriks

Sangat perlu diperhatikan disini bahwa selama ini siswa selalu disiksa dengan menghapal rumus, misalnya dalam menentukan determinan matrik $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$, begitu juga untuk matrik yang berordo 3×3, tentunya hal ini akan lebih menyiksa lagi, karena rumusnya akan sangat rumit dan panjang. Hebatnya lagi, siswa kita dapat dengan mudah menghitung determinat matrik. Akan tetapi mereka tidak tau apa sebenarnya yang mereka hitung tersebut. Maka seringlah terjadi dalam pembelajaran matemtika, siswa hanya kita ajarkan berhitung saja. Sehingga banyak orang memperolok-olokkan, bahwa kalau siswa hanya diajari berhitung saja, tanpa paham apa yang mereka hitung, maka ganti saja otak mereka dengan chip kalkulator, sehingga mereka tidak perlu sekolah dan akan lebih cepat dalam berhitung. Pesan yang ingin disampaikan disini adalah jangan sampai kita ganti otak pelajar kita dengan kalkulator. Untuk apa bersekolah kalau hanya akan mengjadi tukang hitung. Untuk menjawab tantangan tersebut, maka untuk itu perlu kita carikan cara pendekatan pembelajaran agar siswa dapat memahami apa makna dari pada determinat tersebut.

3.4.1. Determinan Matriks

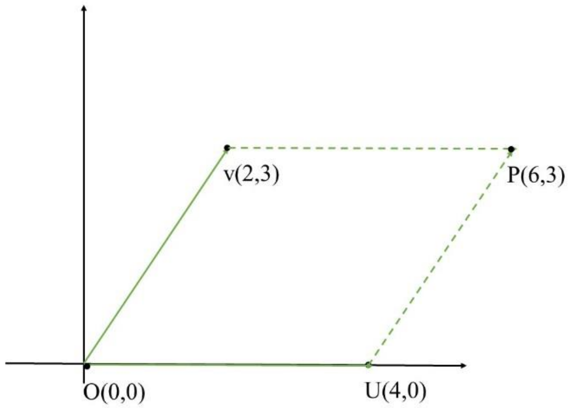
Perhatikan dan lakukan langkah berikut :

Gambar sebarang vector, misalkan vektor *u*(4,0) kemudian gambar lagi vektor *v*(2,3) seperti gambar 3.2.1a di atas



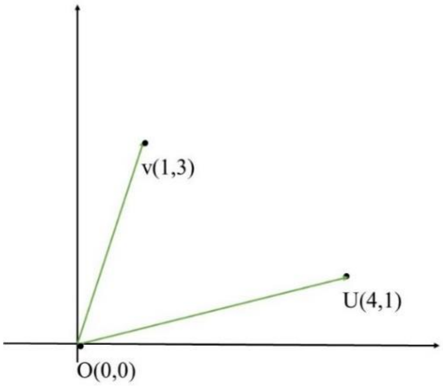
Gambar 3.2.1a

dan gambarlah jajaran genjang OUPV seperti gambar 3.2.1b, kemudian minta siswa untuk menghitung luas jajaran genjang OUPV. Lalu berinovasilah guru untuk menjelaskan 4×3 - 2×0 dengan memperkenalkan bentuk $|A| = \det\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

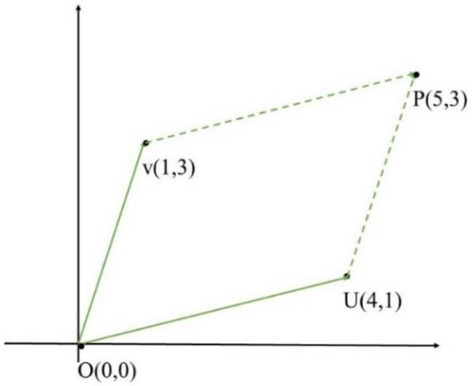


Gambar 3.2.1b

Selanjutlanya buat vektor lain, misalnya buat vektor $u(4,1)$ dan vektor $v(1,3)$ seperti gambar 3..2.2a, kemudian kembali minta siswa menggambarkan jajaran genjang OUPV, sekali lagi berinovasilah guru untuk menjelaskan makna 4×3 - 1×1 dan juga dengan memperkenalkan bentuk $|A| = \det\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

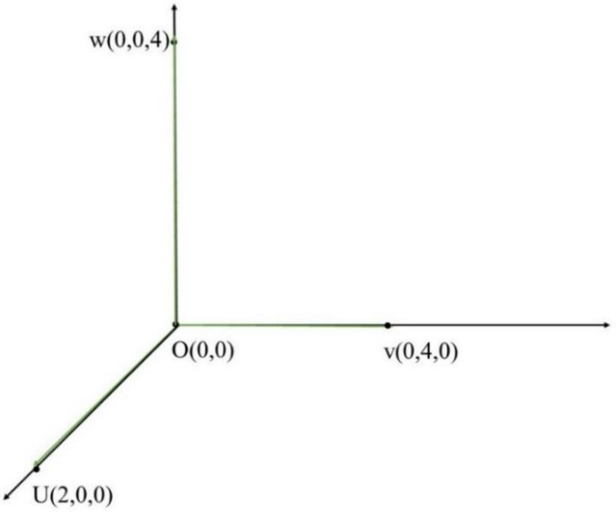


Gambar 3.2.2a



Gambar 3.2.2b

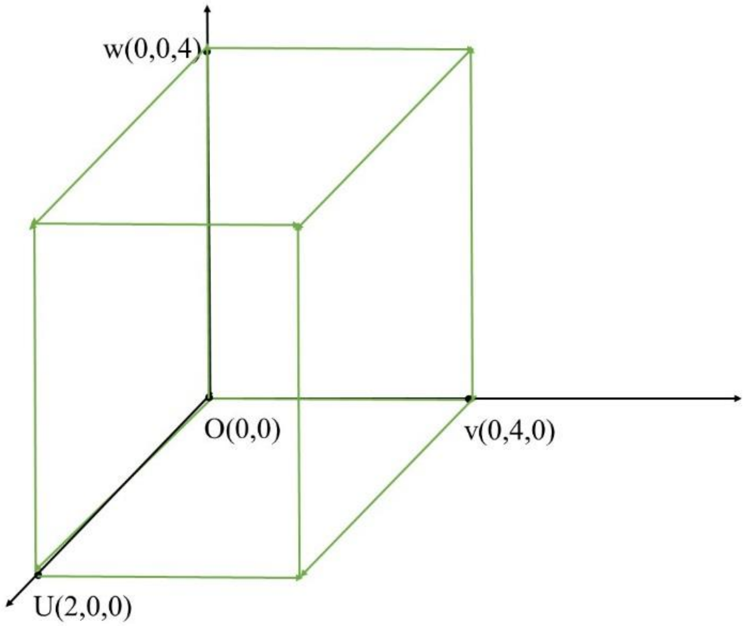
Jika siswa belum memahaminya maksud yang akan di capai, maka guru dapat menbah beberapa gambar lagi, ***dengan harapan akhirnya siswa yang menyimpulkan bahwa*** : $|A| = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$ Proses ini diharapkan siswa dapat memahami apa sebenarnya yang kita hitung waktu menghitung determinat tersebut. Setelah siswa memahaminya, elanjutnya anda dapat melakukan seperti yang ada diberbagai buku teks misalnya. Jika diketahui matriks A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, maka hasil kali antara 3 dan 5 dikurangi hasil kali 6 dan 2 yaitu 15 – 12 = 3 dinamakan **determinan.**



Gambar 3.2.3a

Langkah selanjutnya akan lebih menarik lagi jika anda meminta siswa menghitung volume balok yang terbentuk dari vector *u*,*v* dan *w* seperti gambar 3.2.3a di atas

Ada baiknya siswa yang diminta untuk menggambarkan balok seperti gambar 3.2.3b, karena banyak makna yang perlu digali oleh siswa dalam menggambarkanntya.

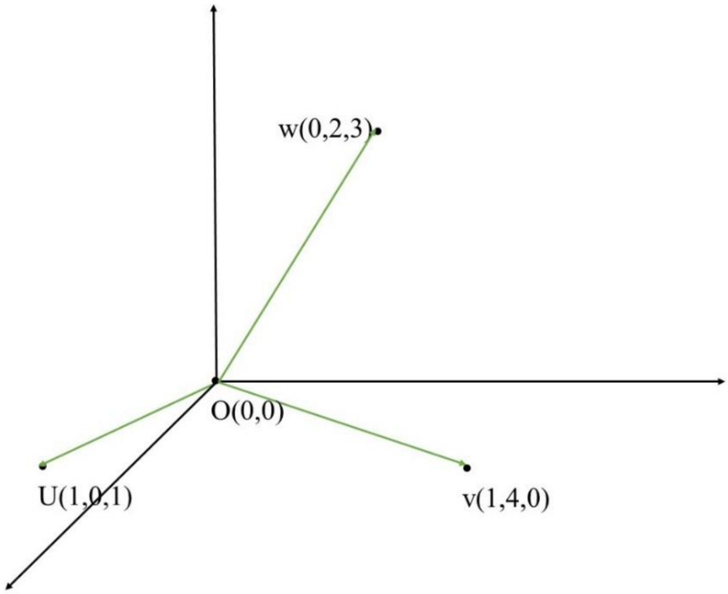


Gambar 3.2.3b.

Selanjutnya mintalah siswa untuk menghitung volume kubus pada gambar 3.2.3.b di atas. Setelah itu berinovasilah guru seperti memperkenalkan determinat matrik 2×2 di atas untuk menghitung

$$|A| = det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Untuk langkah selanjutnya guru dapat meminta siswa menggambarkan vektor u(1,0,1), v(1,4,0) dan w(0,2,3) seperti gambar 3.2.4a di bawah ini. Atau dapat juga diminta siswa secara berkelompok untuk menggambarkan 3 buah vektor yang berbeda dan sebaiknya masing-masing vektor berada pada kuadrat yang berbeda, karena kalau pada kuadrat yang sama, nanti hasilnya kurang menarik.

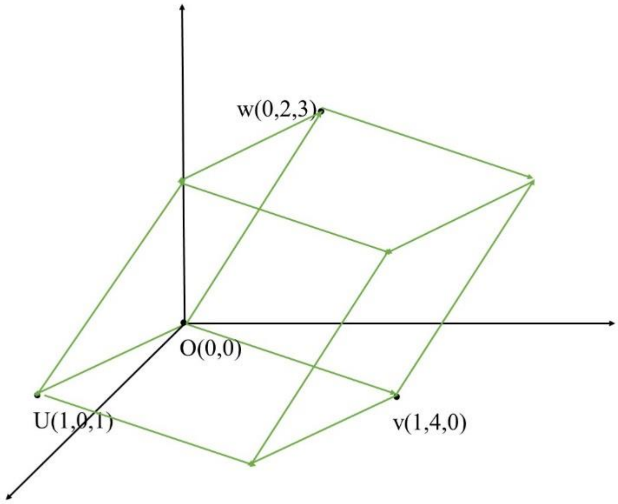


Gambar 3.2.4a

Kemudian bimbinglah siswa untuk mengkontruksi kubus dari ketiga vektor di atas. Mungkin hasilnya akan terlihat seperti gambar 3.2.4b. jika demikian dan siswa ada yang terampil untuk merotasi gambar tersebut, maka minta siswa tersebut untuk merotasinya dan jika tidak ada siswa yang mampu merotasinya bimbinglah siswa tersebut untuk merotasinya. Kemudian mintalah siswa untuk menghitung volume balok tersebut. Setelah siswa dapat menghitung volume balok tersebut, maka berinovasilah guru untuk menunjukkan bahwa volume balok tersebut tidak lain adalah determinat 3x3 dan bimbinglah siswa untuk mempormulasikan

$$|A| = det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Sebaiknya guru dapat melakukan inovasi dengan memberikan berbagai bentuk pendekatan yang akan memudahkan siswa/mahasiswa untuk dapat memahami, apa yang dimaksud dengan determinan tersebut. ***Sekali lagi perlu ditekankan bahwa jangan sampai siswa hanya pandai menghitung nilai determinat, akan tetapi siswa/mahasiswa tidak tau apa yang mereka hitung.***



Gambar 3.2.4b

Setelah penjelasan untuk determinat matrik 3×3 seperti di atas, guru dapat menjelaskan penulisan determinan adalah dengan garis lurus, yaitu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ maka determinan matriks A

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Setelah siswa betul2 memahaminya, maka dapat ditingkatkan pemahaman siswa dengan mengerjakan soal berikut ini. Khusus untuk matriks ordo 2x2. Nilai determinannya dapat ditentukan dengan cara : hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dikurangi hasil kali elemen-elemen pada diagonal samping.

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka determinan matriks A didefinisikan :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Contoh:

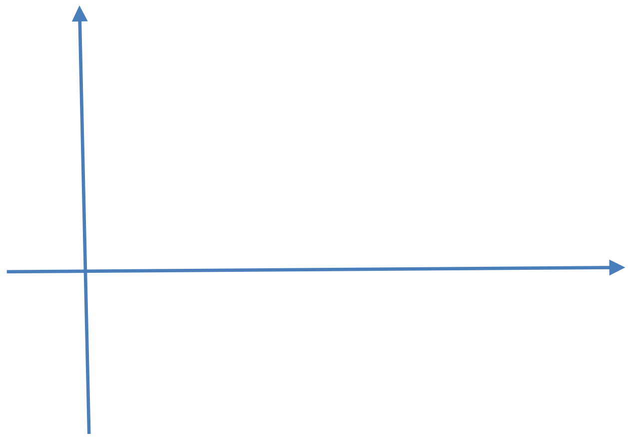
1) Diketahui matriks A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Hitunglah determinan matriks A dan gambarkanlah luasan yang dimaksud oleh perhitungan determinan tersebut

Jawab :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \ldots.$$

Silakan buat gambarnya pada daerah di bawah ini



Selanjutnya dapat dipermahir penguasaan siswa dengan mengerjakan soal berikut

2) Diketahui matrikls C = $\begin{pmatrix} x & x \\ -6 & -3x \end{pmatrix}$; jika det C = 0 tentukan nilai x

Jawab :

det C = 0

$$\begin{vmatrix} x & x \\ -6 & -3x \end{vmatrix} = 0$$

$(x)(-3x) - (x)(-6) = 0$

$-3x^2 + 6x = 0$
$-x^2 + 2x = 0$
$x\,(-x + 2) = 0$
$x_1 = 0$ atau $-x + 2 = 0$
$x_2 = 2$
Jadi $x = 0$ atau $x = 2$.

Setelah siswa memahami bahwa determinat matrik 3×3 tersebut adalah ***tidak lain sebenarnya kita adalah menghitung volume***, barulah dapat kita mengasah/mengembangkan kemampuan atau skill siswa dengan menggunakan berbagai metoda untuk menghitung Determinant matrik 3×3. Misalnya dengan *suatu c*ara yaitu dengan meletakkan lagi elemen-elemen kolom pertama dan kedua disebelah kanan kolom ketiga. Perhatikan berikut ini.

Jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ maka determinan matriks A:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

(-) (-) (-) (+) (+) (+)

$|A| = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{31} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$

contoh :

Diketahui matriks $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Hitunglah determinan matriks B!

Jawab :

Memo;.
- Matriks yang determinannya nol (0) disebut matriks singular dan tidak mempunyai invers
- Matriks yang determinannya tidak nol (0) disebut matriks non singular dan

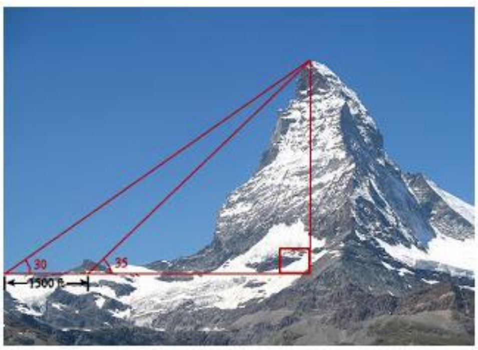
$$\text{Det } B = |A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

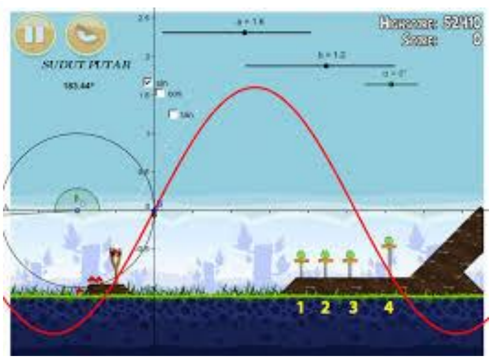
(-) (-) (-) (+) (+) (+)

= (2)(5)(2) + (-1)(1)(1) + (2)(-3)(4) – (2)(5)(1) – (2)(1)(4) – (-1)(-3)(2)
= 20 – 1 – 24 – 10 – 8 – 6
= 20 – 49
= -29

BAB 4

PEMBELAJARAN TRIGONOMETRI





Dalam kehidupan sehari – hari kita sering melihat seorang sedang mengukur jalan yang akan diperbaiki ataupun gedung bertingkat yang sedang dibangun. Para arsitek tersebut bekerja dengan menggunakan perbandingan trigonometri.Trigonometri menemukan penggunaannya yang sempurna pada Arsitektur modern. Kurva-kurva nan indah pada permukaan baja, bebatuan, kayu, dan lain-lain dapat diwujudkan karena potensi yang besar dari ilmu ini. Teknologi pencitraan dari komputer dapat digunakan dalam dunia kedokteran secara luar biasa untuk menemukan sumber beberapa penyakit ganas. Itu baru sebagian kecil dari manfaat trigonometri, perlu alasan lain untuk menemukan rumus-rumus trigonometri membantu hidup kita.Beberapa contoh penggunaan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari, misalya dalam navigasi untuk menemukan jarak dari pantai ke suatu titik di laut.

BAB 4

PEMBELAJARAN TRIGONOMETRI

4.1. Pendahuluan

Dalam berbagai pengajaran matematika, banyak sekali para guru yang terfokus untuk menjelaskan suatu konsep hanya terpaku pada pendekatan pada pendekatan pembelajaran yang ada dibuku ajar, hampir tidak ada para guru yang berpikir bagaimana melakukan pendekatan pembelajaran terhadap suatu topik agar dapat dengan mudah dipahami oleh para siswa. Padahal dibumi melayu ini sering dikumandangkan peribahasa tidak satu jalan ke Roma, tapi sering juga tak satupun jalan bisa dilalui. Memang tidak satupun jalan yang bisa dilalui inilah yang cukup seriang terjadi. Bukankan semenjak dari Sekolah Dasar kita sudah di Indotrinasi bahwa mengalikan pecahan tersebut, cukup kalikan pembilang dengan pembilang dan penyebut dengan penyebut, tanpa tau dari mana aturan itu berasal. Sayangnya lagi para guru tidak menjelaskan asal muasal dari aturan tersebut. Padahal banyak sekali cara yang dapat kita lakukan untuk memperkenalkan aturan tersebut, dan semestinya dengan bimbingan guru, muridlah yang menemukan aturan dari suatu konsep tersebut. Tapi walaupun banyak jalan yang dapat ditempuh, akan tetapi yang terjadi tidak satupun jalan yang bisa dilalui.

Kasus yang disebutkan di atas, terjadi dalam berbagai topik pengajaran matematika mulai dari tingkat Sekolah Dasar sampai tingkat Sekolah Menengah dan bahkan juga terjadi di tingkat Perguruan Tinggi. Maka kalau itu yang terjadi, bukankah kita sudah membunuh daya kognitif dari pada siswa, kalau itu yang dilakukan maka mustahil kita akan dapat membangun dan mengembangkakan kemampuan bernalar dan beranalisis dari pada siswa. Tidak jarang kita hanya mengajar siswa kita berhitung, padahal mata pelajaran yang di ajarkan adalah Matematika. Banyak dari para guru-guru yang masih memperkenalkan suatu rumus kepada siswa, kemudian dikembangkan beberapa contoh perhitungan. Cara ini sama sekali tidak bermatematik.

Kembali ke persoalan awal, mestinya kita mulai dengan membimbing siswa menemukan rumus yang terkait dengan bahan ajar yang sedang diberikan. Kemudian akan jauh lebih baik, jika kita dapat memberikan beberapa alternatif dari cara menemukan rumusan tersebut. Langkah seperti inilah yang merupakan tahap awal yang disebut dengan mengembangkan daya nalar/berfikir dari para siswa. Berikut ini diberikan beberapa contoh pendekatan atau cara untuk menemukan suatu formula. Hal ini diberikan untuk mengasah cara berfikir dan memberikan informasi kepada para pengajar, bahwa memang tidak satu jalan ke Roma dalam artian tidak satu cara yang dapat dilakukan untuk pendekatan pengajaran suatu bahan ajar.

4.2. Tujuan

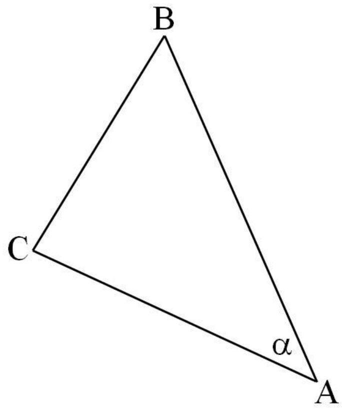
Dalam pengajaran Trigonometri ini peserta didik diharapkan dapat :

1. Memahami konsep sudut, sexadecimal, system Radian, Satuan Besar Sudut Sistem Sentisimal.
2. Memahami dan mendefinisikan dengan benar perbandingan trigonometri.
3. Mendefinisikan dan Melukis π menurut Kochansky

4.3. Pembelajaran Sudut.

Banyak dari pada siswa kita yang yang kesulitan menyebutkan definisi dari sinus suatu sudut, banyak yang mengatakan sinus suatu sudut adalah panjang sisi dihadapan sudut dibagi dengan panjang sisi miring. Bukankah definisi ini sedikit rancu. Bukankah sinus suatu sudut itu awalnya didefinisikan pada suatu segitiga yang siku-siku. Kemudian bagaimana dengan pernyataan sisi miring. Bagaimana kalau ketiga sisi dari segitiga tersebut adalah miring, perhatikan gambar 2.2.1 di bawah ini.

Bagaimana kita menghitung sin α, kalau digunakan aturan panjang sisi dihadapan sudut α, dibagi dengan panjang sisi miring. Bukankah ketiga sisi dari segitiga tersebut miring. Hal yang sama nanti juga akan terjadi untuk mendefinisikan cosines. Kalau kita gunakan definisi sisi di hadapan dibagi dengan sisi terpanjang, kondisi ini tidak tetap digunakan untuk menentukan nilai sinus pada koordinat katesius, terutama jika menghitung nilai trigonometri dari sudut selain untuk sudut 0^o s/d 90^o. Untuk itu kita perlu mencermati dengan lebih baik.



Gambar 4.3.1

Pada ΔABC yang siku-siku di C, berapa nilai cos α. Banyak yang mendefinisikan dengan panjang sisi yang mengapit dibagi dengan panjang sisi miring. Kembali seperti tadi, apa definisi sisi mengapit dan apa definisi sisi miring.

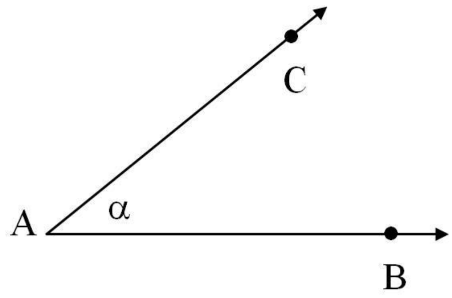
Perlu diperhatikan bahwa paradikma baru dalam pembelajaran adalah . pendidikan lebih menekankan pada proses pembelajaran (*learning*) dari pada pengajaran (*teaching).*

Mata pelajaran matematika perlu diberikan kepada semua peserta didik untuk membekali peserta didik dengan kemampuan berpikir logis, analitis, sistematis, kritis, dan kreatif, serta kemampuan bekerjasama. Standar kompetensi dan kompetensi dasar matematika yang disusun, khususnya dalam trigonometri, digunakan sebagai landasan pembelajaran untuk mengembangkan kemampuan tersebut di atas, di samping pula untuk mengembangkan kemampuan menggunakan trigonometri dalam pemecahan masalah dan mengkomunikasikan ide atau gagasan dengan menggunakan simbol, tabel, diagram, dan media lain. Kurikulum juga menuntut pendekatan pemecahan masalah merupakan focus dalam pembelajaran matematika. Juga diharapkan pembelajaran hendaknya dimulai dengan pengenalan masalah yang sesuai dengan situasi (*contextual problem*).

Namun sering dijumpai adanya kesulitan guru membelajarkan siswa dalam lingkup trigonometri dengan pendekatan di atas. Hal itu terutama karena guru lebih terbiasa dengan manipulasi rumus-rumus yang banyak dijumpai dalam trigonometri, sehingga trigonometri menjadi kering. Hal ini menyebabkan adanya anggapan di lapangan matapelajaran matematika, khususnya trigonometri masih merupakan mata pelajaran yang cenderung kurang menarik dan sukar bagi siswa. Jika dicermati, sesungguhnya banyak peluang mengembangkan pembelajaran berbasis masalah dan kontekstual dalam pembelajaran trigonometri. Inilah yang hendak dicoba diatasi melalui modul ini.

Ketika disajikan sebuah sudut lancip dan diminta menentukan berapa nilai sinus sudut tersebut, beberapa guru menyatakan belum dapat ditentukan besarnya karena tidak jelas segitiga siku-sikunya, dan beberapa yang lain mencari busur derajat, mengukur besar sudutnya, kemudian mencari nilai sinusnya menggunakan tabel atau kalkulator. Hanya sebagian sangat kecil saja yang menggambar segitiga siku-siku dengan sudut tersebut sebagai salah satu sudut lancipnya. Itu pun ukuran segitiganya sembarang, sehingga perlu melakukan pembagian bilangan dengan pecahan yang tidak mudah. Ini menunjukkan bahwa pengetahuan dasar tentang prosedur untuk menentukan perbandingan trigonometri suatu sudut belum mantap. Hal itu hanya salah satu saja dari beberapa penguasaan tentang dasar trigonometri yang belum mantap, meskipun mereka mungkin tidak merasa kesulitan untuk memanipulasi rumus. Kesulitan lain di antaranya ialah memulai pembelajaran menggunakan pendekatan pemecahan masalah dan pembelajaran kontekstual dalam trigonometri, yang terutama disebabkan terbiasa hanya menekankan pada manipulasi rumus.

Di dalam taksonomi belajar menurut Gagne, sudut adalah suatu konsep dasar. Salah satu cara untuk mendefinisikan pengertian sudut ialah melalui rotasi sinar garis seperti gambar 4.3.2



Gambar 4.3.2

. Misalkan kita membuat sinar garis AB, kemudian garis yang terbentuk diputar sebesar α, dengan titik pusat di A, katakana terbentuk sinar AC, maka sudut yang dibentuk oleh garis AB dan BA disebut sudut α yang dinotasikan dengan $\angle BAC = \alpha$. Atau boleh juga dinyatakan dengan $\angle CAB$.

Untuk langkah selanjutnya alangkah menariknya jika berangkat dari perputaran garis tersebut siswa diajak berdiskusi, agar masing-masing mengkonstruksi konsep sudut pada diri/pikiran siswa masingmasing. Ada tiga macam satuan besar sudut, yaitu yang mengacu pada sistem seksagesimal, sistem radian dan sistem sentisimal

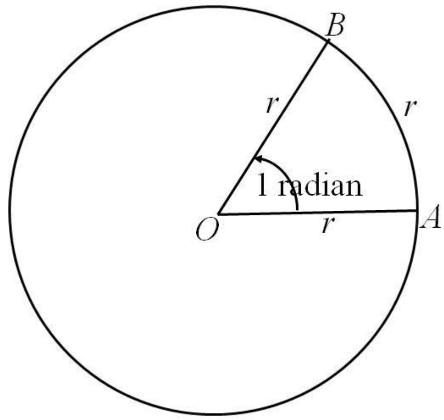
a. Sistem Seksadesimal

Untuk pembelajaran pengukuran sudut ini ditempuh langkah-langkah berikut :

Sebagai motivasi digunakan Sejarah Matematika, bahwa berdasar hasil penggalian situs purbakala di lembah Mesopotamia (sekarang termasuk daerah Irak), ditemukan bahwa ilmu pengetahuan yang dimiliki bangsa Babilonia pada masa itu sudah tinggi, bahkan dari peninggalan bangsa Sumeria (kira-kira 3.000 tahun sebelum Masehi) mereka membagi satu putaran penuh menjadi 360 bagian yang sama. Inilah yang menurut dugaan para ahli bahwa satu lingkaran penuh dibagi menjadi 360 derajat (selanjutnya ditulis dengan simbol 360°). Selanjutnya 1 derajat dibagi menjadi 60 bagian sama yang setiap bagian disebut “1 menit” dan satu menit dibagi menjadi 60 bagian sama yang dinamakan “1 detik”. Dengan demikian maka $1° = 60'$, $1' = 60''$ sehingga $1° = 3600''$. Hendaknya tidak dirancukan menit dan detik di sini sebagai ukuran besar sudut dengan menit dan detik ukuran waktu.

b. system Radian

Sebagai motivasi diceriterakan bahwa untuk pengukuran sudut elevasi
penembakan meriam dalam kemiliteran zaman dulu digunakan ukuran sudut yang bukan ukuran derajat, namun ukuran lain yang lazim kita kenal dengan ukuran radian. Dalam sistem radian yang dimaksud besar sudut satu radian adalah besar sudut pusat dari suatu lingkaran yang panjang busur dihadapan sudut tersebut adalah sama dengan jari-jari lingkaran tersebut. Pada gambar di atas diperoleh bahwa :



Gambar 4.3.3

$$\text{Besar sudut } AOB = \frac{\text{Panjang Busur } AB}{r} \text{ radian} = \frac{r}{r} \text{ radian} = 1 \text{ radian}$$

Dengan teknik bertanya untuk meningkatkan derajat keaktifan pembelajaran, maka dibahas hubungan antara sudut dalam seksagesimal dan radian. Untuk diingat bahwa dapat ditemukannya hubungan tersebut berdasar pada teorema kesebandingan antara besar sudut dan panjang busur serta luas juring dalam sebuah lingkaran.

Dengan mengingat bahwa $\pi \approx 3{,}14159265358979323846264338$3... dan

$$360^0 = \frac{2\pi r}{r} \text{ radian} = 2\pi \text{ radian}$$

Langkah selanjutnya mungkin para guru dapat membimbing siswa menunjukkan

1. $180^0 = \pi$ radian
2. 1 radian $\approx 57{,}\,296^0 \approx 57^0\ 17'\ 45'$
3. $1^0 \approx 0{,}017453$ radian

Untuk ukuran sudut yang lebih kecil dikenal :

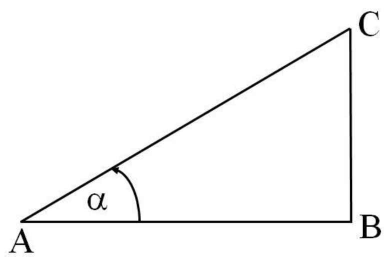
1. $1^g = 10^{dgr}$ (dibaca 10 decigrand)
2. $1^{dgr} = 10^{cgr}$ (dibaca 10 centigrand)
3. $1^{cgr} = 10^{mgr}$ (dibaca 10 miligrand)
4. $1^{mgr} = 10^{dmgr}$ (dibaca 10 decimiligran)

c. Satuan Besar Sudut Sistem Sentisimal

Pada instrumen-instrumen untuk keperluan astronomi, peneropongan bintang, teodolit dikenal satuan sudut yang berbeda dengan kedua ukuran di atas. Sistem ini dikenal dengan nama sistem sentisimal. Pada system ini satu putaran penuh adalah 400g (dibaca “400 grad”). Maka diperoleh

- Besar sudut ½ putaran adalah 200^g
- Besar sudut ¼ putaran adalah 100^g
- Besar sudut 1/400 putaran adalah 1^g.

Kembali ke persoalan awan yaitu mendefinisikan sinus dan cosines. Mintalah siswa menggambar sebuat segitiga siku-siku, katakana ΔABC yang siku-siku di titik B dan misalkan besar ∠A = α. Katakanlah hasil dari siswa adalah siperti gambar 4.3.4 berikut



Gambar 4.3.4

Sebut :
BC := sisi siku-siku di hadapan sudut α
AB := sisi siku-siku kaki sudut α
BC := Hipotenusa
Nilai perbandingan trigonometri dari sudut α didefinisikan sebagai berikut

Sinus α (dinotasikan dengan sin

$$= \frac{\text{sisi siku} - \text{siku dihadapan sudut } \alpha}{\text{Hipotenusa}} = \frac{BC}{AC}$$

Cosinus α (dinotasikan dengan $\cos\alpha$)

$$= \frac{\text{sisi siku} - \text{siku kaki sudut } \alpha}{\text{Hipotenusa}} = \frac{AB}{AC}$$

Tangen α (dinotasikan dengan $\tan\alpha$)

$$= \frac{\text{sisi siku} - \text{siku dihadapan sudut } \alpha}{\text{sisi siku} - \text{siku kaki sudut } \alpha} = \frac{BC}{AB}$$

Apabila sudut α berupa konstanta, maka sin α cos α dan tan α disebut perbandingan trigonometri dan bila sudut α berupa variabel, maka sin α, cos αdan tan α disebut suatu fungsi. Juga perlu diperhatikan bahwa definisi di atas hanya berlaku untuk suatu segitiga yang siku-siku dan belum dikontruksi pada koordinat kartesius. Akan tetapi untuk kasus khusus definisi tersebut masih bisa kita gunakan.

4.4. Mendefinisikan perbandingan trigonometri

Kalau konsep di atas, kita definisikan nilai sinus, cosinus dan tangan berdasarkan segitiga siku-siku, maka berikut ini akan kita definisikan perbandingan trigonometri jika sudah berada pada system koordinat kartesius. Perlua kita perhatikan bahwa apabila kita mempunyai suatu segitiga siku-siku, maka segitiga tersebut senantiasa dapat digambarkan pada koordinat kartesius

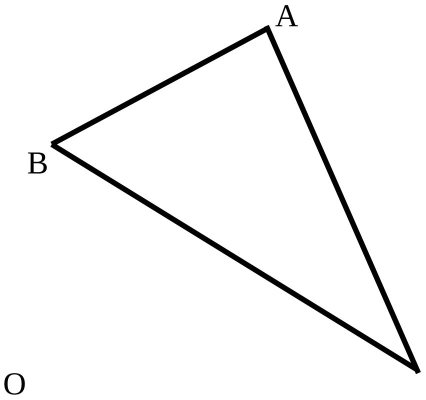
Hati-hati dalam mendefinisikan atau menurunkan persamaan

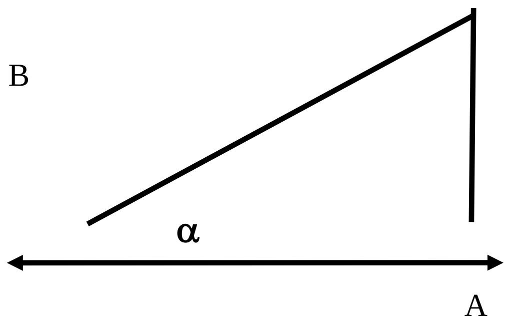
$$\mathbf{Sin}(\mathbf{180^0} - \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}$$

Perhatikan gambar 4.4.1a di atas, maka gambar tersebut senantiasa dapat di transformasikan dalam koordinat kartesius yang gambarnya seperti pada gambar 4.4.1b. yang mana titik C berimpit dengan titik O(0,0). Sehinga dapat didefinisikan

$$\text{Sin}\,\alpha = \frac{Ordinat}{Hipotenusa} \qquad \text{Cos}\,\alpha = \frac{Absis}{Hipotenusa}$$

$$\text{Tg}\,\alpha = \frac{Ordinat}{Absis} \qquad \text{Cotg}\,\alpha = \frac{Ordinat}{Absis}$$

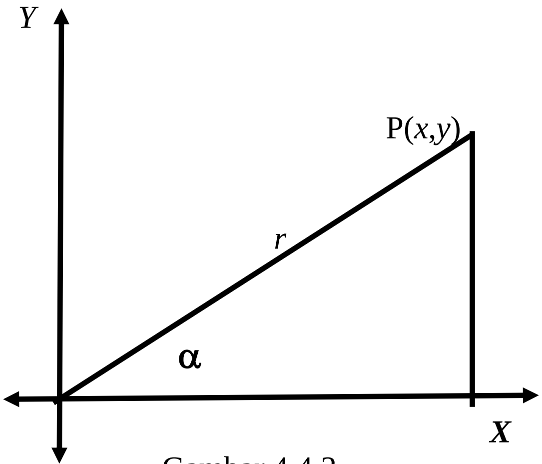




Gambar 4.4.1b

Gambar 4.4.1a

Pendefinisian seperti inilah yang dapat melahirkan pembenaran konsep untuk membuktikan sin (180^0 - α) = sin α. Mari kita perhatikan koordinat titik P (x,y) dengan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ seperti pada gambar berikut ini



Gambar 4.4.2

Kalau kita gunakan definisi di atas, maka barulah boleh kita mengatakan bahwa

$\text{Sin}\,\alpha = \frac{y}{r}$

$\text{Cos}\,\alpha = \frac{x}{r}$

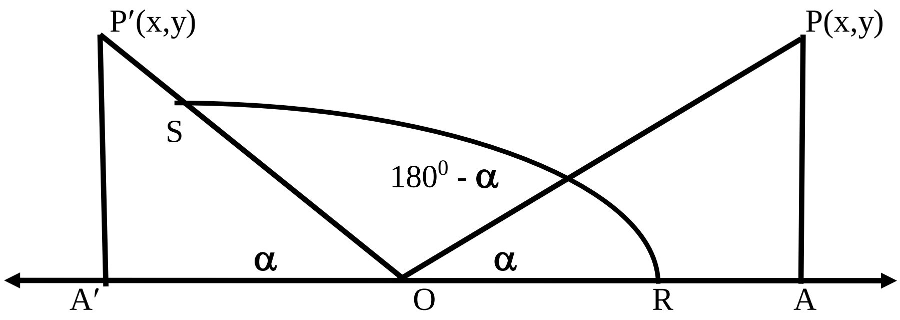
$\text{Tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$

$\text{Cotg}\,\alpha = \frac{x}{y}$

Persoalannya adalah dari mana kita dapat mendefinisikan bahwa

$$\text{Sin}(180^0 - \alpha) = \frac{y}{r} \quad ????$$

Kalau titik P(x,y) pada gambar 4.4.1 di atas kita cerminkan pada sumbu Y, maka diperoleh titik P′(-x,y) yaitu seperti gambar 4.4.2 di bawah ini



Gambar 4.4.3.

Kalau ∠α adalah sudut ∠AOP, sedangkan sudut yang 180^0 - α adalah busur RS, maka kalau kita menggunakan definisi

$$\text{Sinus } \alpha = \frac{\text{sisi siku} - \text{siku dihadapan sudut } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$$

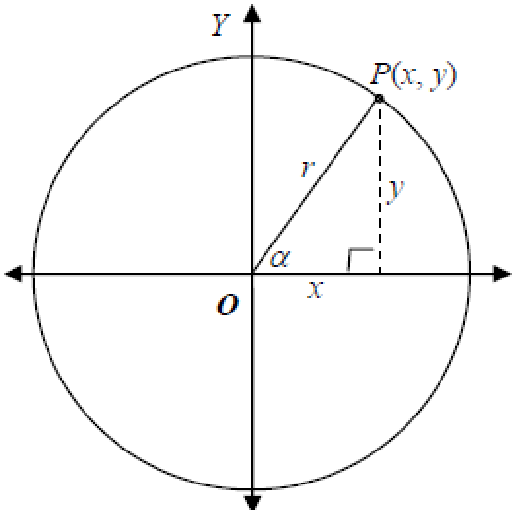
Apalagi kalau menggunakan definisi

$$\text{Sinus } \alpha = \frac{\text{sisi dihadapan}}{\text{sisi miring}}$$

Maka kita tidak akan dapat menentukan nilai dari sin (180^0 - α), karena kita tidak akan dapat menentukan sisi dihadapan sudut 180^0 - α, sedangkan segitiganya saja tidak dapat ditentukan, kalau kita pandang pada ΔOA′P′ yang akan diperoleh adalah nilai sin α, bukan sin (180^0 - α). Maka untuk itu dalam koordinat kartesius, kita perlu mendefinisikan perbandingan trigonometri dalam bentuk lain yaitu sebagai berikut :

$$\text{Sin}\, \alpha = \frac{Ordinat}{Hipotenusa}$$

$$\text{Cos}\, \alpha = \frac{Absis}{Hipotenusa}$$



Gambar 4.4.4

$\text{Tg}\,\alpha = \frac{Ordinat}{Absis}$

$\text{Cotg}\,\alpha = \frac{Ordinat}{Absis}$

Konsep inilah yang akan melahirkan

$\text{Sin}\,\alpha = \frac{y}{r}$

$\text{Cos}\,\alpha = \frac{x}{r}$

$\text{Tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$

$\text{Cotg}\,\alpha = \frac{x}{y}$

Sehingga dengan menggunakan gambar 4.4.3 akan diperoleh $\text{Sin}(180^0 - \alpha) = \frac{y}{r}$, yang nilainya sama dengan $\text{Sin}\,\alpha = \frac{y}{r}$, sehingga diperolehlah

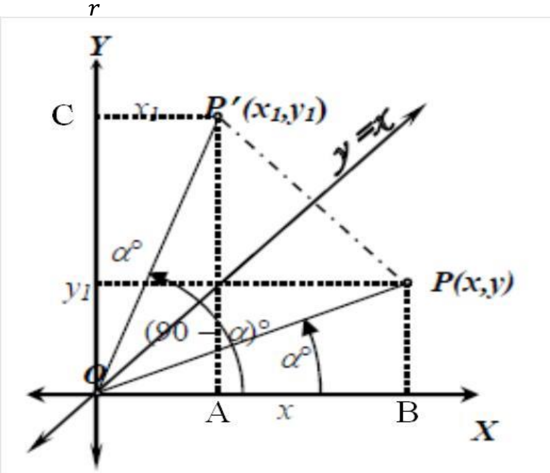
$$\text{Sin}(180^0 - \alpha) = \text{Sin}\,\alpha = \frac{y}{r}$$

Selanjutnya kalau titik P(x,y) dicerminkan terhadap garis $y = x$, maka akan diperoleh titik P′(x_1,y_1). Yang mana α = ∠BOP dan begitu juga ∠P′OC = α, sedangkan ∠P′OA = 90^0 - α. Karena $x = y_1$ dan $y = x_1$, sehingga diperoleh

$$\sin(90^0 - \alpha) = \frac{y_1}{r} = \frac{x}{r}$$

Jadi didapatlah

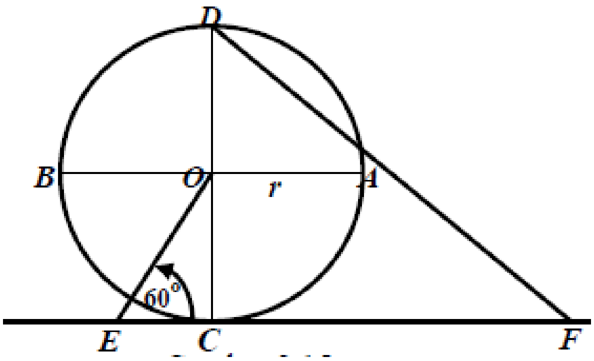
$$\sin(90^0 - \alpha) = Cos\alpha$$



Gambar 4.4.5

- **Melukis π menurut Kochansky**

Agar di dalam melukis fungsi trigonometri, satuan di sumbu-X dan sumbu-Y mempunyai perbandingan panjang yang tepat maka perlu dikenal cara melukis π menurut Kohansky sebagai berikut.



Gambar 4.4.6

Untuk langkah selanjutnya lakukan langkah sebagai berikut :

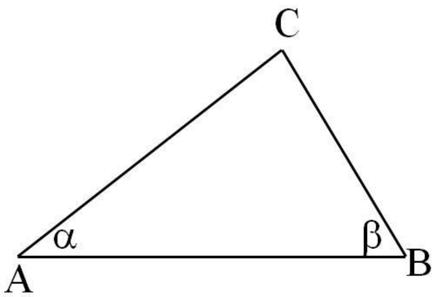
1. Tunjukkan $EC = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$
2. Buat EF = 3r lalu tunjukkan $CF = 3r - \frac{1}{2}r\sqrt{3}$
3. Dengan menggunakan teorema Pythagoras tunjukkan bahwa :

$$DF = \sqrt{CD^2 + CF^2}$$
$$= \sqrt{(2r)^2 + \left(3r - \frac{1}{2}r\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= r\sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}}$$
$$= 3.141533 \ldots . r$$

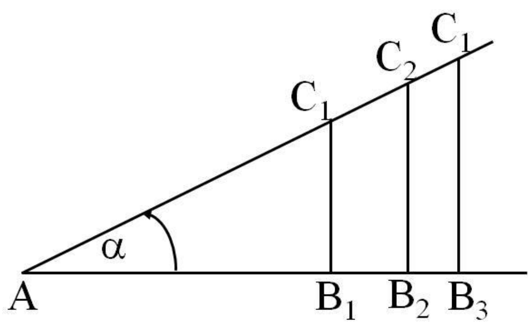
4. Karena kita tahu bahwa hasil perhitungan π yang sebenarnya adalah π = 3.1425292 . . . . untuk itu beri komentar anda.
5. Dipihak lain ada yang mengatakan π = 180^0, diskusikan hubungan nilai π = 3.1425292 . . . dengan π = 180^0

Latihan 6

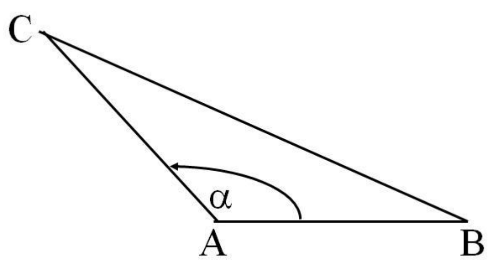
1. Nyatakanlah 5^0 dan 170^0 dalam satuan radian
2. Nyatakalah 15 radian dan 19 radian dalam satuan derajat
3. Nyatakanlah 3 radian dan 35 radian dalam satuan derajat lengkap dengan satuan menit dan detiknya.
4. Nyatakanlah $1\ ^0$ dan 360^0 dalam satuan grad
5. Nyatakanlah 2π radian dan 1 radian dalam satuan grad
6. Perhatikan gambar disebelah, kemudian bentuklah garis dari titik C yang tegak lurus ke AB, kemudian tentukanlah nilai dari sin α, cos α, tan α, sin β, cos β dan tan β.



7. Kontruksilah hubungan yang dipreleh dari hasil perhitungan soal no 6.
8. Cobalah ukur panjang sisi-sisi semua segitiga yang ada pada gambar disebelah, kemudian hitunglah perbandingan trigonometri dari sin α, cos α dan tan α.



9. Berdasarkan definisi sinus, cosinus dan tangent di atas, bisakah anda menghitung perbandingan trigonometri dari sudut α, berikan penjelasan anda dengan lengkap.



10. Analisislah, apakah anda dapat mendefinisikan sin (180 - α) = sin α, jika menggunakan definisi di atas.
11. Denan menggunakan pendefinisian yang benar, turunkanlah dengan langkah yang benar hal berikut ini

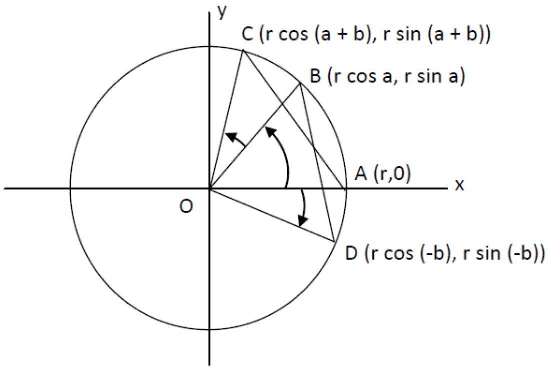
    a. sin (180 + α) b. cos (180 + α) c. tg (180 +α)

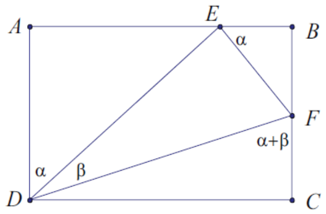
    d. sin (270 $\pm$ α) e. cos (180 $\pm$ α).
12. Dengan cara yang serupa dengan langkah pada soal nomor 11 turunkanlah dengan benar aturan untuk menentukan

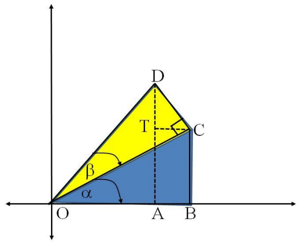
    a. Sin (270 $\pm$ α). b. cos (270 $\pm$ α) c. cot (270 $\pm$ α).

B A B 5

ALTERNATIF MENENTUKAN PENJUMLAHAN DAN PENGURANAN SINUS DAN KOSINUS







Dalam berbagai buku teks, selalu terlebih dahulu dihitung cos(α+β) baru kemudian dihitung sin(α+β). Ini menjadi momok, seolah-olah hanya itu satu-satunya jalan, dan pembaca digiring untuk menghapalnya. Inilah yang merusak proses pembelajaran, maka pada bab ini diberikan berbagai alternatif untuk menurunkannya tanpa harus terlebih dahulu menghitung cos(α+β).

B A B 5

ALTERNATIF MENENTUKAN PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN SINUS DAN KOSINUS

5.1. Pendahuluan

Dalam berbagai buku teks yang ada di SMA/MA dan SMK dalam menentukan rumus penjumlahan dan pengurangan nilai sinus dan cosinus, hampir semuanya terlebih dahulu menghitung atau menurunkan rumus cos (α + β) terlebih dahulu, kemudian baru menurunkan rumus sin (α +β) dan lain sebagainya. Langkah atau cara penurunan yang digunakan sangat panjang dan berbelit-belit. Persoalannya adalah ?

- Apakah tidak ada cara lain yang penentukan rumus penjumlahan atau pengurangan nilai sinus dan cosinus tersebut
- Apakah mesti menurunkan rumus cos ($\alpha + \beta$) terlebih dahulu baru menurunkan rumus sin ($\alpha + \beta$).

Supaya proses pembelajaran dapat berjalan dengan inovatif, maka pengajar perlu mencari alternatif untuk menurunkan berbagai rumus penjumlahan dan penguranan untuk berbagai fungsi trigonometri tersebut. Dari berbagai alternatif yang diharapkan dapat menemukan penurunan rumus yang lebih sederhana dan lebih mudah dipahami oleh pelajar. Yang paling penting diantaranya adalah pelajar harus memahami dengan benar apa yang mereka lakukan, jangan sampai pelajar hanya sekedar berhitung dan mereka tidak tau apa yang mereka hitung. Karena seperti disampaikan pada bagian sebelumnya pelajar sangat terampil menghitung determinat suatu matrik, akan tetapi mereka tidak tau apa sebenarnya yang mereka lakukan (hitung) tersebut, dan celakanya lagi, masih banyak pengajar yang juga tidak mengetahuinya.

Dalam bagian ini hanya akan diberikan cara untuk menunjukkan rumus sin ($\alpha + \beta$) dengan berbagai cara dan sedikit cara untuk menurunkan rumus penjumlahan lainnya. Dengan harapan dengan berbagai cara yang ditunjukkan itu, pembaca dapat termotivasi untuk menunjukkan formula lainnya. Yang mungkin juga perlu pembaca coba adalah menyelesaikan ketaksamaan trigonometri yang berlandaskan ketaksamaan ketaksamaan aljabar yang biasa. Akan tetapi hal yang mudah untuk dicoba dalam melakukan berbagai pendekatan adalah menunjukkan identitas trigonometri. Kalau menunjukkan cara memperoleh sin ($\alpha + \beta$) dapat kita lakukan dengan sangat banyak cara pendekatannya, maka mestinya juga hal yang lebih sederhana menunjukkan identitas trigonometri juga dapat dilakukan dengan berbagai cara. Selamat mencoba setelah memahami bab ini sampai bagian akhir. Dan di latihan soal pada bagian akhirnya juga diberikan dalam bentuk soal 2 buah alternatif untuk menentukan penjumlahan dan pengurangan sinus dan kosinus.

5.2. Tujuan

Adapun tujuan dari penjumlahan dan pengurangan Trigonometri ini adalah pelajar dapat :

1. Memberikan interpretasi dari penguranan dan penjumlahan trigonometri dalam berbagai bentuk.

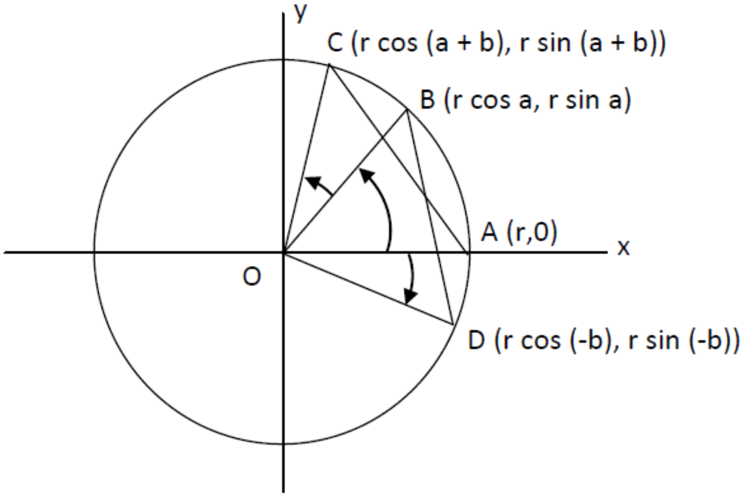
2. Memahami dengan benar konsep pengurangan dan penjumlahan trigonometri.
3. Memberikan berbagai alternative untuk menkontruksi rumus pengurangan dan penjumlahan trigonometri.
4. Mengasah daya analisis peserta didik untuk berinovasi mencari berbagai alternative dalam menentukan rumus penjumlahan dan pengurangan trigonometri tersebut.
5. Mendetilkan langkah pembuktian suatu formula atau teorema berdasarkan langkah pembuktian yang diberikan

5.3. Penjumlahan dan penguranan sinus dan cosinus dalam berbagai buku sekolah

Berikut ini akan diberikan cara yang lazim dalam menurunkan penjumlahan dan penguranan nilai sinus dan kosinus, seperti yang disebutkan di atas, bahwa penurunannya selalu dimulai terlebih dahulu dengan menurunkan rumus cos $(\alpha + \beta)$ kemudian dengan menggunakan hasil dari cos $(\alpha + \beta)$ diturunlah berbagai rumus lainnya. Perhatikan salah satu contoh penurunan yang di ambil dalam salah satu buku pelajaran SMA./MA (yang mana buku lainnya juga melakukan dengan cara yang serupa).

Sengaja penurunan dalam yang kami salin dari buku teks sekolah menengah ini tidak kami salin secara lengkap, hanya bahagian-bahagiannya saja, hal ini dimaksukkan, jika seorang pengajar tidak dapat mencari alternatif untuk menentukan penjumlahan dan pengurangan sinus dan kosinus, maka sebaiknya pengajar tidak mesti menjelaskan secara lengkap kepada pelajar, akan tetapi diharapkan dengan hanya memberikan langkah-langkah tersebut, pelajar dapat mendetilkan perhitungannya. Sehingga dengan melakukan hal tersebut minimal pengajar tidak menyuapi pelajar/i (ingat pengajar yang menyuapi pelajar tersebut, sebenarnya mereka telah membunuh kreatifitas pelajar tersebut). Perhatikan penurunan yang ada pada salah satu buku teks tersebut .

Gambar berikut adalah lingkaran berpusat di titik O(0,0) dengan jari-jari r, sehingga koordinat titik A adalah $(r,0)$. Untuk itu misalkan $\angle$AOB = a radian dan $\angle$BOC = b radian, serta $\angle$AOD = $-b$ radian. Kemudian pengajar menjelaskan bahwa



Gambar 5.3.1

Dari gambar tersebut dapat ditunjukkan bahwa :

$\angle$AOC = $\angle$AOB + $\angle$BOC = $a + b$, sedangkan
$\angle$DOB = $\angle$DOA + $\angle$AOB = $b + a$, sehingga
$\angle$AOC = $\angle$DOB,

Karena $\angle$AOC = $\angle$DOB, maka ΔAOC kongruen dengan ΔBOD, akibatnya AC = BD, Oleh karena itu $(AC)^2 = (BD)^2$. Kita tahu bahwa koordinat Cartesius sebuah titik dapat dinyatakan sebagai (r cos a, r sin a), sehingga :

- Koordinat titik A adalah (r,0)
- Koordinat titik B adalah (r cos a, r sin a)
- Koordinat titik C adalah (r cos (a+b), r sin (a+b))
- Koordinat titik D adalah (r cos(-b), r sin (-b)) = (r cos b, -r sin b).

Sehingga

$$(AC)^2 = (r\cos(a+b) - r)^2 + (r\sin(a+b) - 0)^2$$
$$= r^2\cos^2(a+b) - 2r^2\cos(a+b) + r^2 + r^2\sin^2(a+b)$$
$$= r^2(\cos^2(a+b) + \sin^2(a+b) + 1 - 2\cos(a+b))$$
$$= r^2(2 - 2\cos(a+b)).$$

$$(BD)^2 = (r\cos b - r\cos a)^2 + (-r\sin b - r\sin a)^2$$
$$= r^2\cos^2 b - 2r^2\cos a\cos b + r^2\cos^2 a = r^2\sin^2 b + 2r^2\sin a\sin b$$
$$+ r^2\sin^2 a$$

$= r^2$ (2 – 2 cos a cos b + 2 sin a sin b).

Dari hubungan $(AC)^2 = (BD)^2$, maka diperoleh

$$r^2 (2 - 2\cos(a + b)) = r^2 (2 - 2\cos a \cos b + 2 \sin a \sin b)$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Selanjutnya dalam berbagai buku teks tersebut, dengan menggunakan rumus di atas, dan rumus-rumus lainnya diturunkanlah sin (α + β) yaitu sebagai berikut :

$$\text{Sin}\,(a + b) = \cos\left\{\frac{\pi}{2} - (a + b)\right\}$$

$$= \cos\left\{\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b)\right\}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\sin b$$

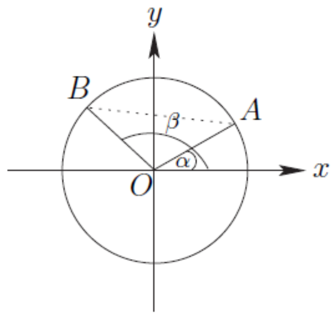
$$= \cos\ a.\cos b + \sin\ a.\sin b.$$

Kemudian dari rumus di atas dan dengan menggunakan rumus lainnya dapat ditentukan cos (α -β) dan sin (α - β) serta rumus-rumu penjumlahan dan pengurangan yang lain. Coba perhatikan, berapa panjangnya penurunan rumus di atas, yang hanya akan membuat pelajar bosan, sehingga pelajar selalu berpikiran, apa hasil akhirnya dan bagaimana cara menghitung/ menggunakannya. Kalau proses berfikir seperti ini yang sudah terjadi, maka pembelajaran matematika sudah menjadi sejarah dan berhitung, sehingga kita tidak pernah mengajar pelajar bermatemetika.

Harap dimaklumi penulisannya tidak konsisten, sebahagian di tulis sin (α - β) dan pada bagian lain ditulis sin (**a** + *b*), itu sengaja dilakukan, karena memang ini menunjukkan keaslian salinan dari berbagai buku teks yang ada di tingkat sekolah menengah.

5.4. Alternatif 1

Alternatif 1 ini sebenarnya sudah ada dalam beberapa buku teks, akan tetapi agak sulit ditemukan bukunya, dan metoda ini hanya banyak digunakan oleh berbagai pengajar yang kelompok MGMP nya sangat aktif terutama pengajar-pengajar di Kota Besar di Pulau jawa. Alternatif 1 ini sudah memberikan langkah yang lebih sederhana dan lebih mudah dipahami oleh pelajar dan sedikit tidak membosankan. Akan tetapi prinsipnya masih sama dengan cara di atas, maka metoda ini lebih ditekankan kepada pembaca, bahwa tidak satu jalan ke Roma, jadi jangan sesekali berpegang bahwa hanya itu satu-satunya cara untuk menurunkannya. Adapun penurunannya adalah sebagai berikut :



Gambar 5.4.1

Perhatikan gambar 5.4.1, sama seperti di atas, maka akan diperoleh koordinat titik A dan B adalah :

A(cos α, sinα)

B(Cos β, sdin β)

Maka panjang sisi AB adalah :

$(AB)^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$

$= 2\ (\ 1 - (\cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta)$

Sedangkan dengan menggunakan aturan kosinus akan diperoleh :

$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2.OA.OB.\cos\angle AOB$

$= 2(1 - \cos(\beta - \alpha)).$

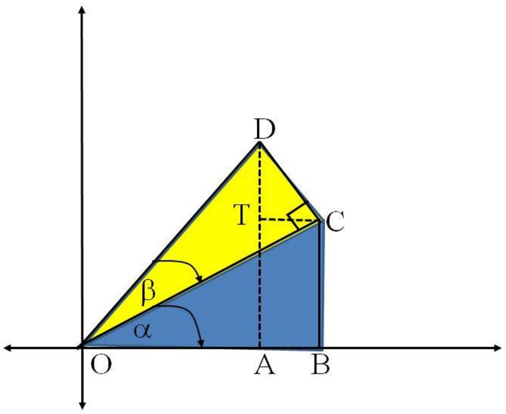
Sehingga dari kedua persamaan tersebut akan diperoleh :

$\text{Cos}\ (\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\ \text{Sin}\ \beta.$

Kalau diperhatikan, sebenarnya ide dari alternatif 1 ini tidak berbeda jauh dari cara-cara yang ada dalam berbagai bukut teks sekolah menengah tersebut, akan tetapi cara ini lebih sederhana dan lebih mudah dipahami oleh pelajar.

5.5.. Alternatif 2.

Perhatikan gambar 5.5..1 di bawah ini



Gambar 5.5..1

Misalkan ∠BOC = α, kemudian buat garis CD dengan CD ⊥ CO dan ∠COD = β, maka ∠BOD = α + β, kemudian proyeksikan titik D pada sumbu X dan katakan titik potongnya potongnya adalah A, selanjutnya buat garis CT ⊥ AD.

- Mintalah pelajar untuk menentukan bahwa nilai $\sin\alpha = \frac{BC}{OC}, \sin\beta = \frac{CD}{OD}$ dan
$$\cos\beta = \frac{OC}{OD}$$

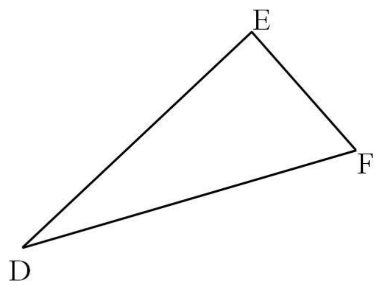
- Bimbinglah pelajar untuk menunjukkan bahwa ∠OCT = ∠CDT = α
- Kemudian bimbing juga pelajar untuk menunjukkan bahwa
$$\frac{\mathrm{TD}}{\mathrm{CD}} = \cos\alpha$$
- Minta pelajar untuk menentukan nilai Sin (α + β)
- Kemudian periksalah apakah hasil pelajar sama dengan
$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AD}{OD}$$
- Berilah bimbingan pelajar agar pelajar dapat merobah peramaannya menjadi
$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AD}{OD} = \frac{AT + TD}{OD} = \frac{BC + TD}{OD}$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{BC + TD}{OD} = \frac{BC}{OC}.\frac{OC}{OD} + \frac{TD}{CD}.\frac{CD}{OD}$$
- Perhatikanlah bahwa pelajar akan sampai pada kesimpulan
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Simaklah dengan baik proses di atas, ditambah dengan langkah yang mesti dilakukan oleh pengajar untuk membimbing pelajar dalam menunjukkan rumusnya, akan tetapi prosesnya sangat pendek dan juga sangat sederhana. Cara-cara seperti inilah yang mesti dikembangkan oleh pengajar agar pelajar dapat berinovasi untuk menurunkan suatu formula dalam matematika. Cobalah untuk mengembangkan dan menumbuhkan inovasi pelajar untuk menunjukkan rumus-rumus yang lain.

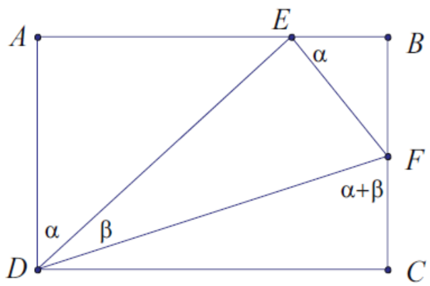
5.6 Alternatif 3.

Untuk alternative ke tiga ini, pengajar mesti mencoba membimbing mahasiswa untuk mendetilkan buktinya berdasarkan langkah pembuktian yang diberikan :

Langkah 1. Buatlah segitiga DEF dengan $\angle DEF = 90^0$, dan katakan $\angle EDF = \beta$, dengan panjang sisi DF = 1 satuan, kemudian buatlah segiempat ABCD sehingga Δ DEF berada dalam segiempat ABCD, dan sebut $\angle EAD = \beta$.



Gambar 5.6.1



Gambar 5.6.2

Langkah 2. Bimbinglah pelajar untuk menunjukkan bahwa kondisi berikut ini :

- $\angle BEF = \alpha$ dan $\angle CFD = \alpha + \beta$.
- Dari ΔDEF diperoleh DE = DF cos β = cos β dan
  EF = DF sinβ = sin β
- Dari ΔADE diperoleh AD = DE cos α = cos α.cos β
  AE = DE. Sin α = sin α.cos β
- Selanjutnya $\angle AED + \angle BEF = 90^0 = \angle AED + \angle ADE$
  $\angle BEF = \angle ADE = \alpha$.
- Dari Δ BEF diperoleh BE = EF.cos α = cos α.sin β
  BF = EF.sin α = sin α.sin β.
- Selanjutnya karena AD // BC, $\angle DFC = \angle ADF = \alpha + \beta$

Langkah 3. Pandanglah Δ CDF ajaklah mahasiswa untuk menunjukkan bahwa berlaku hubungan berikut :

$$CD = DF.\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta)$$
$$CF = DF.\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$$

Langkah 4. Dari hasil langkah 1 s/d 3 di atas, mintalah mahasiswa untuk membuat kesimpulan dan sesuaikan hasilnya dengan :

$$\text{Cos } \alpha.\ \text{Cos } \beta = AD = BC = BF + FC = \sin \alpha \sin \beta + \cos(\alpha + \beta).$$

Yang menyebabkan

$$\text{Cos } (\alpha + \beta) = \cos \alpha.\cos \beta - \sin \alpha.\sin \beta$$

Tambahan :

Dari hasil langkah 1 s/d 3 di atas dan jika diperlukan dapat dengan menambah persamaan lainnya,

Bimbinglah mahasiswa untuk mendapatkan

$$\text{Sin}(\alpha + \beta) = CD = AB = AE + EB = \sin \alpha.\cos \beta + \cos \alpha.\ \text{Sin } \beta$$

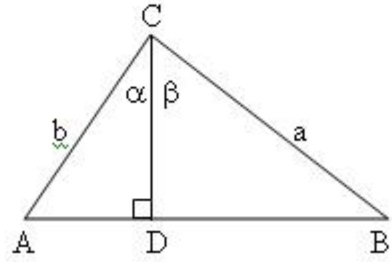
Sehingga :

$$\text{Sin}(\alpha + \beta) = \sin \alpha.\cos \beta + \cos \alpha.\ \text{Sin } \beta.$$

Menariknya cara penurunan di atas, kita bisa sekaligus memperoleh Cos $(\alpha + \beta)$ dan Sin$(\alpha + \beta)$ secara bersamaan, yang juga dapat anda lakukan terlebih dahulu menurunkan rumus Sin$(\alpha + \beta)$ baru dilanjutkan dengan Cos $(\alpha + \beta)$. Menarik lainnya cara penurunan di atas, kita hanya dengan menggunakan rumus sin dan cos serta menemukan nilai Cos $(\alpha + \beta)$ dan Sin$(\alpha + \beta)$ dalam bentuk perbandingan sisi dan merobahnya dalam nilai sin dan cos. Pola penurunan ini mungkin akan lebih mudah dipahami oleh pelajar dari pada pendekatan dengan menggunakan koordinat kartesian seperti yang ada dalam berbagai buku ajar ditingkat sekolah menengah.

5.7. Alternatif 4.

Berikut ini akan diberikan cara penurunan sin $(\alpha - \beta)$ yang lebih sederhana lagi yaitu dengan menggunakan konsep luas pada suatu segitiga. Perhatikan gambar 5.7.1 dan misalkan panjang sisi-sisinya adalah a =- BC, b = AC dan c = AB dengan $\angle ACD = \alpha$ dan $\angle BCD = \beta$. Kemudian bimbinglah pelajar untuk menunjukkan bahwa :



Gambar 5.7.1.

- AD = b.sin α dan BD = a.sin β
  Serta
  CD = a.cos β = b.cos α
- Bimbing pelajar untuk menurunkan rumus berikut
  Luas $Luas\ \Delta ADC = \frac{1}{2}.AD.CD \sin 90$
  $= \frac{1}{2} b.\sin\alpha.a\cos\beta.1$
  $= \frac{1}{2} a.b.\sin\alpha.\cos\beta$
- Kemudian mintalah pelajar untuk menunjukkan bahwa
  $$Luas\ \Delta\ BDC = \frac{1}{2}.a.b.\sin\beta.\cos\alpha$$
  dan
  $$Luas\ \Delta ABC = \frac{1}{2}.b.a\sin(\alpha + \beta)$$
- Nyatakan bahwa
  $$Luas\ \Delta ABC = Luas\ \Delta ADC + luas\ \Delta BDC$$
- Sehingga
  $$\frac{1}{2}.b.a\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}a.b.\sin\alpha.\cos\beta + \frac{1}{2}.a.b.\sin\beta.\cos\alpha$$
- Jadi
  $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$$

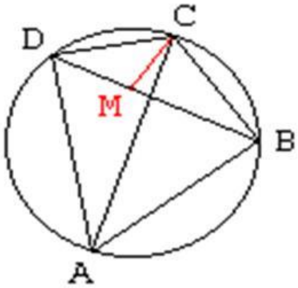
Sepertinya kalau kita mau berinovasi, maka kita makin mendapatkan cara penurunan rumus yang makin sederhana dan makin mudah. Sebenarnya kita tidak dapat memfonis, mana penurunan yang paling mudah dan sederhana, akan tetapi yang kita perlukan adalah mencari berbagai alternatif sehingga pelajar kita memiliki cara yang lebih sederhana dan mudah untuk mereka pahami, yang jauh lebih penting dari itu adalah, kalau kita membuat geometris dari apa yang kita jumlahkan atau kita kurangkan tersebut, maka pelajar kita paham apa yang mereka lakukan.

5.8. Alternatif 5.

Alternatif yang kelima ini merupakan pendekatan secara geometri, akan tetapi diperlukan pemahaman geometri yang lebih tinggi, sehingga alternatif ke 5 ini hanya merupakan pengayaan bagi pengajar, kalau pelajar dengan kemampuan geometri yang lemah, maka alternatif ke 5 ini akan sulit diterapkan. Walaupun begitu sebelum penggunaannya akan kami berikan terlebih dahulu suatu teorema yang akan digunakan untuk membuktikan penjumlahan dan penguranan sinus dan kosinus tersebut. Teorema Ptolemy ini akan diberikan bukti secara lengkap :

***Teorema* 5.8.1 (*Teorema Ptolemy*)**

Jika *ABCD* sebarang segi-empat yang berada pada suatu lingkaran, maka jumlah dua pasang sisi yang bersebelahan adalah sama dengan hasil kali diagonalnya.



Gambar 5.8.1

Bukti **:** Pada diagonal *BD* buat titik *M* sehingga $\angle ACB = \angle MCD$. Karena $\angle BAC$ dan $\angle BDC$ menghadap busur yang sama, maka $\angle BAC = \angle BDC$. Yang mengakibatkan $\angle DNC = \angle ABC$, jadi $\Delta ABC \sim \Delta DMC$, sehingga

$$\frac{CD}{MD} = \frac{AC}{AB}$$

atau

$$AB.CD = AC.MD \qquad (5.8.1)$$

Selanjutnya karena $\angle ACB = \angle MCD$, maka $\angle BCM = \angle ACD$ dan karena $\angle DAC = \angle DBC = \angle MBC$ (menghadap busur yang sama), ini mengakibatkan $\Delta BCM \sim \Delta ACD$, sehingga

$$\frac{BC}{BM} = \frac{AC}{AD}$$

atau

$$AD.BC = AC.BM \qquad (5.8.2)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (5.8.1) dan (5.8.2) diperoleh

$$AB.CD + AD.BC = AC.MD + AC.BM = AC(MD + BM) = AC.BD \quad \blacktriangledown$$

Berikut ini diberikan pola lain untuk membuktikan teorema di atas.

Bukti 2 : Untuk bukti cara 2 ini sebaiknya mahasiswa terlebih dahulu mencoba mencari buktinya dengan menggunakan konsep kesebangunan tersebut atau dapat langkah berikut ini juga dapat dijadikan panduang bagi pengajar untuk mengasaha daya pikir analitis mahasiswa (sekali lagi yang terpenting adalah bukan hanya memahami bukti yang diberikan, akan tetapi adalah bagaimana menggali ide mencari alternatif buktinya).

Langkah 1. Misalkan *ABCD* segi-empat siklik, perhatikan gambar 5.8.2 .Kontruksi *E* sehingga $\Delta CAD \cong \Delta CEB$, dari kesebangunan tersebut tentunya mahasiswa akan memperoleh

$$\frac{CE}{CA} = \frac{CB}{CD} = \frac{BE}{DA},$$

atau

$$BE = \frac{CB \cdot DA}{CD}. \qquad (5.8.3)$$

Langkah 2. Mintalah mahasiswa untuk menunjukkan bahwa $\angle$ECA = $\angle$BCD. Sehingga didapatkan hubungan

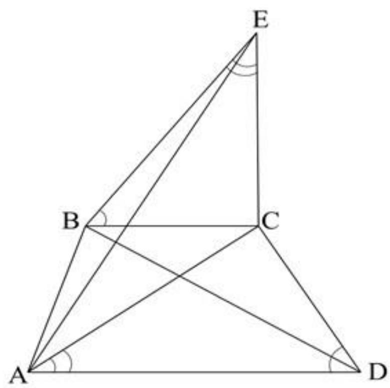
$$\frac{CD}{CA} = \frac{CB}{CE}$$

Langkah 3. Kembali minta mahasiswa untuk menunjukkan bahwa ΔECA ~ ΔBCD sehingga diperoleh hubungan

$$\frac{EA}{BD} = \frac{CA}{CD}$$

atau

$$EA = \frac{CA \cdot DB}{CD} \qquad (5.8.4)$$



Gambar 5.8.2

Langkah 4. Dengan mengingatkan kepada mahasiswa bahwa jika *ABCD* siklik, maka :

$$\angle CBE + \angle ABC = \angle CDA + \angle ABC = 180^0.$$

Langkah 5. Berilah penjelasan kepada mahasiswa bahwa hubungan di atas akan menyebabkan *A*, *B* dan *E* segaris yang berarti *AB* + *BA* = *AE*. Jadi dari (5.8.3) dan (5.8.4) kita peroleh

$$\frac{CA \cdot DB}{CD} = AB + \frac{CB \cdot DA}{CD}$$

Maka diperoleh

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD$$

***Teladan* 5.8.1** : Misalkan titik P berada pada busur *CD* pada lingkaran luar dari empat persegi *ABCD*, tunjukkan bahwa

$$PA(PA + PC) = PB(PB + PD)$$

Penyelesaian : Perhatikan gambar 5.8.3. Misalkan panjang sisi persegi tersebut adalah *a* satuan. Selanjutnya gunakan teorema Ptolemy untuk *PDAB* maka diperoleh :

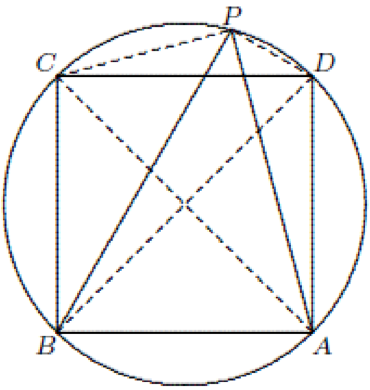
$$PD \,.\, BA + PB \,.DA = PA \,.DB$$
$$a.(PD + PB) = a\sqrt{2}.PA$$
$$PD + PB = \sqrt{2}.\ PA$$
$$PB.(PD + PB) = \sqrt{2}.PA.PB \ldots\ldots.(5.8.5)$$

dan bila teorema Ptolemy digunakan pada PABC, maka diperoleh

$$PA \,.\, BC + PC\ \ AB = PB \,.\, AC.$$
$$a.(PA + PC) = a\sqrt{2a}.PB$$
$$PA + PC = \sqrt{2}.PB$$
$$PA(PA + PC) = \sqrt{2}.PB.PA \quad (5.8.6)$$

maka dari (5.8.5) dan (5.8.6) diproleh

$$PA(PA + PC) = PB.(PD + PB).$$



Gambar 5.8.3

Jika segiemapat *ABCD* bukan merupakan segi-empat, maka yang berlaku adalah tanda lebih besar, seperti ditunangkan dalam teorema berikut ini :

***Teorema* 5.8.2** : Jika *ABCD* bukan segi-empat siklik, maka berlaku

$$AB.CD + AD.BC > AC.BD \qquad (5.8.7)$$

Bukti : Mialkan ABCD bukan merupakan segi-empat siklik. Dalam artian yang berlaku adalaha

$$\angle CBE + \angle ABC = \angle CDA + \angle ABC \neq 180^0. \qquad (5.8.8)$$

Ini menyebabkan ketiga titik A, B dan E membentuk segitiga dengan $EA < AB + BE$, sehingga dari persamaa (5.8.7) dan (5.8.8) di atas diperoleh

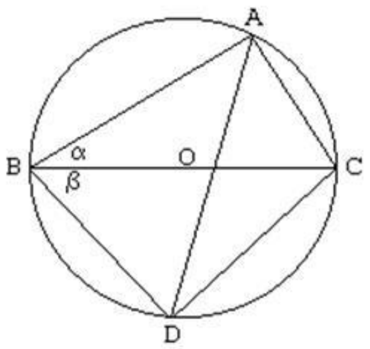
$$\frac{CA \cdot DB}{CD} < AB + \frac{CB \cdot DA}{CD}$$

Sehingga $AB.CD + AD.BC > AC.BD$.

Berikut ini akan diberikan pengunaan teorema Ptolemy untuk membuktikan rumus *sin* (α + β) dan *sin* (α - β), Ini merupakan alternative cara pembuktian yang sedikit tinggi, dikatakan tinggi karena teorema Ptolemy itu tidak dikenal oleh pelajar di tingkat SMA/MA apalagi SMK, akan tetapi dalam mata kuliah geometri, seharusnya mahasiswa mendapatkan teori tentang teorema Ptolemy tersebut, sehingga layak menjadi altenatif untuk menurunkan rumus *sin* (α + β) , sedangkan untuk rumus trigonometri yang lain dapat dilakukan sebagai soal latihan.

Teladan **5.8.2.** Tunjukkan bahwa $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

Penyelesaian : Perhatikan gambar di bawah ini yang merupakan lingkaran berpusat di *O* dan berdiameter 1 satuan.



Gambar 5.8.4

Langkah 1. Bimbinglah mahasiswa untuk menunjukkan bahwa $\angle BAC = \angle BDC = 90^0$. *Langkah* 2. Jika dimiisalkan $\angle ABC = \alpha$ dan $\angle DBC = \beta$. Minta mahasiswa untuk menunjukkan

$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC}$$

sehingga

$$AC = \sin\alpha$$

Langkah 3. Secara bergantian, minta mahasiswa untuk menunjukkan bahwa :

$AB = \cos\alpha$

$BD = \cos\beta$

$DC = sin\ \beta$

Langkah 4. Sebaiknya pengajar menjelaskan bahwa dari hubungan $\frac{AD}{sin(\alpha+\beta)} = 2R$ mengakibatkan $\frac{AD}{sin(\alpha+\beta)} = 2\times\frac{1}{2}$, sehingga

$AD = sin\ (\alpha + \beta)$

Langkah 5. Bimbinglah mahasiswa untuk menunjukkan bahwa dengan menggunakan teorema Ptolemy diperoleh

$AD.BC = AC.BD + AB.DC$

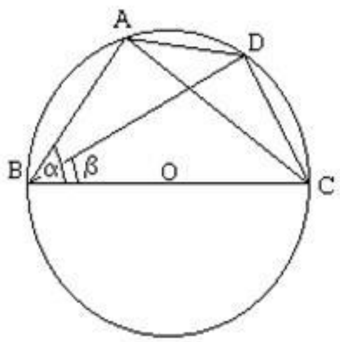
Dan karena $BC = 1$, maka $sin\ (\alpha + \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta$ ▼

***Teladan* 5.8.3.** Tunjukkan bahwa $sin\ (\alpha - \beta) = sin\ \alpha$ cos β - $cos\ \alpha\ sin\ \beta$

Penyelesaian : Langkah 1. Sama seperti contoh teladan 5.8.2 mintalah mahasiswa untuk menunjukkan bahwa

$BC = 1$, $AB = cos\ \alpha$, $AC = sin\ \alpha$

$BD = cos\ \beta$, $DC = sin\ \beta$, $AD = sin\ (\alpha - \beta)$



Gambar 5.8.5

Langkah 2. Kembali dengan menggunakan teorema Ptolemy diperoleh

$AC.BD = AD.BC + AB.DC$

$Sin\ \alpha.\ Cos\ \beta = sin\ (\alpha - \beta).1 + cos\ \alpha.\ sin\ \beta$

Yang menghasilkan

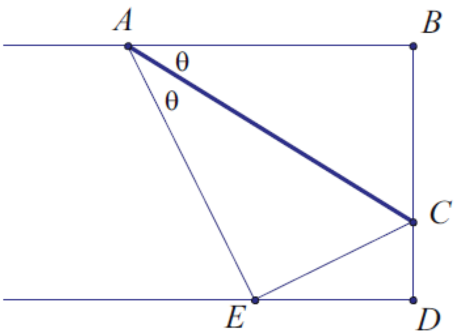
$sin\ (\alpha - \beta) = sin\ \alpha.\ Cos\ \beta$ - + $cos\ \alpha.\ sin\ \beta$

▼

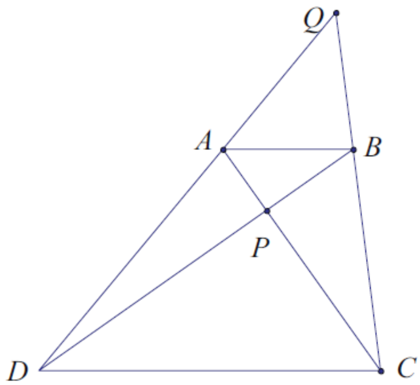
Latihan 7

1. Turunkanlah nilai cos (α + β) dengan menggunakan cara seperti pada alternative 1
2. Turunkanlah nilai sin (α + β) dengan menggunakan cara seperti pada alternative 1
3. Turunkanlah nilai sin (α - β) dengan menggunakan cara seperti pada alternative 1
4. Turunkanlah nilai cos (α + β) dengan menggunakan cara seperti pada alternative 2
5. Turunkanlah nilai sin (α - β) dengan menggunakan cara seperti pada alternative 1
6. Turunkanlah nilai sin (α + β) dengan menggunakan cara seperti pada alternatif 3.
7. Turunkanlah nilai cos (α - β) dengan menggunakan cara seperti pada alternative 1
8. Tunjukkanlah bahwa dalam suatu segitiga akan berlaku
$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{1}{2}A\,.\cos\frac{1}{2}B.\cos\frac{1}{2}C$$
9. Misalkan a dan b bilangan real tak negative. Jika sin x + a sin x = b, nyatakan
   $|a.\sin x - \cos x|$ dalam bentuk a dan b.

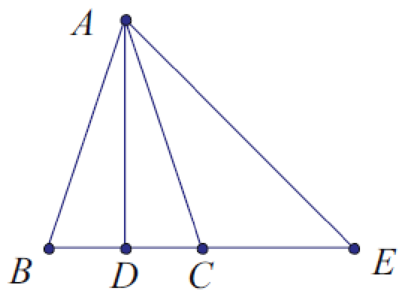
10. Perhatikan gambar disebelah, jika panjang sisi BD adalah w satuan, hitunglah panjang sisi AC dalam satuan w dan θ.



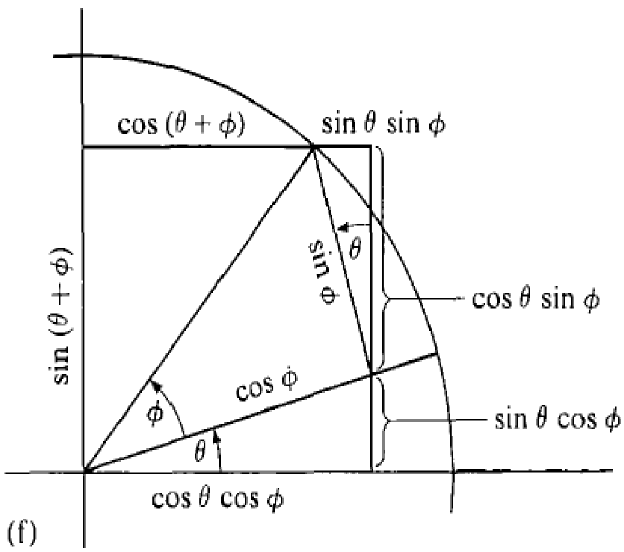
11. Perhatikan trapezium ABCD disebelah, dengan AB // DC. Jika panjang sisi AB = 4 dan CD = 10 dan jika perpotongan AC dengan BD membentuk sudut 90^0, dan titik Q adalah perpotongan perpanjangan sisi DA dan CQ dengan $\angle DQC = 45^0$. Hitunglah luas trapezium ABCD.



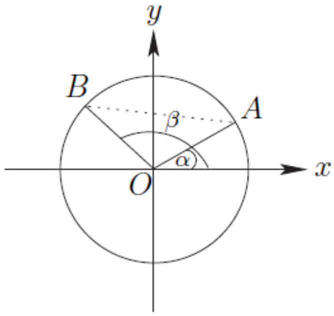
11*. Perhatikan gambar disebelah dengan ΔABC sama kaki yang mana AB = AC. Titik D dan E berada BC sehingga BD = DC, BE > CE, Jika AE = 10, berapakah luas ΔABC.



12. Perhatikan gambar disebelah, bisakan anda tentukan nilai dari cos (θ + ϕ)



13. sama seperti soal nomor 13 dari gambar disebelah tentukanlah nilai dari
cos (θ + ϕ)



14*. Misalkan a dan b bilangan real tak negatif, Tunjukkan bahwa terdapat bilangan real x sedemikian hingga

$$\sin x + a \sin c = b \text{ jika dan hanya jika } a^2 - b^2 + 1 \geq 0.$$

B A B
6

PENGAJARAN GARIS SINGGUNG PADA PARABOLA

Dalam kehidupan sehari-hari kita banyak menjumpai parabola, termasuk dirumah-rumah penduduk. Artinya begitu banyaknya aplikasi dari parabola ini yang perlu kita pahami dengan baik, pada gambar di atas, tentunya kita perlu mengetahui focus dari parabola tersebut dan bagaimana pantulan gelombangnya. Berbicara gelombangpun aplikasi parabola ini sangat banyak sekali, misalnya dalam fisika, Gerak parabola merupakan gerak benda dengan lintasan berbentuk parabola (setengah lingkaran). Gerak parabola adalah gabungan dari 2 buah jenis gerakan yaitu Gerak Lurus Beraturan (GLB) yang arahnya mendatar dan Gerak Lurus Berubah Beraturan (GLBB) yang arahnya vertikal. Gerak vertikal dipengaruhi oleh percepatan gravitasi sehingga kecepatannya akan selalu berubah.

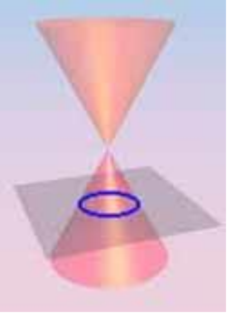
B A B
6

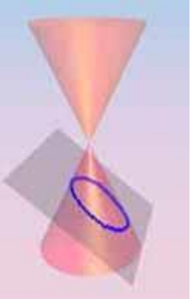
PENGAJARAN GARIS SINGGUNG PADA PARABOLA

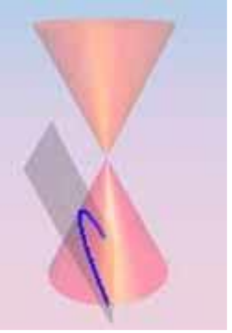
Sasaran utama dari bab 6 ini adalah untuk ***menentukan berbagai cara untuk menentukan*** persamaan garis singgung dan garis normal dari parabola, akan tetapi sebelum membahas garis singgung terlebih dahulu kita ulangi pemahaman konsep persamaan parabola. Dengan memahami secara baik berbagai cara dalam menentukan persamaan garis singgung pada para bola ini. Diharapkan kepada pembaca terutama para guru, menggunakan ide dalam buku ini untuk menentukan berbagai cara dalam menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran, ellips dan hyperbola. Pada umumnya di dalam berbagai buku teks, persamaan parabola hanya dibahas untuk kasus parabola terbuka ke kanan, ke kiri, ke atas dan ke bawah. Pada buku ini juga akan dibahas hal yang sama, akan tetapi untuk parabola yang miring, maka pembaca dapat menggunakan salah satu persamaan parabola, akan tetapi dengan melakukan rotasi dan dilatasi. Namun demikian, pada bagian awal akan sedikit dibahas menentukan persamaan irisan kerucut secara umum yang mana persamaannya tidak hanya terbuka kiri-kanan atau atas-bawah.

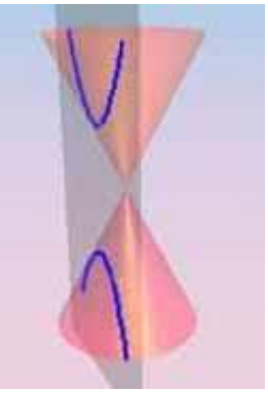
6.1. Pengantar Irisan Kerucut

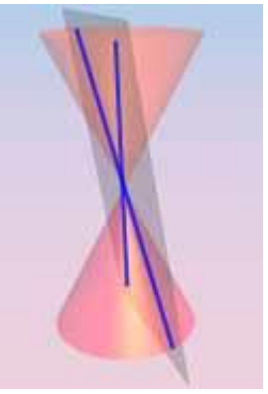
Sebelum membahas tentang persamaan garis singgung, terlebih dahulu dibicarakan tentang konsep dasar irisan kerucut. Irisan kerucut adalah irisan suatu bidang dengan sebuah kerucut, ada 5 bentuk yang dapat dihasilkan dari perpotongan suatu bidang dengan sebuah kerucut tersebut, yaitu Lingkaran, Elips, Parabola, Hyperbola dan Segitiga. Dalam bab ini hanya akan dibahas 3 jenis yaitu Elips, Parabola dan Hyperbola. Sedangkan lingkaran dan segitiga sudah dibahas pada bab terdahulu. Untuk itu perhatikan gambar di bawah ini


Gambar 6.1.1.a


Gambar 6.1.1.b

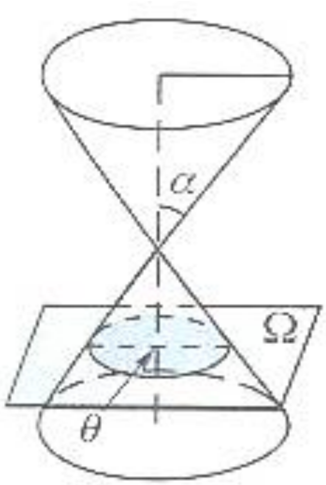

Gambar 6.1.1.c

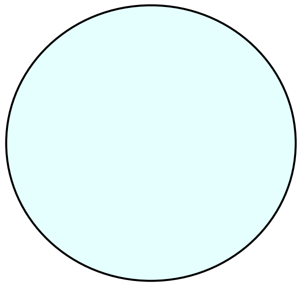

Gambar 6.1.1.d


Gambar 6.1.1.e

Gambar 6.1.1.a merupakan perpotongan kerucut dengan bidang yang menghasilkan Lingkaran
Gambar 6.1.1.b merupakan perpotongan kerucut dengan bidang yang menghasilkan Elips
Gambar 6.1.1.c merupakan perpotongan kerucut dengan bidang yang menghasilkan Parabola
Gambar 6.1.1.d merupakan perpotongan kerucut dengan bidang yang menghasilkan Hyperbola
Gambar 6.1.1.e merupakan perpotongan kerucut dengan bidang yang menghasilkan Segitiga

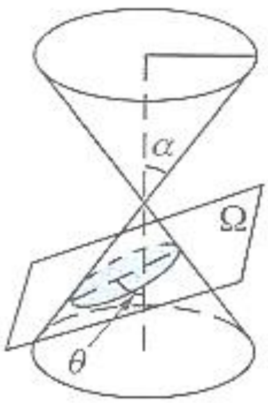
Perhatikan gambar 6.1.2 berikut ini

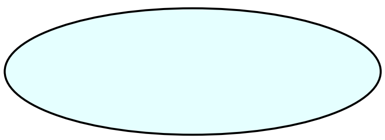




Gambar 6.1.2a $\theta = \pi/2$ gambar 6.1.2b

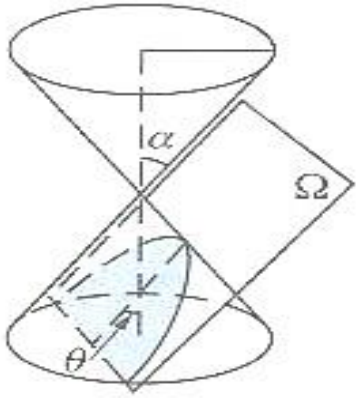
Misalkan kerucut di atas dipotong oleh sebuah bidang Ω, jika sudut andar sumbu symetri pada kerucut dengan dindingnya disebut α dan θ adalah sudut antara sumbu symetri kerucut dengan bidang Ω. Maka lingkaran akan terbentuk apabila sudut $\theta = \pi/2$. Artinya bidang Ω tegak lurus dengan sumbu symetri dari kerucut lihat gambar 6.1.2a dengan hasil seperti pada gambar 6.1.2b.





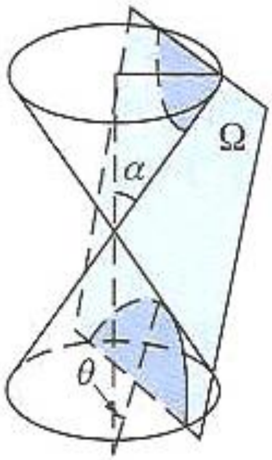
Gambar 6.1.3a $\alpha < \theta < \pi/2$ gambar 6.1.3b

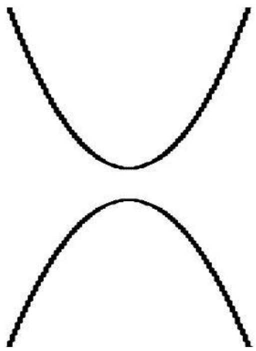
Elips dihasilkan apabila perpotongan bidang Ω dengan sumby simetri dari kerucut menghasilkan sudut θ, dengan $\alpha < \theta < \pi/2$. Artinya bidang hanya memotong satu bagian dari kerucut yang ada, tapi tidak tegak lurus dengan sumbu symetri dan tidak sejajar dengan dinding dari kerucut tersebut perhatikan gambar 6.1.3a dengan hasil seperti pada gambar 6.1.3b.



Gambar 6.1.4a $\theta = \alpha$ gambar 6.1.4b

Parabola terjadi bila perpotongan bidang Ω dengan kerucut membentuk sudut $\theta = \alpha$, artinya bidang sejajar dengan dinding dari kerucut. Untuk jelasnya perhatikan gambar 6.1.4a dengan hasil seperti pada gambar 6.1.4b.

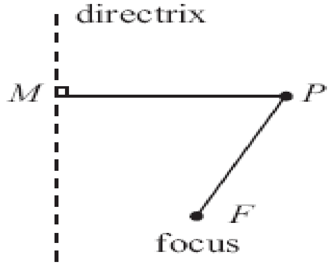




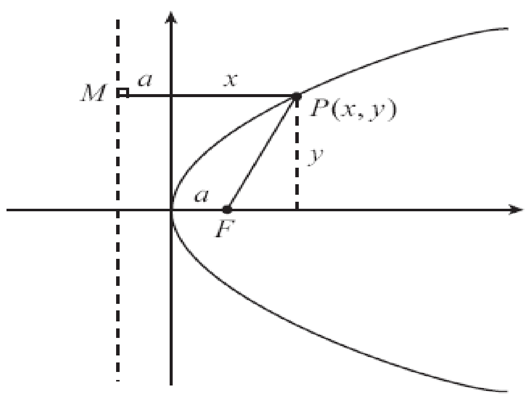
Gambar 6.1.5a $0 \leq \theta < \alpha$ gambar 6.1.5b

Hyperbola terbentuk bila perpotongan bidang Ω dengan kerucut membentuk sudut θ, dengan $0 \leq \theta < \alpha$. Artinya bidang Ω memotong kedua kerucut, tapi tidak tepat melalui titik pertemuan bersama kedua kerucut tersebut. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar 6.1.5a dengan hasil seperti pada gambar 6.1.5b.

Misalkan diberikan suatu garis tetap yang disebut *direktrik* dan sebuat titik F yang disebut *Fokus*. Pada posisi lain berada titik P(x,y), perhatikan gambar 6.1.6a. Selanjutnya buat garis yang tegak lurus dari $P(x,y)$ ke direktrik, katakan titik M adalah proyeksi P ke direktrik. Kemudian hubungkan titik $P(x,y)$ ke titik fokus F.Jika titik $P(x,y)$ posisinya berpindah-pindah. Permasalahannya adalah apa yang akan terjadi jika jarak yang dipeleh kelipatan dari yang lainnya. Misalkan perbadingan antara jarak P ke M dengan jarak P ke F merupakan suatu bilangan konstan, yang disebut dengan eletrisitas (e). jadi $e = \dfrac{PM}{PF}$



Gambar 6.1.6a



gambar 6.1.6b

Jadi jika $e < 1$, akan menghasilkan Elips

Jika $e = 1$, akan menghasilkan Parabola, dan

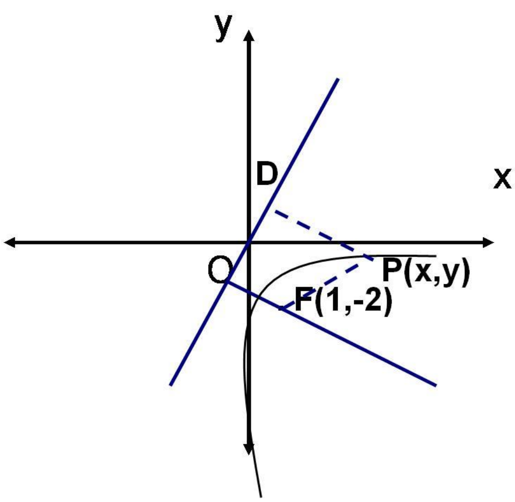
Jika $e > 1$, akan menghasilkan Hyperbola.
Kasus khusus akan menghasilkan Lingkaran jika $e = 0$.

***Teladan* 6.1.1**. Tentukan persamaan irisan kerucut yang mempunyai fokus di titik $F(1,-2)$ dengan $e = 1$ dan direktriknya adalah garis $2x - y = 0$.

Penyelesaian. Karena $e = 1$, maka irisan kerucut yang dihasilkan adalah parabola, arinya $PM = PF$, jadi

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \left|\frac{2x-y}{\sqrt{5}}\right|$$

Yang kalau disederhanakan akan menghasilkan $x^2 + 4y^2 - 4xy - 10x + 20y + 25 = 0$. Yang kalau digambarkan seperti gambar 6.1.7.



Gambar 6.1.7

***Latihan* 8**

Tentukan Persamaan Irisan kerucut yang memenuhi syarat berikut ini

1. Fokusnya di titik (-1,2) dan direktriknya di garis $x = 3$ dengan $e = 1$.
2. Fokusnya di titik (0,2) dan direktriknya di garis $y = 4$ dengan $e = ½$
3. Fokusnya di titik (0,0) dan direktriknya di garis $x = 3$ dengan $e = 2$.
4. Fokusnya di titik (1,-2) dan direktriknya di garis $2x - y = 0$ dengan $e = 1$.

5. Fokusnya di titik (3,0) dan direktriknya di garis $x = 5$ dengan $e = 1/3$.
6. Fokusnya di titik (-5,0) dan direktriknya di garis $x = 7$ dengan $e = 3/5$.
7. Fokusnya di titik (0,4) dan direktriknya di garis $y = -6$ dengan $e = 3/2$.
8. Fokusnya di titik (-3,2) dan direktriknya sumbu X dengan $e = 1$.
9. Fokusnya di titik (-5,-1) dan direktriknya di garis $2x + 3y - 6 = 0$ dengan $e = ½$.
10. Fokusnya di titik (-1,2) dan direktriknya di garis $3x + 4y + 12 = 0$ dengan $e = 3$.
11. Fokusnya di titik (0,0) dan direktriknya di garis $y = 3$ dengan $e = 1$.
12. Fokusnya di titik (2,,-3) dan direktriknya di garis $4x – 3y + 24$ dengan $e = 1$.

6.2. Tujuan

Adapun tujuan dari pembelajaran persamaan garis singgung pada parabola ini adalah setelah dan dalam proses pembelajaran terjadi/pelajar dapat :

1. Menentukan dasar parabola dari irisan kerucut dan memahami konsep eletrisitas.
2. Memahami konsep parabola yang tidak selalu terbuka ke kanan, ke kiri, ke atas atau ke bawah.
3. Mengkontruksi berbagai formula dari parabola bentuk standart
4. Mengkontruksi berbagai formula dari bentuk parabola yang tidak standart, hanya dengan menggunakan konsep translasi.
5. Mengkontruksi berbagai pendekatan untuk menentukan berbagai kasus garis singgung pada parabola bentuk standart
6. Mengkontruksi persamaan garis singgung untuk para bola yang tidak standart hanya dengan menggunakan konsep translasi.
7. Mendetilkan langkah pembuktian suatu formula sesuai dengan langkah pembuktian yang diberikan.

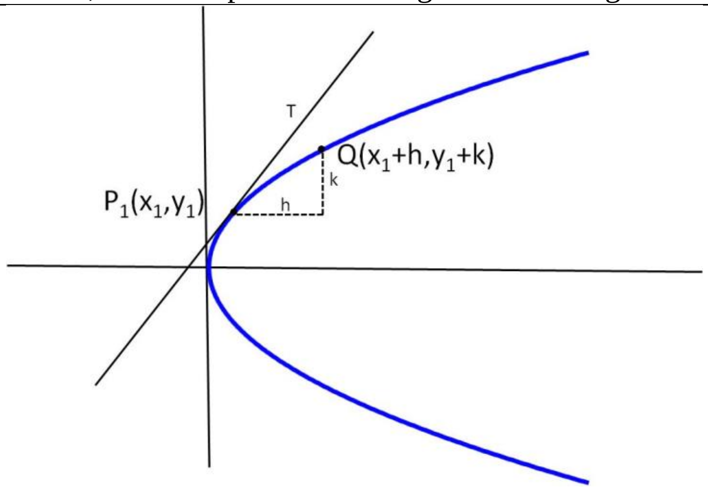
6.3. Persamaan Parabola Bentuk Baku

Kekurangannya ada dalam buku

6.8. Alternatif Menentukan Persamaan Garis Singgung Pada Parabola

- **Menentukan Persamaan Garis Singgung Pada Parabola $y^2 = 4px$ disebarang titik $P_1(x_1,y_1)$ pada Parabola.**

Coba anda perhatikan, bagaimana rumitnya menentukan persamaan garis singgung pada parabola tersebut, kita mesti memisalkan terlebih dahulu persamaan garis singgungnya, kemudian mensubsitusikan pada persamaan parabola, kemudian menghitung diskriminan dari persamaan yang diperoleh, sangat menyulitkan. Apalagi untuk persamaan parabola yang verteknya tidak berada pada 0(0,0). Maka berdasarkan kondisi tersebut, kita mesti mencari alternatif untuk menentukan persamaan garis singgung pada parabola tersebut, untuk itu perhatikan dengan cermat langkah/cara berikut ini

 Gambar 6.8.1	Perhatikan gambar parabola disamping, misalkan kita ambil titik Q pada parabola dan misalkan koordinat titik Q adalah (x_1+h, y_1+k), maka jelas kemiringan dari P_1Q adalah k/h,

Selanjutnya misalkan kemiringan garis singgung di titik $P_1(x_1,y_1)$ adalah m, sehingga jika Q makin mendekati titik P_1, maka akan berlaku

$$m = \lim_{Q \to P_1} \frac{k}{h}$$

Karena P_1 dan Q keduanya berada pada parabola, maka akan berlaku

$$y_1^2 = 4px_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.8.1)$$

dan

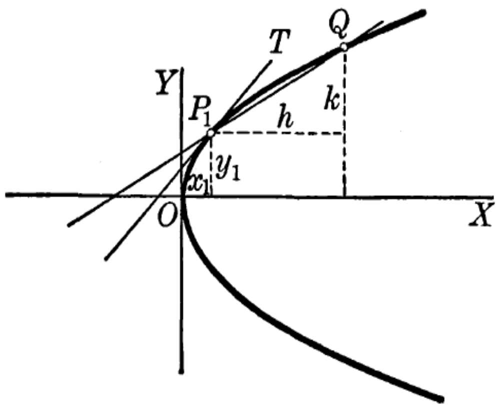
$$(y_1 + k)^2 = 4p\,(x_1 + h) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.8.2)$$

Kurangkan persamaan (6.8.1) dan (6.8.2), maka akan diperoleh

$$y_1^2 - (y_1 + k)^2 = 4px_1 - 4p\,(x_1 + h)$$
$$-(2ky_1 + k^2) = -4p\,(x_1 + h)$$
$$k(2y_1 + k) = 4ph$$

Sehingga

$$\frac{k}{h} = \frac{4p}{2y_1 + k}$$



Selanjutnya apabila Q $\rightarrow P_1$, maka k $\rightarrow$ 0, sehingga $\lim \frac{k}{h} = \frac{4p}{2y_1 + k}$, akan tetapi dipihak lain $\lim \frac{k}{h} = m$, yang merupakan kemiringan (gradient) dari garis singgung P_1T (lihat gambar disamping). Sehingga diperoleh $m = \frac{2p}{y_1}$, sehingga persamaan garis singgung di titik $P_1(x_1,y_1)$ yang berada pada para bola adalah

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1}\,(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1)$$

$$yy_1 - y_1^2 = 2px - 2px_1$$

$$yy_1 - 4px = 2px - 2px_1$$

$$y_1 y = 2p\,(x + x_1)$$

Dengan cara yang sama diharapkan anda dapat membuktikan menentukan persamaan garis singgung pada parabola dengan bentuk yang lain.

***Soal Latihat* 10.**

1. Dengan cara yang sama dengan alternatif menentukan persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 4px$, tentukanlah persamaan garis singgung pada parabola
   a) $y^2 = -4px$

b) $x^2 = 4py$
c) $x^2 = -4py$
d) $(y - b)^2 = 4p(x - a)$
e) $(y - b)^2 = -4p(x - a)$
f) $(x - a)^2 = 4p(y - b)$

2. Tentukan dua buah persamaan garis singgung pada parabolah $x^2 = -4y$ yang mana kedua garis singgungnya membentuk sudut 45^0.
3. Tentukan persamaan kedua garis singgung dari parabolah $(y - 4)^2 = 2(x + 1)$ yang mana kedua garis singgung tersebut membentuk sudut 30^0.
4. Tentukan persamaan garis singgung pada parabolah $y^2 = x + 2$ yang mana garis singgungnya membentuk sudut 60^0 dengan sumbu Y.
5. Tentukan persamaan para bola pada soal no 8 jika digeser sejauh 4 satuan kekanan dan 3 satuan ke bawah.
6. Tentukan persamaan parabolah pada soal no 9 jika digeser sejauh ke kiri 5 satuan dan ke atas 2 satuan.
7. Tentukanlah persamaan parabola
   a) $y^2 = 8x$, jika diputar 30^0.
   b) $x^2 = -2y$, jika diputar -30^0.
   c) $(y - 4)^2 = 12(x + 1)$ jika diputar 45^0.
   d) $(x - 2)^2 = 4(y - 1)$ jika diputar 60^0.
   e) $4x^2 = y + 2$, jika diputar 90^0.
   f) $4x^2 + 6x + y - 1 = 0$ jika diputar -60^0.
   g) $4x - 8y^2 + 4y - 2 = 0$ jika diputas sejau 135^0.

Daftar Istilah (Glosarium)

DAFTAR PUSTAKA

1. Ball, D. L. (1988). *Unlearning to teach mathematics*. East Lansing : Michigan State University, National Center for Research on Teacher Education.
2. Brian, O.C, 2010, *Misteries of the Equilateral Triangle*, Hikari Ltd,
3. Bogomolny, A. 2008. Sine, Cosine and Ptolemy's theorem. http://www.cut-the-knot.org/proofs/sine,cosine.html#law, 22 Mei 2012. Pk. 16.22.
4. Bottema, O, 2008, *Topics in Elementary Geometry*, second editions, springer, New-York
5. Colin Marsh. (1996). *Handbook for beginning teachers*. Sydney : Addison Wesley Longman Australia Pry Limited.
6. Coxeter, H.S.M and Greitzer, 1967, *Geometry Revisited*, Mathematical Association of America (Inc.)
7. David Bachman, 2007, Advance Calculus Demystified A Self Teching Guide, MS Graw Hill, New-York.
8. Debra Anne Ross, 1996, Master Math, Pre Calculus and Geometry, Carrer Press, USA.
9. D. Grinberg and P. Yiu, 2002, The Apollonius Circles as a Tucker Circle, *Forum Geometricorum*, 2, 175 – 182.
10. Downs Jr., F.L. 1964. *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, London

11. F. Smarandache and I. Patrascu, *The Geometry of Homological Triangles*, The Educatios Publisher, Inc., Ohio, 2012.
12. Florentin Smarandache, I.P, 2012, *The Geometry of Homological Triangle*, The Education Publisher, Inc, Ohio,
13. Gibson, C.G, 2003, *Elementary Euclidean Geometry An Introduction*, Cambridge University Press, New-York.
14. Gerard A. Venema: *Exploring Advanced Euclidean Geometry with Geometer's Sketchpad,* July 2006.
15. Glaeske, H.J and Skornik, K.A, 2006, Operational Calculus and Related Topics, Chapman & hall/CRC, Francis.
16. Godfray, C & Siddons, A.W. 1908. *Modern Geometry*. Cambridge University Press, London.
17. H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, the Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1967.
18. Jian Liu, 2008,A Weighted Geometric Inequality and its Applications, *Journal of Inequality in pure and Applied Mathematic*s, 9(2), 1 – 9.
19. Johnson, E. B. (2002). *Contextual teaching and learning*. California: A Sage Publications Company, Corwin Press, Inc.
20. Kimberling, C, *Encyclopedia of Triangle Centers*, 2000, http://www2.evansville/edu.ck6/encyclopedia.
21. M. Hajja, *A condition for a circumscriptible quadrilateral to be cyclic*, Forum Geom. 8 (2008), 103-106.
22. Mashadi, 2010, Bukti Sederhana Dari Teorema Carnot's dan Ketaksamaan Erdoss-Mordell. *Proseding KNM* XV, Manado, 41 – 55.
23. Mashadi, 2015, *Geometri* (edisi ke dua), Unri Press
24. Mashadi, 2015, *Geometri Lanjut*, Unri Press.
25. Mashadi, S. Gemawati, Hasriati, dan H. Herlinawati, *Semi excircle of quadrilateral*, JP J. Math.Sci. 15(1 & 2) (2015), 1-13.

26. Mashadi, S. Gemawati, Hasriati, dan P. Januarti, *Some result on excircle of quadrilateral*, JP J. Math.Sci. 14 (1 & 2) (2015), 41-56.
27. Paul Yiu, 2001, *Introduction to the Geometry of the Triangle*, Department of Mathematics Florida Atlantic University
28. Ricard Bagbay, 2001, Introductory Analysis A Deefer View Calculus, Harcourt Academic Press, Tokyo
29. Salazar, J. C. 2004. On the Areas of the Intouch and Extouch Triangles. *Forum Geometricorum*, **4** (2004): 61-65.
30. Sastry, K. R. S. 2001. Heron Triangles: A Gergonne-Cevian-and-Median Perspective. *Forum Geometricorum*. **1**(2001): 17-24
31. Serge Lang and Gene Murrow, 1988, *Geometry*, second editions, Springer, London.
32. Sheal, Peter. (1989). *How to develop and present staff training courses*. London : Kogan Page Ltd.
33. Wong Yan Loi, 2009, *An Introductions to Geometry*, Academic press inc.
34. Zvonko, Cerin, 2003, Lines with the butterfly property, *Mathematical Communications*, volume 8, 35 – 41.
35. http://www.cut-the-knot.org/triangle/Fagnano.shtml

Indeks Symbol

ΔABC := Segitiga ABC

$L\Delta ABC$:= Luas Segitiga ABC

□$ABCD$:= Segi-empat $ABCD$

L□$ABCD$:= Luas Segi-empat $ABCD$

$m = \frac{\Delta x}{\Delta y}$:= Kemiringan

$\sim$:= Sebangun

$AB \cap CD$:= Perpotongan AB dengan CD

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$: = ΔABC sebangun dengan ΔDEF

$\cong$: = Kongruens

$AC \cong DF$: AC Kongruen dengan DF

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$:= ΔABC kongruen dengan ΔDEF

$m\angle ACB$: = ukuran sudut ACB

$\angle ACB$: = sudut ACB

s = Setengah keliling segitiga

$\wedge$:= Konjungsi

$\vee$: = Disjungsi

$\Rightarrow$:= Implikasi atau, maka

$\Leftrightarrow$: = BiImplikasi atau Jika dan hanya jika

$\sim$: = Negasi

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ matrik berordo $m \times n$

A_{mxn} : =Matrik A berordo mxn

$|A|$: = Determinant Matrik A

A^{-1} := Invers Matrik A

C_{ij} := Cofaktor ke baris ke i kolom ke j

M_{ij} := minor a_{ij} dari matriks A

Adj A := Adjoint Matrik A

$\sum_{i=1}^{n} x_i$:= Sigma X_i, untuk i = 1, 2, 3, . . ., n

$f'(x)$:= Turunan fungsi $f(x)$

Δx := Perubahan mendatar

Δy := Perubahan tegak

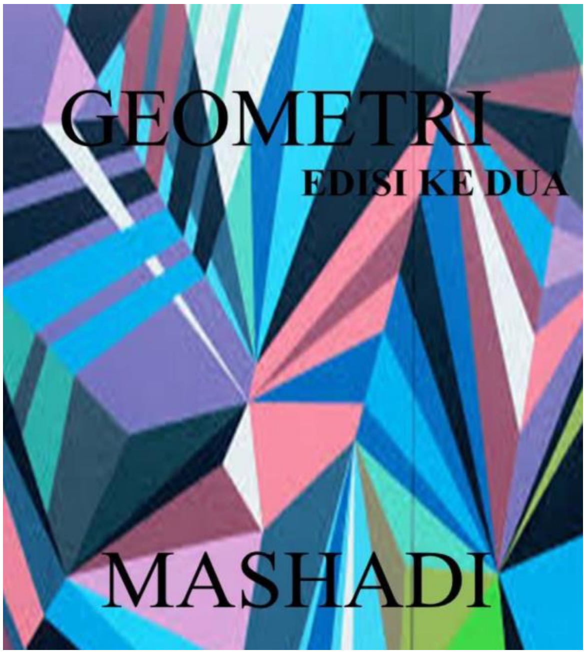
// := Sejajar

$\perp$:= Tegak lurus

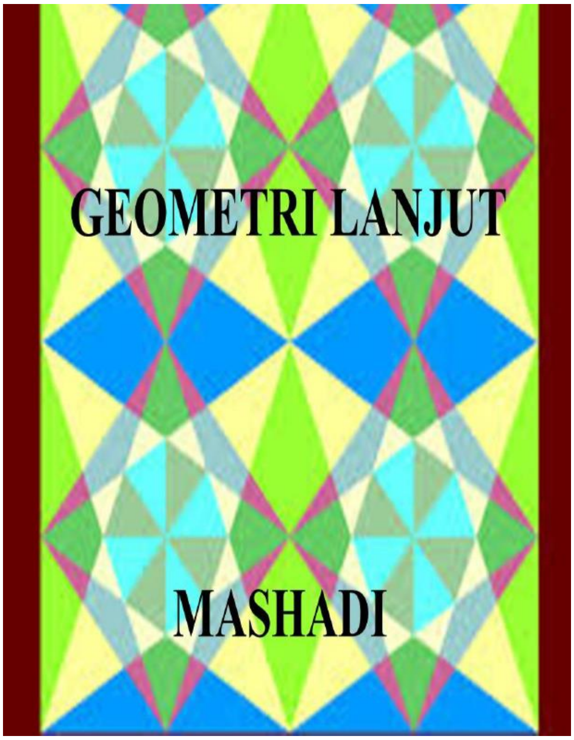
$\neq$:= Tidak sama

Ω := Bidang Omega

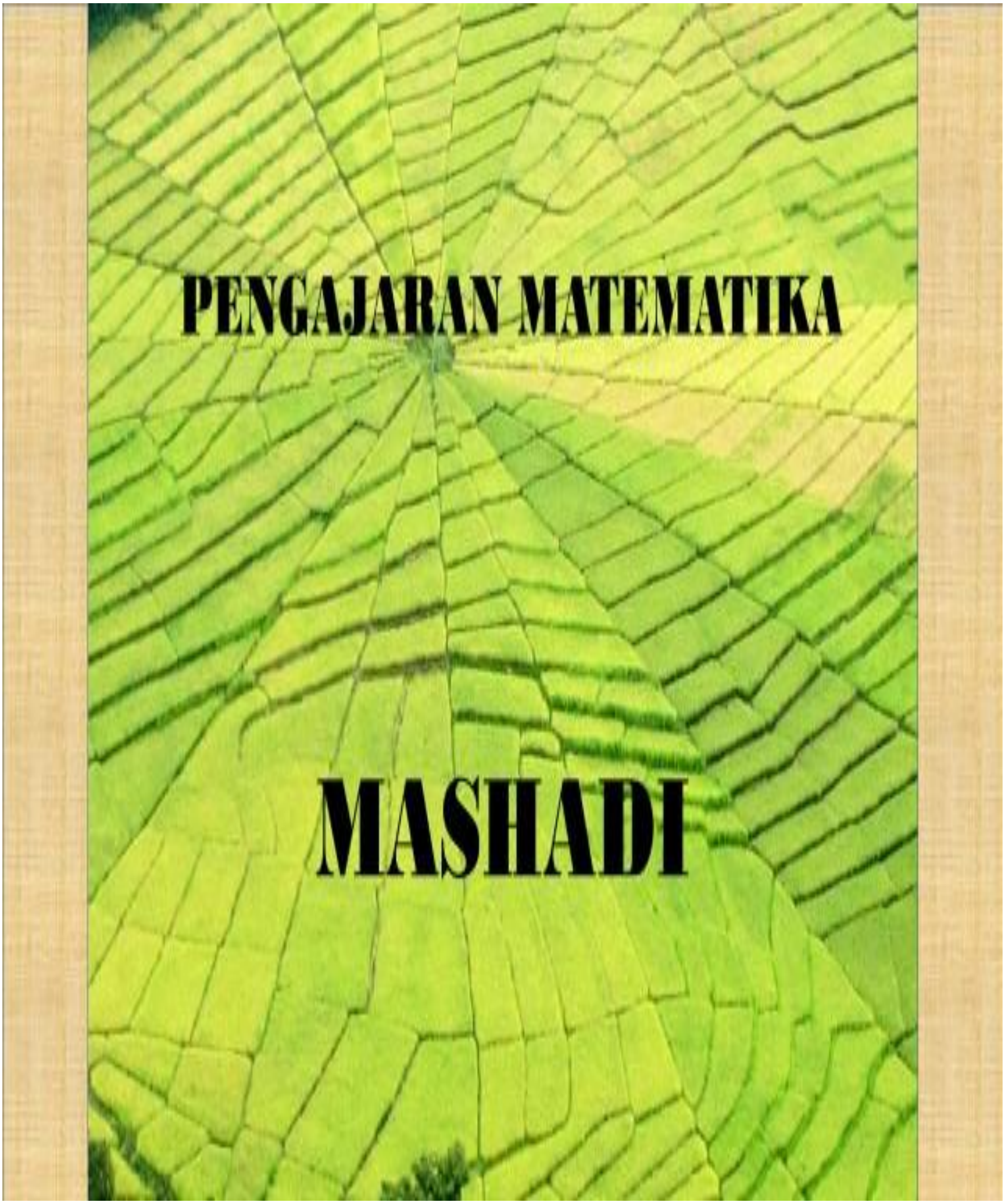
Buku yang sudah ditulis oleh penulis :



Edisi pertama dari buku ini dicetak pada tahun 2012 dan edisi kedua dicetak pada tahun 2015, buku berisi berbagai konsep geometri dengan pendekatan yang sangat sederhana, sehingga hampir semua formula yang ada dalam geometri dapat dibuktikan dengan hanya menggunakan konsep Luas, Pythagoras, kesebangunan dan jika diperlukan dengan sedikit menambahkan konsep sederhana yang ada pada trigonometri. Akan tetapi buku ini lebih terkesan geometri Euclide dari pada Geometri Analitik. Buku ini sangat baik digunakan untuk pembelajaran Geometri di jenjang S1,



Buku ini dicetak pada tahun 2015, isinya merupakan kelanjutan dari isi buku geometri. Pendekatan konsep yang digunakan dalam buku ini tetap sama, yaitu pembuk-tian yang selalu diutamakan dengan menggunakan konsep luas, Pythagoras, kesebangunan dan sedikit konsep trigonometri. Namun sudah membahasi berbagai konsep yang lebih tinggi pada geometri. Misalnya pembahasan tentang teorema Butterfly, Ketak-samaan Erdos-Mordell. Berbagai Titik Gergonne dan titik Nagel baik untuk segitiga maupun segi-empat. Buku ini baik digunakan pada level Magister, Matematika dan Pendidikan Matematika dan Pengajaran Matematika


PENGAJARAN MATEMATIKA
MASHADI