# GEOMETRI LANJUT

MASHADI

# KATA PENGANTAR

Buku ini merupakan penyempurnaan materi kuliah Geometri Lanjut pada prodi S2 Matematika FMIPA Universitas Riau selama 3 tahun terakhir. Materi ini juga memuat beberapa hasil penelitian hibah Pascasarja dan tesis mahasiswa di prodi S2 Matematika FMIPA Universitas. Buku ini lebih diutamakan untuk perkuliahan geometri lanjut di tingkat S2, akan tetapi di 5 bab awal dapat menjadi pengembangan bagi mahasiswa di tingkat S1.

*Isi secara umum*

Secara umum isi dari buku ini memuat beberapa pendekatan yang berbeda dengan geometri analitik, karena penekanan dalam buku ini bukanlah bersifat analitik. Pada awal buku diberikan satu bab tentang motivasi, dengan tujuan ingin menunjukkan bahwa sebenarnya sangat menarik bagi kita untuk mempelajari geometri dan juga menunjukkan bahwa banyak persoalan lain yang sebenarnya mudah kita selesaikan dengan menggunakan pendekatan geometri. Selain dari itu dalam banyak pendekatan diberikan bahwa kita dapat dengan mudah membuktikan suatu teorema yang mungkin hanya kita cukup menggunakan konsep luas dan teorema Pythagoras yang sudah dikenal mulai dari sekolah menengah pertama.

Dalam banyak teorema diberikan berbagai alternatif pembuktian, mulai dari konsep yang sederhana dan juga sampai ke tinggal analisis dengan pemikiran yang mendalam. Khusus pada bab bab 4 dan bab 5 tentang panjang garis berat dan garis tinggi. Hal ini diberikan dengan tujuan ingin menunjukkan bahwa untuk mencapai sesuatu itu jalannya tidak selalu tunggal tapi kita dapat menggunakan konsep yang lebih sederhana. Jadi secara umum isi buku ini adalah mencoba memberikan pendekatan pembuktian suatu konsep dengan menggunakan konsep yang lebih sederhana.

Pada bab 2 dan 3 adalah berupa lingkaran I dan Lingkaran II, akan tetapi isi dari bab tersebut bukanlah tentang persamaan lingkaran, akan tetapi terkait berbagai permasalahan pada lingkaran sampai pada lingkaran singgung luarnya. Kemudian pada bab 4 dan 5 mempahas tentang berbagai pendekatan dalam menurunkan rumus panjang giris berat dan garis tinggi. Hal ini diharapkan kepada pembaca terutama mahasiswa, dari ide yang diberikan tentang garis berat dan garis tinggi. Dapat diterapkan pada garis bagi.

*Untuk Mahasiswa*

Materi pada bab 1 pada dasarnya hanyalah ingin memotivasi pembaca dan menunjukkan bagaimana mudahnya kita bekerja dengan menggunakan geometri dan yang paling penting adalah mengingatkan bahwa janganlah dalam menyelesaikan persoalan geometri kita selalu mengingat rumusnya dan bagaimana cara menghitungnya, pada bab ini juga diberikan contoh sederhana bagaimana menyelesaikan suatu persoalan tanpa harus menggunakan rumus-lrumus yang sulit.

Materi pada bab 2, 3 , 4 dan 5 merupakan materi Level S1, akan tetapi menjadi dasar bagi mahasiswa S2 untuk memperajari bagian selanjutnya anda harus memahami konsep yang ada pada bab-bab tersebut, terutama bab 2 dan bab 3, sedangkan bab 4 dan 5 lebih difokuskan kepada mencari alternative dalam membuktikan suatu formula. Sedangkan mulai dari bab 6 sampai akhir, merupakan materi pokok utama bagi mahasiswa S2.

*Untuk Dosen*

Perlu dipahami bahwa terdapat beberapa konsep yang muncul pada beberapa bab, akan tetapi hal itu sengaja disusun sedemikian rupa agar, materi dapat menyambung dengan materi selanjutnya. Akan tetapi dalam proses pengajaran diperolehkan memberikan konsep yang ada pada suatu bab tapi disambungkan dengan materi yang sama pada bab lain. Mialnya konsep centroid ada di bab 2, 3 dan 6, kalau Bapak/Ibu dalam proses pembelajaran menginginkan dalam satu pertemuan konsep centroid selesai untuk ke tiga teorema yang ada, maka pembelajarannya dapat dilakukan mengambil materi yang ada pada masing-masing bab tersebut dan untuk selanjutnya diteruskan sesuai dengan tujuan pembelajaran yang anda susun.

*Teladan dan soal latihan*

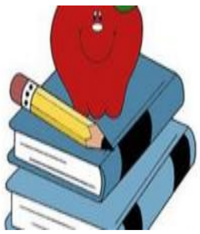
Seperti dalam banyak buku matematika (termasuk geometry) kebanyakan isi dari buku tersebut adalah soal latihan, sehingga pada kebanyakan buku soal latihan dibuat disetiap akhir sub bab. Akan tetapi dalam buku ini soal latihan tidak dibuat dalam setiap sub bab, akan tetapi dibuat setelah 2 atau 3 sub bab. Hal ini sengaja dilakukan karena beberapa soal memang diperlukan konsep yang dibahas dalam 2 atau 3 sub bab tersebut, namun demikian sedikitnya jumlah soal latihan tidak akan mengurangi bahan bagi mahasiswa untuk mencari soal latihan. Karena soal yang ada pada umumnya cukup bervariasi dengan tingkat analisis yang berbeda.

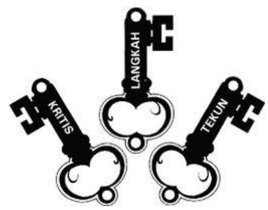
Soal latihan dibagi dalam 3 bagian, bagian pertama yang tanpa tanda bintang, soal yang tanpa tanda bintang adalah soal dalam tingkat analisis mudah, sedang dan agak sulit, sehingga diharapkan kepada para mahasiswa untuk dapat minimal mengerjakan soal yang tanpa tanda bintang. Bagian kedua soal dengan tanda (*). Ini sudah merupakan soal dengan tingkat kesulitan agak tinggi, sehingga mungkin hanya mahasiswa yang sangat berminat di bidang geometry yang dapat menyelesaikannya. Bagian ketiga adalah soal dengan tanda (**), ini merupakan soal dengan tingkat kesulitan sangat tinggi. Bagi mahasiswa yang mampu menyelesaikan soal dengan tanda (**) berarti anda punyai kemampuan geometri dan analisis yang cukup/sangat baik. Dalam buku ini contoh soal diistilahkan dengan teladan.

# DAFTAR ISI

# BAB I

# MOTIVASI






Motivasi ini diberikan kepada pembaca adalah untuk menunjukkan bahwa ternyata tidak semua persoalan dalam geometri itu mesti kita selesaikan dengan menggunakan rumus yang sulit, perhatikan motivasi 1, bagaimana persoalan statistik tingkat sekolah menengah atas, yang biasanya diselesaikan dengan rumus yang rumit ternyata masalah tersebut cukup diselesaikan dengan konsep kesebangunan yang sudah dipelajari ditingkat sekolah menengah pertama. Begitu juga dimotivasi 2 dan 3. Pada Motivasi 2 terlihat bahwa kalau biasanya luas daerah pada suatu segi tiga itu mesti dikerjakan dengan rumus yang rumit dan panjang, ternyata dengan sedikit pemikiran persoalan tersebut cukup dikerjakan dengan cara yang sederhana yaitu hanya dengan menggunakan rumus Pythagoras yang sudah sangat dikenal oleh semua pelajar.

# BAB I

# MOTIVASI

## 1.1. *Motivasi* 1

Banyak persoalan dalam hidup ini yang dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep geometri, akan tetapi kita sering tidak memikirkan sebenarnya persoalan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan geometri. Begitu juga dalam berbagai disiplin ilmu, mungkin diperlukan ilustrasinya dalam bentuk geometri dan malah mungkin ia dapat diselesaikan secara geometri (selain penyelesaian dalam disiplin ilmu itu sendiri). Berikut ini diberikan salah satu contoh persoalan statistika tingkat sekolah menengah yang menjadi masalah yang membosankan bagi siswa, karena mesti menghapal rumus-rumus yang menyulitkan.

Data pada tabel 1.1.1 di bawah ini merupakan data tinggi badan peserta seleksi calon pramugari. Jika peserta yang lulus seleksi adalah peserta yang tingginya lebih dari 156 cm, berapa orangkah yang lolos seleksi (begitulah bunyi soal dalam persoalan statistik).

| Tinggi badan (cm) | f |
|---|---|
| 150 - 154 | 6 |
| 155 - 159 | 10 |
| 160 - 164 | 18 |
| 165 - 169 | 22 |
| 170 - 174 | 4 |
| Total | 60 |

Tabe1 1

Jika sekiranya mahasiswa/siswa mesti mengerjakan secara statisti, maka mahasiswa/siswa tersebut mesti mengingat, apa rumus yang harus digunakan untuk menghitung banyaknya peserta yang tingginya lebih besar dari 156 cm. persoalannya adalah bagaimana kalau mahasiswa/siswa tersebut lupa dengan rumusnya.

Secara statistika persoalan di atas mesti diselesaikan dengan menggunakan rumus berikut ini :

$$N = L + \frac{x - f_x}{f} \times c$$

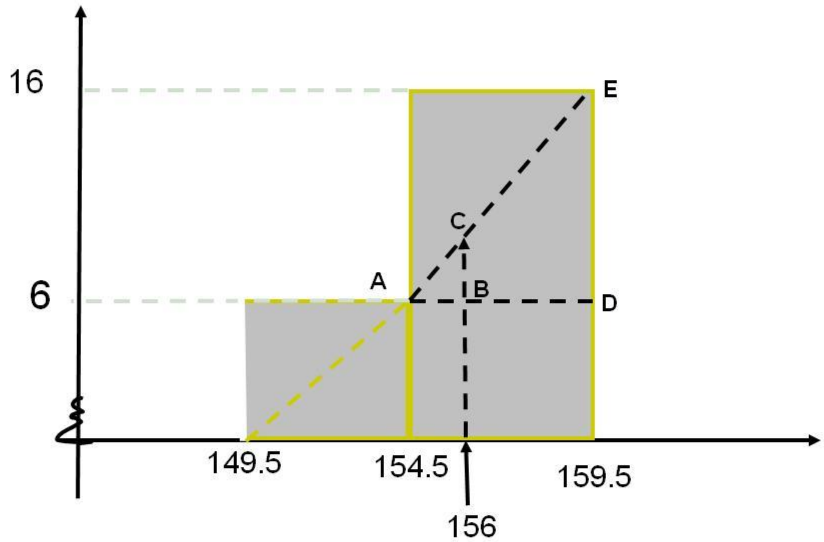
$$156 = 154.5 + \frac{x - 6}{10} \times 5$$

$$1.5 = \frac{5(x-6)}{10}$$

$x - 6 = 3$

$x = 9$

Apa persoalannya, bagaimana repotnya kita kalau mesti menghapal rumus, selain itu, harus dipahami lagi, apa itu $f_x$, $f$, $L$ dan lain sebagainya. Tapi mari kita coba perhatikan kalau kita selesaikan hal itu secara geometri. Terlebih dahulu untuk pengembangan daya kognitif, coba gambarkan data tersebut dalam bentuk berikut ini




Gambar 1.1.2

Maka yakinlah, siswa SMP saja akan dapat menunjukkan bahwa $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, yang mengakibatkan

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \text{ sehingga } \frac{3/2}{5} = \frac{BC}{10}$$

Jadi $BC$ = 3. Jadi $TC$ merupakan banyaknya perserta yang tingginya kecil atau sama dengan 156. Sebut $P$ = banyaknya peserta yang tingginya lebih dari 156

Maka

$P$ = banyaknya perserta – $TC$ = 60 – 9 = 51 orang.

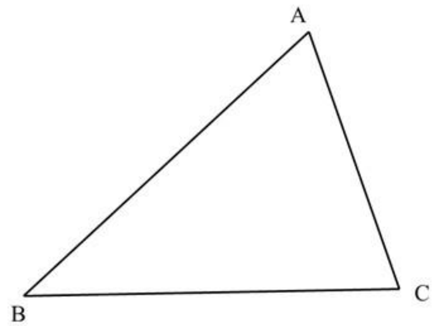
Yang perlu pembaca pahami adalah, bagaimana mudahnya persoalan di atas kita kerjakan dengan menggunakan geometri dan yang paling penting adalah kita tidak perlu menghapal berbagai rumus statistik yang sangan rumit tersebut, akan tetapi bagaimana kita memformulasikan suatu persoalan tersebut dalam bentuk geometri yang sederhana (walaupun tidak semua masalah bisa kita ilustrasikan secara geometri yang sederhana).

## 1.2. *Motivasi* 2

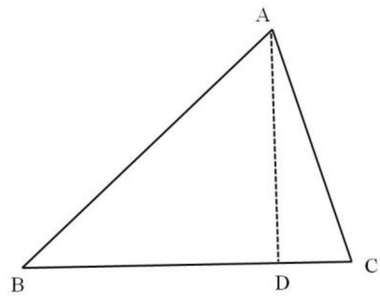
Di dalam geometri sendiri kita sering dalam menyelesaikan soal-soal bertumpu kepada, apa rumusnya dan bagaimana menghitungnya, sehingga tidak berkembangnya kemampuan kognitif dan daya analysis dari mahasiswa, kita hanya ingin belajar berhitung bukan bermatematika. Kondisi seperti inilah yang akan membuat pelajar (baik siswa maupun mahasiswa) tidak berkemampuan lemah dalam menyelesaikan problem solving. Perhatikan soal berikut : Perhatikan gambar 2.1.1a. Jika panjang sisi $\Delta ABC$ masing adalah 70, 80 dan 50 untuk sisi $AB$, $BC$ dan AC, berapakah luas segitiga tersebut.

Kebanyakan siswa/mahasiswa dalam menghadapai persoalan di atas, yang dipikirkan pertama adalah apa rumusnya. Maka kalau rumusnya lupa atau persoalan tersebut kita robah dalam bentuk segiempat atau segilima sebarang. Maka sudah mustahil siswa/mahasiswa tersebut akan dapat menyelesaikannya. Akan tetapi coba kalau kita berpikir sebagai berikut : Pada gambar 1.2.1a buat garis titik $A$ yang tegaklurus ke $BC$

dan katakan titik potongnya adalah $D$. dan misalkan panjang sisi $BD = x$, maka $DC = 70 - x$, sehigga dari teorema Pythagoras berlaku :




Gambar 1.2.1a




Gambar 1.2.1b

$$AB^2 - BD^2 = AD^2 = AC^2 - DC^2$$
$$70^2 - x^2 = 50^2 - (80 - x)^2$$
$$70^2 - x^2 = 50^2 - 80^2 + 160x - x^2$$
$$4900 = (50 - 80).(50 + 80) + 160x$$
$$4900 = -3900 + 160x$$
$$160x = 8800$$
$$x = 55$$

setelah dapat $x$ maka tinggi segitiga yaitu $AD$ adalah

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 70^2 - (55)^2 = 1875$$

Jadi AD $\approx$43.3

Sehingga $L\Delta ABC = ½\ BC.AD = ½\times 80\times 43.3 = 1732.05$.

Apa yang perlu diperhatikan dalam penyelesaian di atas adalah, kita sebenarnya dapat menyelesaikan banyak persoalan matematika tanpa harus melalui rumusnya, kita dapat mengerjakan dengan konsep matematika yang paling sederhana, yang dalam contoh di atas hanya dengan menggunakan rumus Pythagoras yang dikenal oleh semua siswa sekolah menengah. Jadi sebenarnya soal di atas dapat diberikan ke siswa tingkat

Sekolah Menengah Pertama dan tidak mesti kita mengerjakannya dengan menggunakan rumus

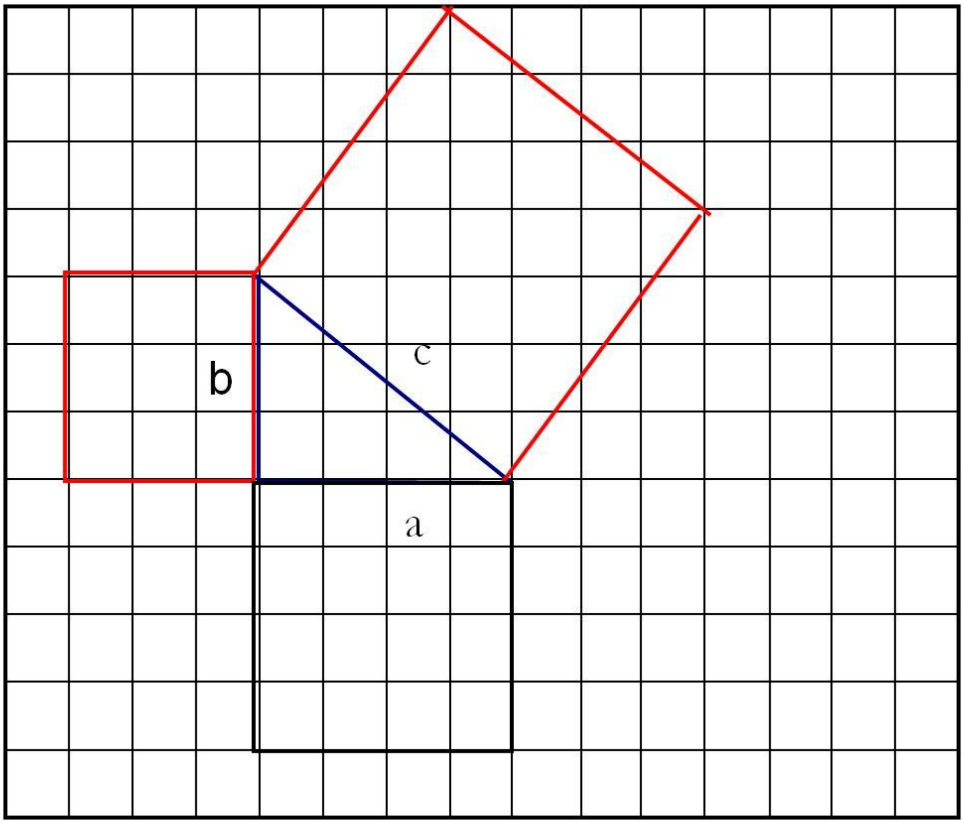
$$L\Delta ABC = \sqrt{s(s-a).(s-b).s- \ c)}$$

## 1.3. *Motivasi* 3 ( *Teorema Pythagoras*).

Salah satu teorema yang paling terkenal, mulai dari tingkat sekolah menengah pertama dan mungkin dari tingkat sekolah dasar adalah Teorema Pythagoras. Akan tetapi banyak diantara pelajar tidak memahami dengan benar asal muasal dari teorema Pythagoras tersebut. Sebagai contoh berikut ini diberikan salah satu bukti teorema Pythagoras yang ada dalam berbagai buku sekolah menengah buktinya diberikan seperti gambar 1.3.1. makna dari gambar tersebut adalah Jika kita punya segitiga siku-siku dengan panjang sisi masing-masing adalah $a$, $b$ dan $c$ dengan $c$ sebagai sisi didepan sudut siku-siku, maka berlaku $c^2 = a^2 + b^2$.

Hebatnya di dalam berbagai buku selalu dibuat panjang sisi $a$ dan $b$ adalah 3 atau 4 (jika $a = 3$ maka $b = 4$ atau sebaliknya). Karena kuadrat itu juga bermakna luas, maka luas segi empat yang panjang sisinya $3 = b$, adalah 9 kotak dan luas daerah segiempat yang panjang sisinya $4 = a$ adalah 16 kotak, yang diharapkan luas daerah segiempat yang panjang sisinya 5 adalah 25 kotak seperti digambarkan pada gambar 1.3.1 (sisi $c$ yang miring). Pernahkah kita berpikir, bagaimana menunjukkan, bahwa jumlah kotak yang diliputi oleh segiempat miring yang panjang sisinya 5 tersebut adalah 25 kotak, karena bentuknya miring dan kotak-kotaknya terpotong-potong. Sebenarnya kita dapat menunjukkan dengan metoda simulasi, jika kotak yang miring tersebut kita baringkan, maka akan jelaslah ia akan meliputi sebanyak 25 kotak, akan tetapi sedikit yang berpikir seperti itu.

Berikut ini akan diberikan beberapa cara mudah untuk membuktikan teorema Pythagoras.perhatikan $\Delta ABC$ seperti gambar 1.3.2b, dengan masing-masing panjang sisi adalah $a$, $b$ dan $c$. Akan ditunjukkan berlaku $c^2 = a^2 + b^2$.




Gambar 1.3.1

***Cara I. Metoda Persegi***

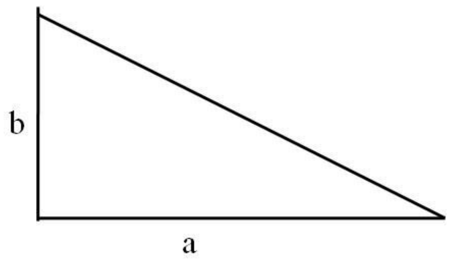
Bentuk suatu persegi dengan panjang sisi $a + b$. maka ditengah-tengahnya diperolah persegi yang panjang sisinya $c$. tentunya luas persegi yang besar adalah $(a + b)^2$. Dipihak lain luas persegi yang besar itu juga dapat dinyatakan sebagai jumlah luas 4 buah segitiga ditambah luas persgi di tengah. Jadi

$$4.½\, a.b + c^2 = (a + b)^2$$

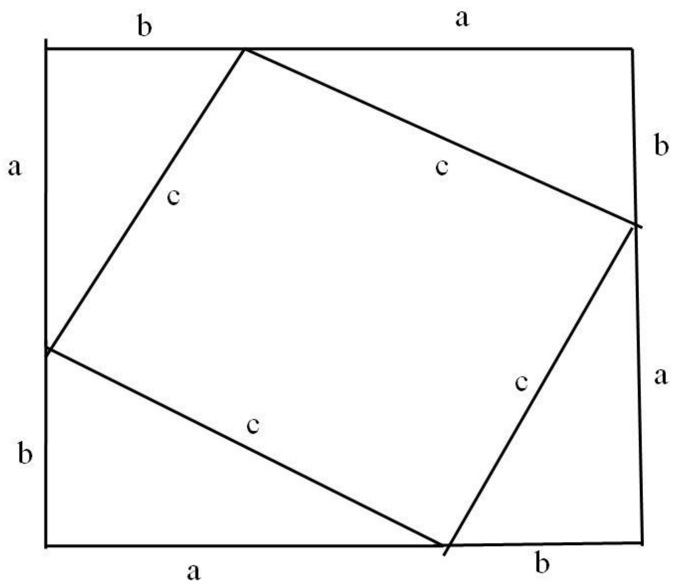
$$1\, a.b + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Jadi

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

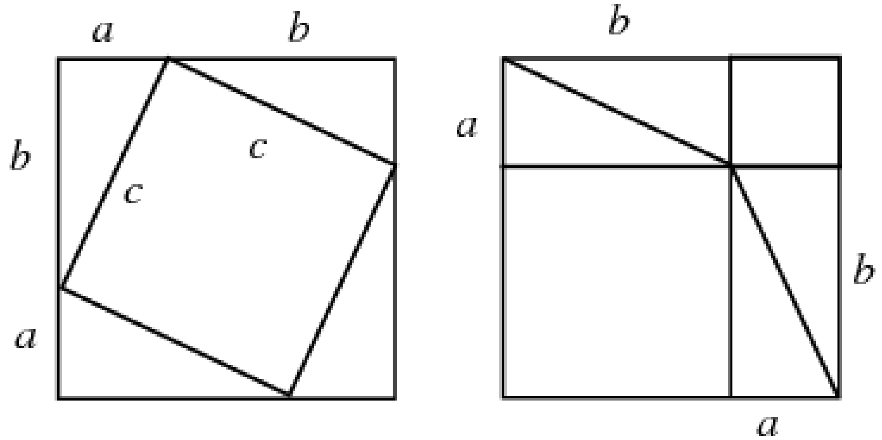



Gambar 1.3.2a




Gambar 1.3.2b

Posisi sisi *a* dan *b* untuk membuktikan teorema Pythagoras dengan cara seperti di atas juga dapat di gambarkan dengan cara seperti gambar 1.3.3




Gambar 1.3.3

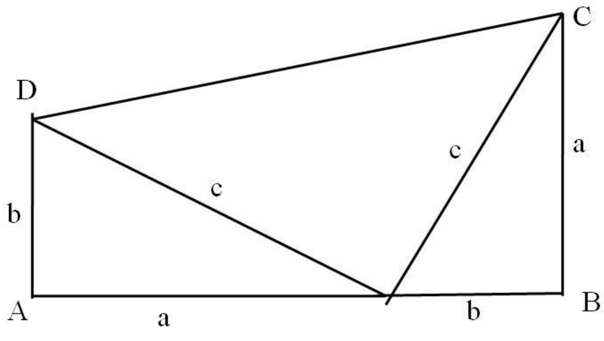
***Cara* II. *Metoda trapesium***

Untuk segitiga yang salam seperti segitiga pada gambar 1.3.2a, akan tetapi kita bentuk suatu trapesium yang panjang sisi sejajarnya adalah *a* dan *b*, kemudian salah satu sisi datarnya berukuran *a* + *b* (seperti gambar 1.3.3).

Jadi diperoleh suatu trapesium *ABCD* yang dibentuk oleh dua buah segitiga yang sebangun dan setengah persegi yang panjang sisinya adalah *c*. Jadi luas trapesium tersebut adalah

$$L = \tfrac{1}{2}\,(a + b).(a + b) \qquad (1.3.1)$$

Dipihak lain luas trapesium itu juga dapat dipandang sebagai jumlah luas dua buah



Gambar 1.3.3

segitiga ditambah separoh luar persegi yang panjang sisinya *c*.

Yaitu

$$\tfrac{1}{2}\,.2.ab + \tfrac{1}{2}\,c^2 \qquad (1.3.2)$$

Dari persamaan 1.3.1 dan 1.3.2 diperoleh

$$\tfrac{1}{2}\,(a^2 + 2ab + b^2) = ab + \tfrac{1}{2}\,c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

***Cara III. Metoda kesebangunan***

Perhatikan $\Delta ABC$, kemudian buat garis tegak lurus dari sudut siku-siku ke sisi terpanjang (seperti gambar 1.3.4). dan sebut $c = x + y$. maka akan diperoleh $\Delta ABC \sim \Delta DAC$, sehingga diperoleh

$$\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

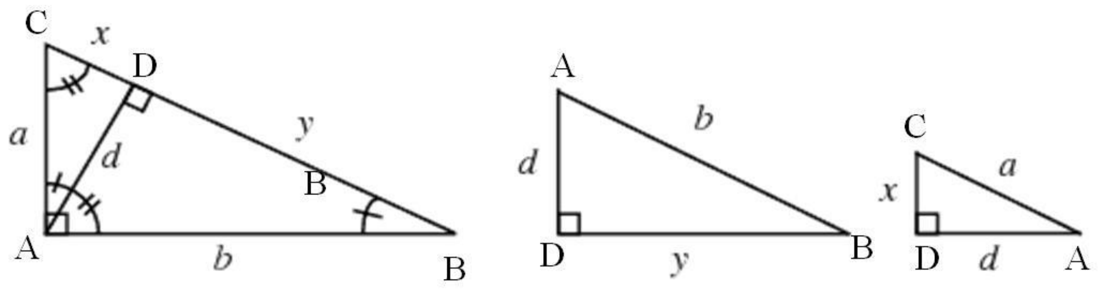
Jadi

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{c}$$

Sehingga $a^2 = xc$

Kemudian karena $\Delta ABC$ juga sebangun dengan $\Delta DBA$, maka diperoleh

$$\frac{DB}{BA} = \frac{AB}{BC}$$




Gambar 1.3.4

Sehingga

$$\frac{y}{b} = \frac{b}{c}$$

Yang mengakibatkan $b^2 = c.y$

Maka

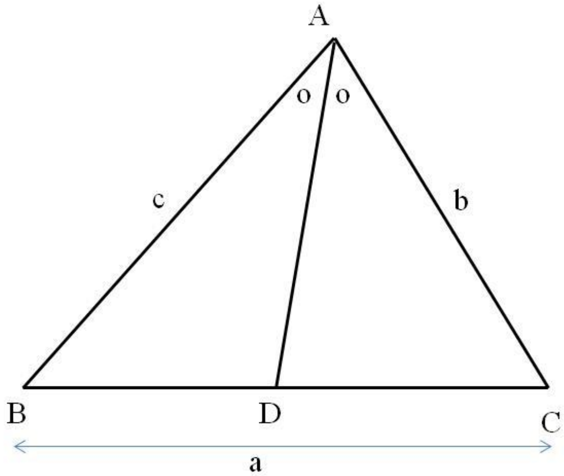
$$c^2 = c.c = c(x + y) = cx + cy = a^2 + b^2.$$

**1.4. Motivasi IV.**

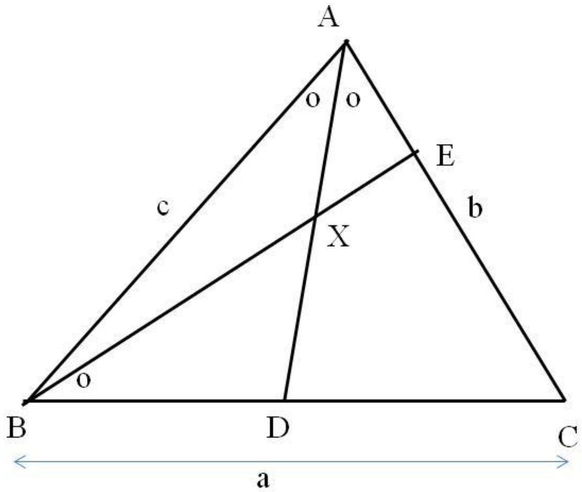
Dalam berbagai buku teks di tingkat SMA/MA dan SMK telah diberikan cara untuk menghitung panjang garis bagi dari suatu sudut pada suatu segitiga. Misalkan segitiga ABC dan buat garis bagi dari sudut A. Misalkan garis bagi dari sudut A tersebut memotong sisi BC di titik D. Persoalannya adalah, apakah hanya seperti yang ada di buku teks SMA/MA dan SMK itu cara menentukan panjang sisi AD. Berikut ini akan diberikan beberapa alternatif untuk menghitung panjang garis bagi. Tujuan dari alternatif yang diberikan disini adalah untuk mengasah kemampuan analisis berfikir pembaca, bagaimana kita dapat mengkontruksi sesuatu dengan cara yang lebih mudah. Untuk mengasah kemampuan analisis pembaca (mahasiswa) maka tidak semua cara akan diuraikan secara lengkap, akan tetapi yang diberikan hanyalah langkah pembuktian secara lengkap.

**Alternatif 1.**

Perhatikan gambar 1.5.1a di bawahyang mana ∠BAD = ∠CAD, akan ditentukan panjang sisi AD yang merupakan panjang garis bagi dari sudut A (lihat gambar 1.5.1a), kemudian buat garis dari titik B ke sisi AC sehingga ∠ CBE = ½ ∠A = ∠BAD = ∠CAD. Untuk langkah selanjutnya bimbinglah siswa untuk menunjukkan bahwa




Gambar 1.5.1a




Gambar 1.5.1.b

Maka akan diperoleh :

- ∠AED = ∠EDB dan ∠ ADB = ∠CAD + ∠ACB = ∠BAD + ∠ACB

  ∠AEX = ∠ACB + ∠CBE = ∠ACB + ∠BAD
- Dengan menunjukkan kesebangunan ΔABD dengan ΔAEX, akan didapatkan perbadingan berikut :

  $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AX}$ atau $AD = \frac{AB.AE}{AX}$
- Karena AD = AX + DX dan

  $AD^2 = AD.AD = \frac{AB.AE}{AX}(AX + DX) = AB.AE + \frac{AB.AE}{AX}.DX = AB.AE + AD.DX$
- Pandang AE = AC – CE, maka akan diperoleh

$AD^2 = AD.DX + AB.AC – AB.CE$

$= AB.AC – AB.EC + AD.DX$

- Selanjutnya pandang $\angle$ CAD = $\angle$CBE yang akan mengakibatkan $\Delta$ ADC ~ $\Delta$BEC yang menghasilkan $\frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC}$
- Karena AD adalah bisektor sudut A, mengakibatkan $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ dan juga $\frac{DC}{AC} = \frac{BD}{AB}$
- Sehingga $\frac{EC}{BC} = \frac{BD}{AB}$ yang bermakna

$$AB.EC = BC.BD \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.5.1)$$

- Karena $\angle$CBE = $\angle$BAD, mengakibatkan $\Delta$ ABD ~ $\Delta$BDX, yang mengakibatkan $\frac{BD}{AD} = \frac{DX}{BD}$ sehingga

$$BD^2 = AD.DX \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.5.2)$$

- Dengan menggunakan $AD^2 = AD.DX + AB.AC – AB.CE$, persamaan (1.5.1) dan (1.5.2) maka diperoleh

$$AD^2 = AB.AC - BC.BD + BD^2$$

$$= AB.AC – BD(BC – BD) = AB.AC – BD.DC \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.5.3)$$

- Karena $\frac{c}{b} = \frac{BD}{DC}$ dan AD bisektor BD, maka berlaku $BD = \frac{ac}{b+c}$ dan $DC = \frac{ab}{b+c}$
- Maka dari persamaan (1.5.3) diperoleh

$$AD^2 = BC + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

Jadi panjang garis bagi dari titik A adalah

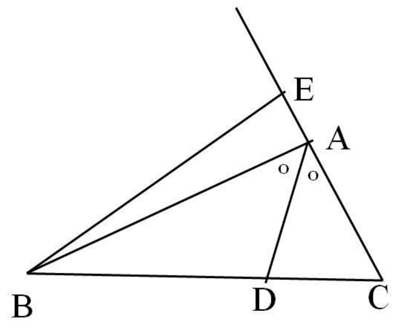
$$AD^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$

Dengan cara yang sama panjang Garis bagi dari titik B dan titik C adalah

$$BE^2 = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right)$$

$$CF^2 = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)$$

Perhatikanlah penurunan rumus di atas, serta gambarnya, pernahkah anda pikirkan jika sekiranya ∠CBE > ∠ABC, dengan kata lain ∠ ½ A > ∠B. Untuk itu perpanjang garis CA dan buat titik E di perpanjangan CA sehingga ∠ ½ A = ∠CBE.



Gambar 1.5.2.

Maka pembaca dapat mencoba untuk menunjukkan bahwa akan tetap berlaku

$$AD^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$

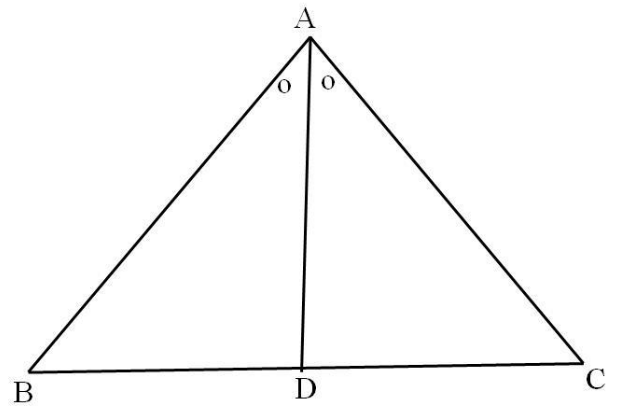
**Alternatif 2.**

Sama seperti pada kasus lainnya, misalkan AD adalah garis bagi ∠A, maka akan ditentukan panjang sisi AD (perhatikan gambar 1.5.3), untuk itu buat garis DE dan DF sehingga DE / /CA dan DF // BA. Sehingga segiempat AEDF merupakan jajaran genjang (perhatikan gambar 1.5.3).

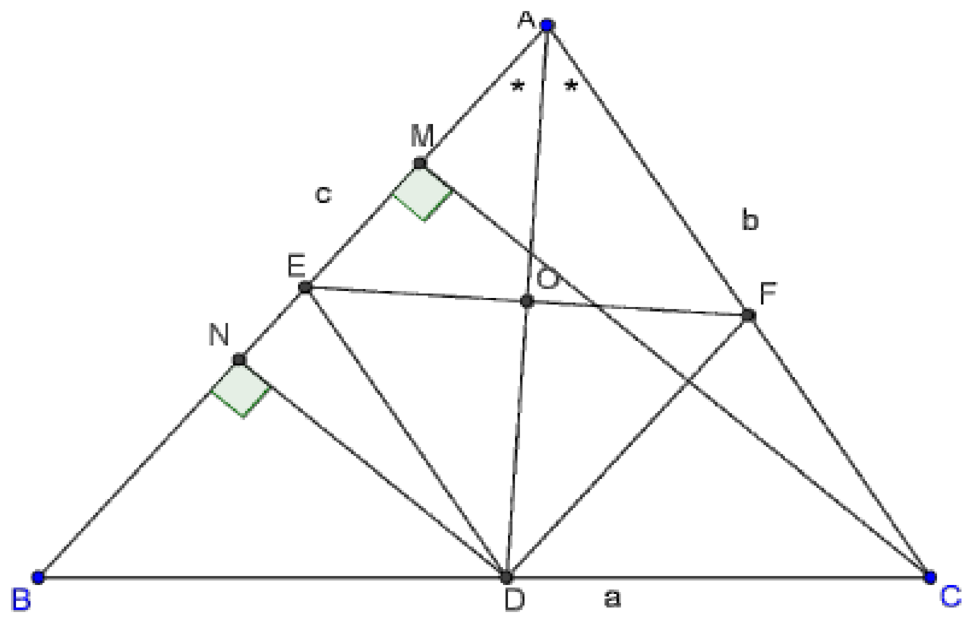
Selanjutnya buat garis DN dan CM yang keduanya tegak lurus ke sisi AB (lihat gambar 1.5.3). Selanjutnya mintalah siswa untuk menunjukkan bahwa

- ∠ ADE = ∠CAD
- ∠ ADF = ∠ BAD
- ∠ BAD = ∠ CAD
- ∠ ADE = ∠ ADF

- Kemudian untuk mempermudah, pembesarlah gambar yang diperoleh seperti gambar 1.5.4.




Gambar 1.5.3




Gambar 1.5.4

Selanjutnya bimbinglah siswa untuk menunjukkan bahwa :

- ∠ BAD = ∠ CAD = ∠ ADE = ∠ ADF
- AO = OD = AD/2
- $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$
- $BD = \frac{ac}{b+c}$

- $\Delta\, BDE \sim \Delta\, ABC$
- $\frac{DE}{b} = \frac{BD}{a}$
- Dari $DE = \frac{bc}{b+c}$, maka

$$DE = DF = AE = AF = \frac{bc}{b+c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.5.4)$$

- Dari kesebangunan Δ AND dengan Δ AOE diperoleh

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AO}{AN} = \frac{AD}{2.AN}$$

Sehingga

$$AD^2 = 2.AN.AE \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.5.5)$$

- Dari kesebangunan Δ DEN dengan Δ AMC diperoleh

$$\frac{EN}{AM} = \frac{DE}{b}$$

- Jika disubsitusikan ke persamaan (1.5.4) akan diperoleh

$$EN = \frac{AM.c}{b+c}$$

- Tunjukkan bahwa pada Δ BMC berlaku

$$a^2 = CM^2 + BM^2$$

$$= b^2 - AM^2 + (c - AM)^2$$

$$= b^2 + c^2 - 2c.AM$$

- Sehingga $AM = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$
- Maka

$$EN = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2(b+c)}$$

- Karena AN = AE + EN dan dari persamaa (1.5.4) diperoleh

$$AN = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2(b+c)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.5.6)$$

- Subsitusikan (7.4) dan (1.5.6) ke persamaan (1.5.5), maka akan diperoleh

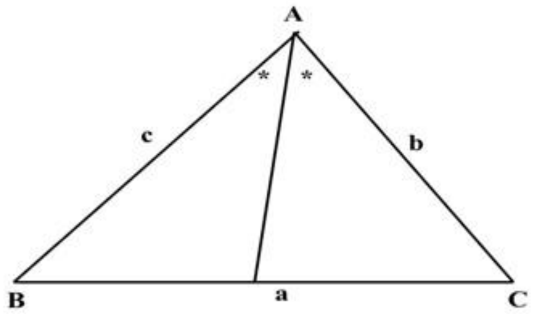
$$AD^2 = \frac{2bc}{b+c}.\left[\frac{(b+c)^2 - a^2}{2(b+c)}\right]$$

$$AD^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)\right)$$

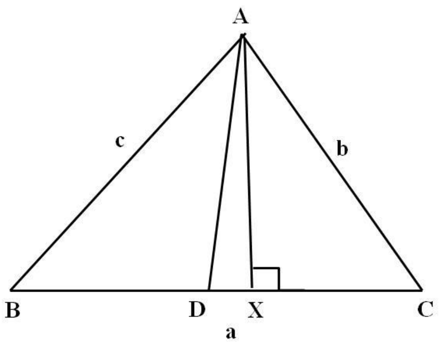
Yang merupakan panjang garis bagi. Pada dasarnya alternatif ke 2 dan ke 3 ini sama dan hasilnya juga sama. Menariknya lagi panjang garis bagi lansung dapat ditentukan dari panjang sisi-sisi segitiga tersebut.

**Alternatif 3.**

Pada alternatif ke 4 ini untuk menentukan panjang sisi dari AD (garis bagi dari sudut A) dilakukan dengan membuat garis AXyang tegak lurus dengan sisi BC. Untuk itu bimbinglah siswa untuk melakukan langkah-langkah berikut ini :




Gambar 1.5.5a




Gambar 1.5.5b

- Minta siswa untuk menentukan mana segitiga yang sebangun sehingga

  $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$,

- Kemudian bimbinglah siswa untuk menemukan

  $$BD = \frac{a.c}{b+c} \text{ dan } DC = \frac{a.b}{b+c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.5.7)$$

- Perhatikan ΔABX dan tunjukkan bahwa

  $$c^2 = AX^2 + BX^2 = AD^2 - DX^2 + (BD + DX)^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DX,$$

- Yang menghasilkan

  $$2BD \cdot DX = c^2 - AD^2 - BD^2$$

- Kemudian dari ΔAXC tunjukkan bahwa

$$b^2 = AX^2 + CX^2 = AD^2 - DX^2 + (DC - DX)^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \cdot DX,$$

- Yang menghasilkan

$$2DC \cdot DX = AD^2 + DC^2 - b^2$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c^2 - AD^2 - BD^2}{AD^2 + DC^2 - b^2}.$$

- Dengan memperhatikan persamaan (1.5.7) akan diperoleh

$$\frac{c}{b} = \frac{c^2 - AD^2 - \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2}{AD^2 + \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 - b^2}.$$

- Sederhanakanlah untuk memperoleh

$$AD^2(b+c) = bc^2 - b \cdot \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 + b^2c - c \cdot \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2$$

$$AD^2(b+c) = bc(b+c) - \frac{a^2bc}{b+c}.$$

$$AD^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

- Yang menghasilkan formula yang sama seperti pada alternative 2 dan 3 yaitu

$$AD^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)\right)$$

**Soal *Latihan* 1**

1. Buktikan bahwa jumlah besar sudut dalam $\Delta ABC$ adalah $180^0$
2. Buktikan secara lansung (tanpa memilah dalam bentuk dua segitiga), bahwa jumlah besar sudut dalam sebarang segiempat adalah $180^0$.

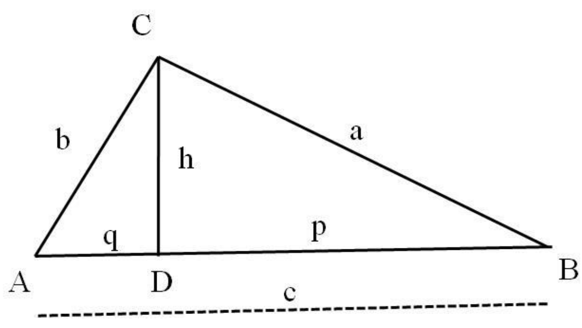
3. Dengan cara yang hampir serupa dengan altenatif menentukan panjang garis bagi, silakan dicoba altenatif untuk menentukan panjang garis tinggi dan panjang garis berat.

4. Perhatikan gambar disebelah dan tunjukkan bahwa berlaku

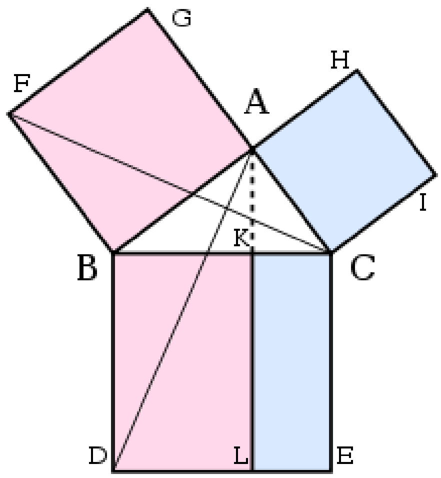
   $h^2 = p.q$

   $a^2 = p.c$

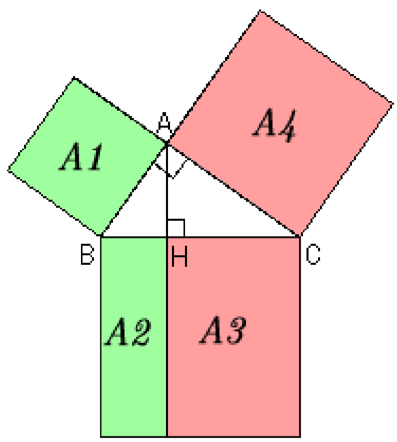
   $b^2 = q.c$




5. Buktikan teorema Pythagoras dengan menggunakan gambar disebelah



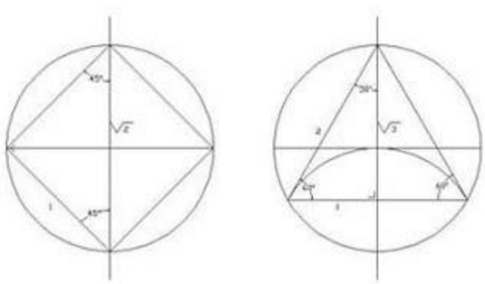

6. Buktikan teorema Pythagoras dengan menggunakan gambar disebelah dengan menunjukkan $LA_1 = LA_2$ dan $LA_3 = LA_4$.



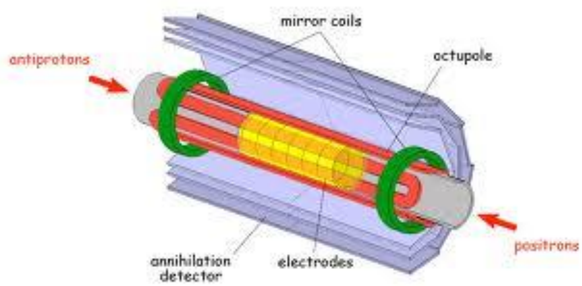
# BAB 2

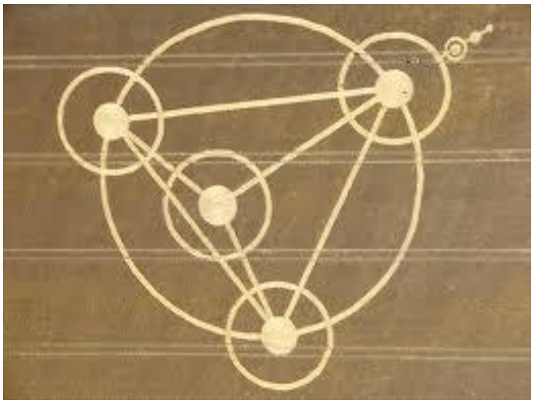
# LINGKARAN I

Dalam kehidupan, kita akan banyak sekali menjumpai ataupun terlibat dengan masalah lingkaran, misalkan dalam suatu pipa besar akan dimuat untuk mengalirkan minyak dari tempat pengeboran ke kilang produksi. Jika di dalam pipa tersebut juga mesti dibuat pipa kecil sedangkan diantara pipa kecil dan pipa bersar tersebut mesti dibuat wadah dalam bentuk segitiga yang digunakan untuk pemanasan agar minyak tadi tidak membeku, persoalannya adalah berapa ukuran pipa besar dan pipa kecil yang mesti kita buat supaya hasilnya maksimal.



Gambar 7. Sistem proporsi $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{3}$






The Jakarta Herald

**BAB 2**

# LINGKARAN I

## 2.1. *Sifat Dasar*

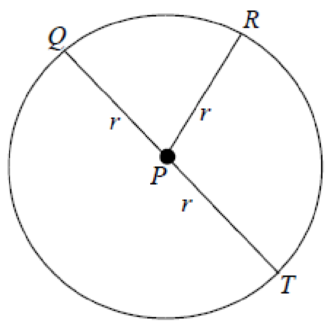
Kita mengetahui sangat banyak sekali konsep geometri yang ada pada lingkaran. Mulai dari lingkaran dalam, lingkaran luar serta berbagai ketaksamaan terdapat pada lingkaran, sehingga banyak sekali teorema yang terdapat pada lingkaran ini. Baik itu yang terkait dengan ukuran jari-jari lingkaran luar dan lingkaran dalam. Berikut ini akan dibahas beberapa sifat dasar dari suatu lingkaran.

***Lingkaran.***

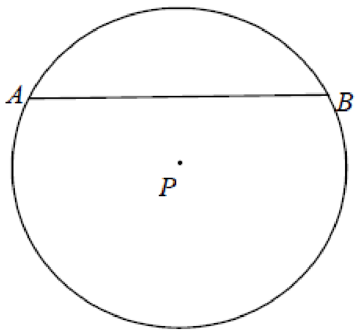
Lingkaran adalah himpunan semua titik-titik yang membentuk lengkungan tertutup, dimana titik-titik pada lengkungan tersebut berjarak sama terhadap suatu titik tertentu, titik tertentu tersebut disebut titik pusat lingkaran.

Untuk lebih jelasnya mengenai pengertian lingkaran, tali busur lingkaran, dan beberapa teorema pada lingkaran maka akan dijelaskan pada definisi dan teorema berikut.

***Definisi 2.1.1.*** Misalkan $P$ adalah sebuah titik yang diberikan pada sebuah bidang, dan misalkan $r$ adalah bilangan positif. Lingkaran dengan *pusat* $P$ *dan jari-jari* $r$ adalah himpunan semua titik di bidang tersebut yang mempunyai jarak terhadap $P$ adalah sama dengan $r$.




Gambar 2.1.1a



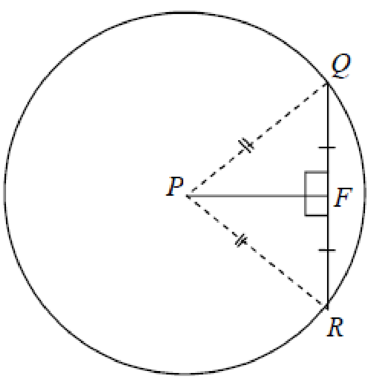

Gambar 2.1.1b

***Definisi 2.1.2.*** Sebuah *tali busur* adalah suatu segmen garis yang mempunyai titik akhir yang berada pada lingkaran.

. Pada lingkaran terdapat beberapa teorema yang sering dijumpai dalam geometri, seperti teorema *sudut pusat*, sudut keliling, dan sebagainya. Berikut diberikan beberapa teorema tersebut.

***Teorema 2.1.1.*** Garis yang tegak lurus dari pusat lingkaran ke suatu tali busur membagi dua sama panjang tali busur tersebut.

***Bukti***: Perhatikan Gambar 2.1.3, misalkan $PF$ adalah garis yang tegak lurus dengan tali busur $QR$ yang ditarik dari pusat lingkaran $P$, maka $FQ = FR$. Akan dibuktikan $FQ = FR$. Dari pusat $P$ ditarik pula garis yang menghubungkan titik-titik $Q$, dan $R$, maka diperoleh $PQ$ dan $PR$ yang panjangnya merupakan jari-jari lingkaran, yang mengakibatkan $\Delta PQR$ yang merupakan segitiga sama kaki, sehingga




Gambar 2.1.3

$$m\angle PQF = m\angle PRF \qquad \ldots(2.1.1)$$

Pada $\Delta PQF$ dan $\Delta PRF$, $PF$ adalah segmen garis yang sama sehingga $PF$ kongruen diri sendiri yaitu

$$PF \cong PF \qquad \text{(S)}$$

Karena $PF \perp QR$ maka $m\angle PFR = m\angle PFQ = 90^0$ sehingga

$$\angle PFR \cong \angle PFQ \qquad \text{(Sd)}$$

Dan dari persamaan (2.1.1) diperoleh

$$\angle PQF \cong \angle PRF \qquad \text{(Sd)}$$

Sehingga dari pustulat Kongruensi S-Sd-Sd diperoleh bahwa

$\Delta PQF \cong \Delta PRF$,

Jadi sisi yang berkorespondensi kongruen, yaitu

$FQ \cong FR$ atau $FQ = FR$ . ▼

Di dalam lingkaran terdapat sudut pusat dan sudut keliling. Sudut pusat lingkaran adalah sudut yang dibentuk oleh dua jari-jari lingkaran, sedangkan sudut keliling lingkaran adalah sudut yang dibentuk dari dua buah tali busur yang bertemu pada keliling lingkaran. Berikut ini akan dijelaskan mengenai Teorema sudut pusat dan Teorema sudut keliling.

**Teorema 2.1.2** Misalkan $AB$ adalah tali busur sebuah lingkaran yang berpusat di $O$ yang mana $AB$ bukan diameternya, dan misalkan $C$ adalah sebarang titik pada lingkaran yang berbeda dari $A$ dan $B$ maka :

a) Jika $C$ dan $O$ berada pada sisi yang sama dari $AB$ maka $\angle AOB = 2\angle ACB$.

b) Jika $C$ dan $O$ berada pada bagian berbeda dari $AB$ maka $\angle AOB = 360^0 - 2\angle ACB$.

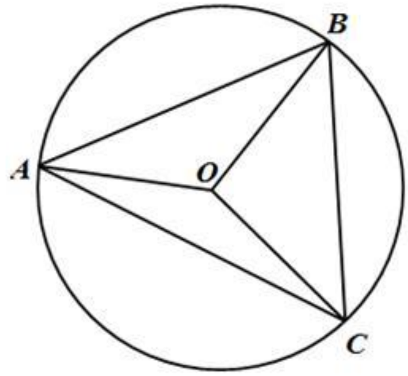
**Bukti.** Misalkan $AB$ adalah sebuah tali busur sebuah lingkaran yang berpusat di $O$ yang mana $AB$ bukan diameternya, dan $C$ adalah sebarang titik pada lingkaran yang berbeda dari $A$ dan $B$.

a) Misalkan $C$ dan $O$ berada pada sisi yang sama dari $AB$. Akan ditunjukkan bahwa $\angle AOB = 2\angle ACB$ dalam tiga kasus.

**Kasus 1.**

Lukis garis *AO*, *OB*, *AC* dan *BC*. Misalkan *AC* dan *BC* berturut-turut tidak memotong jari-jari *OB* dan *OA*. Lihat gambar 5.1.4.

Pada $\Delta AOB, \Delta AOC,$ dan $\Delta BOC$ berturut-turut diperoleh



gambar 2.1.4

$\angle AOB = 180^0 - (\angle OAB + \angle OBA)$,...(2.1.1)

$\angle AOC = 180^0 - (\angle OAC + \angle OCA)$...(2.1.2)

dan

$\angle BOC = 180^0 - (\angle OBC + \angle OCB)$ ...(2.1.3)

Selain itu, juga diperoleh

$$\angle AOB = 360^0 - (\angle AOC + \angle BOC). \quad ...(2.1.4)$$

Jika persamaan (2.1.2) dan (2.1.3) disubtitusikan ke persamaan (2.1.4) maka diperoleh

$$\angle AOB = \angle OAC + \angle OCA + \angle OBC + \angle OCB. \quad ...(2.1.5)$$

Pada gambar 2.1.4, *OA*=*OC* dan *OB*=*OC*. Maka berturut-turut diperoleh

$$\angle OAC = \angle OCA \quad ...(2.1.6)$$

dan

$$\angle OBC = \angle OCB. \quad ...(2.1.7)$$

Dengan mensubtitusi persamaan (2.1.6) dan (2.1.7) ke persamaan (2.1.5) maka diperoleh

$$\angle AOB = 2(\angle OCA + \angle OCB) = 2\angle ACB.$$

**Kasus 2.**

Lukis garis *AO*, *OB*, *AC* dan *BC*. Misalkan *AC* memotong jari-jari *OB*. Lihat gambar 2.1.5. Pada $\Delta AOB$, $\Delta AOC$, dan $\Delta BOC$ diperoleh persamaan (2.1.1), ( 5.1.2) dan (2.1.3). Jika persamaan (2.1.1) dikurangi dengan persamaan (5.1.2 ) maka diperoleh :

$$\angle OAB - \angle OAC = \angle OCA + \angle AOC - \angle OBA - \angle AOB \quad ..........(2.1.8)$$

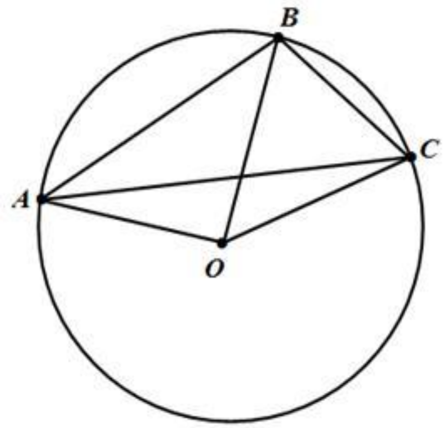
Jika persamaan (2.1.3) juga dikurangi dengan persamaan (2.1.2) maka diperoleh

$$\angle OCB - \angle OCA = \angle OAC + \angle AOC - \angle OBC - \angle BOC. \quad ......... (2.1.9)$$

Namun, jika persamaan (2.1.1) dijumlahkan dengan persamaan (2.1.3) maka diperoleh

$$\angle OBA + \angle OBC = 360^0 - \angle OAB - \angle AOB - \angle OCB - \angle BOC. \quad ...(2.1.10)$$

Dengan menjumlah persamaan (2.1.8), (2.1.9) dan (2.1.10) maka diperoleh




gambar 2.1.5

$$(\angle OAB - \angle OAC) + (\angle OCB - \angle OCA) + (\angle OBA + \angle OBC) = 180^0. \quad ..(2.1.11)$$

Dengan mensubtitusi persamaan (2.1.11) ke persamaan (2.1.1) maka diperoleh

$$\angle AOB = -\angle OAC + \angle OCB - \angle OCA + \angle OBC. \quad ...(2.1.12)$$

Pada gambar 6, *OA*, *OB* dan *OC* adalah jari-jari lingkaran sehingga *OA*=*OC* dan *OB*=*OC*. Maka diperoleh persamaan (5..1.6) dan (2.1.7). Jika persamaan (2.1.6) dan (2.1.7) disubtitusikan ke persamaan (2.1.12) maka diperoleh

$$\begin{aligned} \angle AOB &= 2(\angle OCB - \angle OCA) \\ &= 2\angle ACB. \end{aligned}$$

**Kasus 3**.

Lukis garis *AO*, *OB*, *AC* dan *BC*. Misalkan *BC* memotong *OA*. Dengan cara serupa dengan pembuktian pada kasus 2, maka diperoleh $\angle AOB = 2\angle ACB$.

b) Misalkan $C$ dan $O$ berada pada sisi-sisi berhadapan dari *AB*. Akan ditunjukkan bahwa $\angle AOB = 360^0 - 2\angle ACB$. Pertama, Lukis garis *AO*, *OB*, *AC*, *CB* dan *OC*.

Lihat gambar 2.1.6. Karena *C* dan *O* berada pada sisi-sisi berhadapan dari *AB*, maka diperoleh

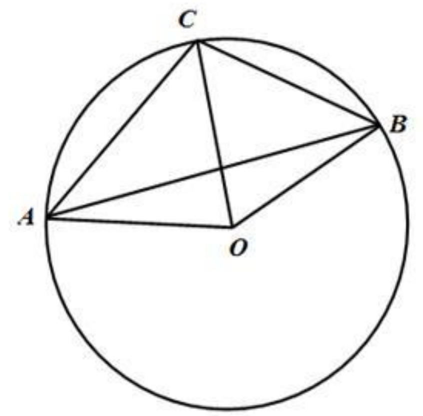
$$\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC \quad ..................(2.1.13)$$

Dengan mensubtitusi persamaan (2.1.2) dan (2.1.3) ke persamaan (2.1.13) maka diperoleh

$\angle AOB = 360^0 - (\angle OAC + \angle OCA + \angle OCB + \angle OBC)$.     . . . . . . . . . . . .(2.1.14)

Terakhir, dengan mensubtitusi persamaan (2.1.6) dan (2.1.7) ke persamaan  (2.14) maka diperoleh

$$\angle AOB = 360^0 - 2(\angle OCA + \angle OCB)$$
$$= 360^0 - 2\angle ACB.$$

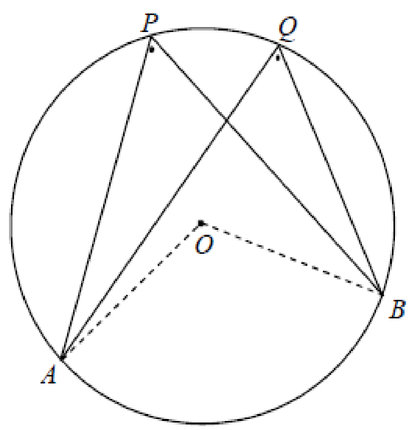



gambar 2.1.6

□

***Teorema 2.1.3.*** Sudut keliling yang menghadap busur yang sama mempunyai besar yang sama.

***Bukti*:** Gambar 2.1.7. Sudut keliling yang menghadap busur yang sama. Perhatikan gambar 2.1.7, $\angle APB$ dan $\angle AQB$ adalah sudut keliling yang menghadap busur yang sama yaitu busur $AB$. Dengan menarik garis $AO$ dan $OB$ sehingga  membentuk $\angle AOB$ yang merupakan sudut pusat lingkaran yang juga menghadap busur $AB$. Akan dibuktikan $m\angle APB = m\angle AQB$ . Dari teorema 2.1.2 diperoleh




Gambar 2.1.7

$m\angle AOB = 2m\angle APB$ …(2.1.15)

$m\angle AOB = 2m\angle AQB$ …(2.1.16)

Dari persamaan (2.1.15) dan (2.1.16) diperoleh

$2m\angle APB = 2m\angle AQB$

$m\angle APB = m\angle AQB$ ♥

Pada tali busur lingkaran, apabila terdapat dua buah tali busur yang berpotongan di satu titik, maka diperoleh perkalian yang senilai, seperti yang dijelaskan pada Teorema perpotongan dua tali busur berikut.

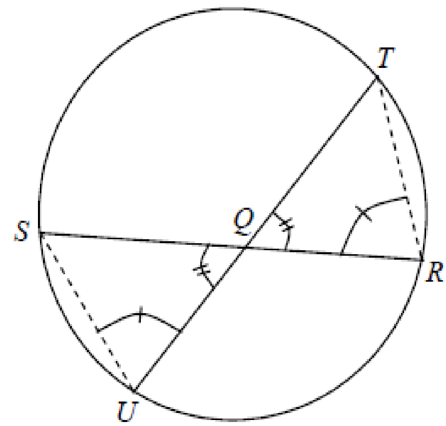
***Teorema 2.1.4.*** Misalkan $RS$ dan $TU$ adalah tali busur dari lingkaran yang sama yang berpotongan di $Q$, maka $QR\,.QS = QU\,.QT$

***Bukti*:** Gambar 2.1.8. Lingkaran dengan $RS$ dan $TU$ yang berpotongan di titik $Q$. Pada $\Delta QSU$ dan $\Delta QTR$. Karena $\angle SUT$ dan $\angle TRS$ sama-sama menghadap busur $ST$, maka menurut Teorema 2.1.3 diperoleh

$\angle QUS = \angle QRT$ (Sd)

Dan juga $\angle SQU$ dan $\angle TQR$ adalah sudut yang bertolak belakang, sehingga diperoleh

$\angle SQU = \angle TQR$ (Sd)




Gambar 2.1.8

Dari Akibat Teoremai 3.1.3 kesebangunan Sd-Sd diperoleh

$\Delta SQU \sim \Delta TQR$

Sehingga terdapat sisi-sisi yang proporsional antara $\Delta SQU$ dan $\Delta TQR$, yaitu

$$\frac{QS}{QT} = \frac{QU}{QR}$$

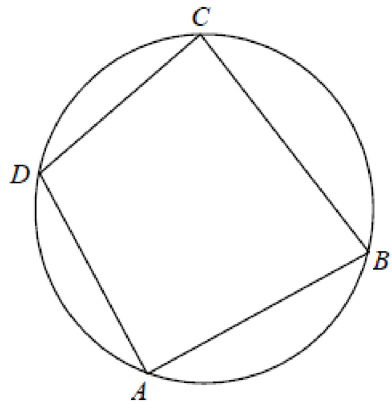
$QR\,.QS = QU\,.QT$ ♦

Pada tali busur lingkaran juga dikenal istilah mengenai segiempat tali busur, yaitu segiempat yang dibentuk oleh perpotongan empat buah tali busur pada keliling lingkaran.

Segiempat talibusur sering juga disebut *segiempat siklik*, yang dijelaskan pada definisi dan teorema berikut.

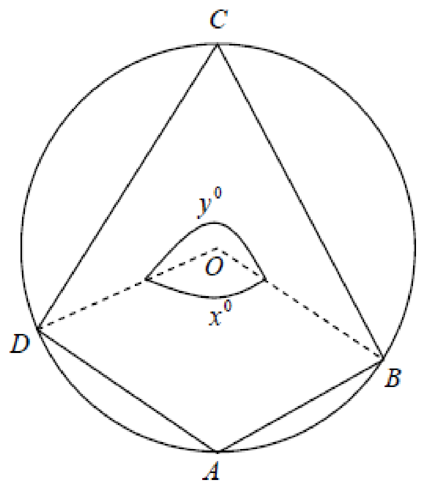
***Definisi 2.1.3.*** *Segiempat tali busur* adalah sebuah segiempat yang keempat titik sudutnya terletak pada keliling lingkaran.

Perhatikan □ *ABCD* pada gambar 2.1.9, *ABCD* disebut segiempat tali busur karena titik *A*, *B*, *C*, dan *D* terletak pada keliling suatu lingkaran.




gambar 2.1.9

***Teorema 2.1.5.*** Dalam segiempat tali busur sudut-sudut yang berhadapan adalah sama dengan sudut pelurus.

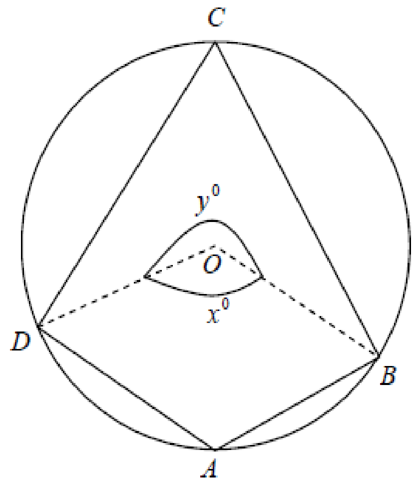



***Bukti*:** Perhatikan □ *ABCD* pada gambar 2.1.10, *ABCD* adalah segiempat tali busur, dimana $\angle A$ berhadapan dengan $\angle C$ dan $\angle B$ berhadapan dengan $\angle D$ maka :

$$m\angle A + m\angle C = 180^0 \text{ dan } m\angle B + m\angle D = 180^0 .$$

Misalkan *O* adalah titik pusat lingkaran, dan dari titik pusat *O* ditarik garis ke titik *D* dan *B* pada *ABCD*

. Sehingga $\angle BCD$ dan $\angle BOD$ sama-sama menghadapbusur *BAD*, dan $\angle BAD$ dan $\angle DOB$ sama-sama menghadap busur *BCD*




gambar 2.1.10

1. Perhatikan $\angle BCD$ dan $\angle BOD$ yang saling menghadap busur *BAD*. Misalkan $m\angle BOD = x^0$ , maka dari Teorema 5.1. 2 diperoleh

   $X^0 = 2m\angle BCD$ …(2.1.17)

2. Perhatikan $\angle BAD$ dan $\angle DOB$ yang saling menghadap busur *BCD*. Misalkan $m\angle DOB = y^0$ , maka diperoleh

   $y0 = 2m\angle BAD$ …(2.1.18)

Jumlah sudut yang terdapat pada pusat lingkaran adalah

$x^0 + y^0 = 360^0$ …(2.1.19)

Dari persamaan (2.1.17), (2.1.18) dan (2.1.19) diperoleh

$x^0 + y^0 = 2m\angle BCD + 2m\angle BAD$

$360^0 = 2(m\angle BCD + m\angle BAD)$

$180^0 = m\angle BCD + m\angle BAD$

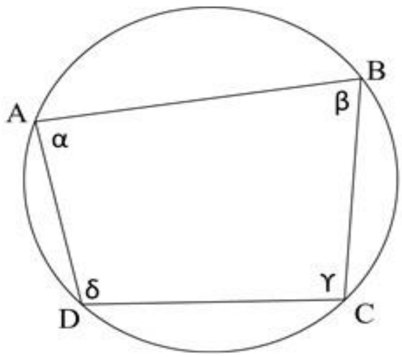
$m\angle A + m\angle C = 180^0$ ♥

Cara lain untuk membuktikan teorema di atas adalah, misalkan titik *D* berada dalam lingkaran, maka akan dapat ditunjukkan $\angle B + \angle C > 180^0$, kemudian kalau dimisalkan titik *D* berada diluar lingkaran maka akan diperoleh $\angle B + \angle C < 180^0$. Maka kalau begitu berlakulah $\angle B + \angle C = 180^0$. Pernyataan tersebut sering ditulis dalam bentuk teorema berikut ini :

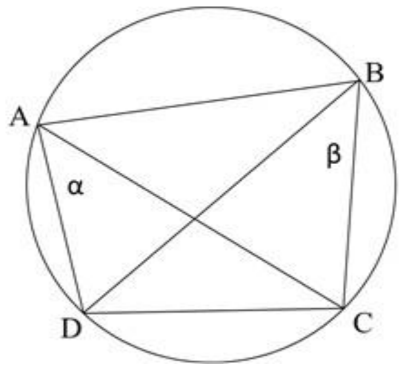
***Teorema 2.1.6*** : Segiempat *ABCD* adalah siklik jika dan hanya jika $\angle DAC = \angle DBC$.

***Bukti*** : Sebagai latihan,

Sebagai bantuan perhatikan gambar 2.1.11a dan gambar 2.1.11b di bawah. Untuk kasus khusus di ambil tali busur yang panjangnya sama (perhatikan gambar 2.1.12), dan memisalkan O titik pusat lingkaran serta  dengan menggunakan konsep kesebangunan akan ditunjukkan bahwa panjang sisi OE = OF. Kemudian pada gambar 2.1.13 kita belakukan untuk panjang talibusur yang berbeda.

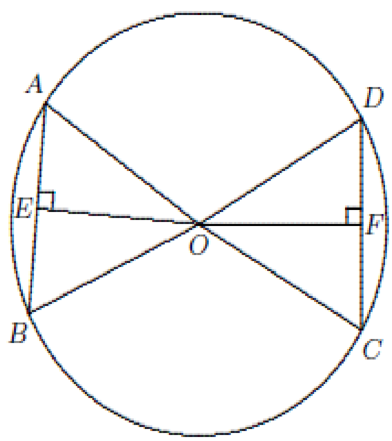



Gambar 2.2.11a



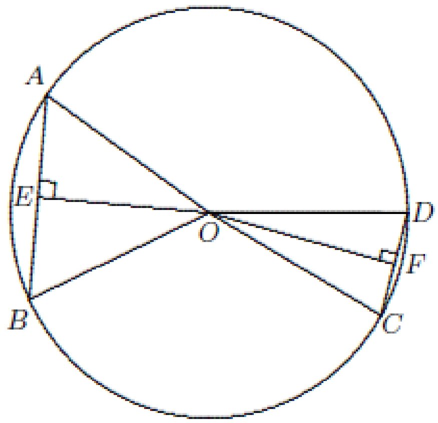

Gambar 2.1.11b

Perhatikan 5.1.12 misalkan AB dan *CD* adalah busur pada lingkaran yang panjang busurnya adalah sama dengan kata lain $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, maka akan berlaku panjang sisi AB sama dengan panjang sisi *CD* (*AB* = *CD*). Sehingga dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\angle AOB = \angle COD$, juga dapat ditunjukkan bahwa $\angle OAE = \angle OCF$ serta $\angle OBE = \angle ODF$. Yang ahirnya juga berlaku *OE* = *OF*.




Gambar 2.1.12

Kalau di atas adalah untuk dua buah busur yang panjangnya sama, berikut ini kita bahas hubungan yang berlaku untuk panjang dua buah busur yang tidak sama. Perhatikan 5.1.13. Misalkan $\widehat{AB} > \widehat{CD}$, maka pastilah akan berlaku $AB > CD$. Serta $\angle AOB > \angle COD$, akan tetapi $OE < OF$ dalam artian $OE$ lebih pendek dari $OF$. Pembaca juga dapat menunjukkan bahwa :




Gambar (2.1.13)

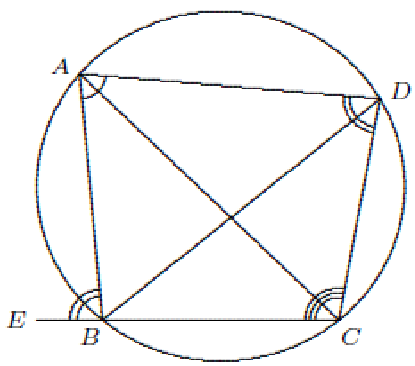
$$\angle AOE = \angle BOE > \angle DOF = \angle COF,$$

yang mengakibatkan bahwa

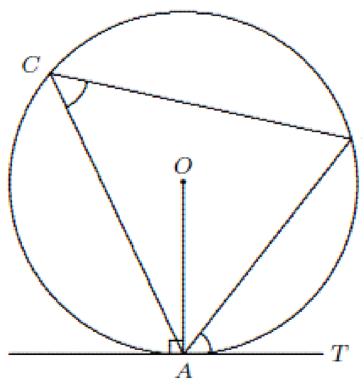
$$\angle FDO = \angle FCO > \angle EAO = \angle EBO.$$

Perhatikan 5.1.14a di bawah. Maka bila *ABCD* adalah segiempat konvek, maka bila *ABCD* juga merupakan segiempat siklik dan $\angle BAC = \angle BDC$ (harap dibuktikan bagi yang belum memahaminya).

$$\angle A + \angle C = 180^0 = \angle B + \angle D.$$




5.1.14a

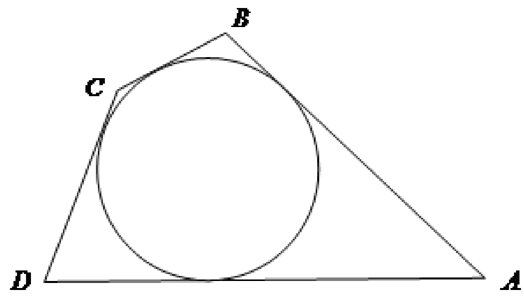



5.1.14b

Hal ini mengakibatkan bahwa $\angle ABE = \angle D$. sedangkan pada 5.1.14b, pandang bahwa *A*, *B* dan *C* berada pada lingkaran atau lingkaran tersebut merupakan lingkaran luar dari segitiga *ABC*. Bila *TA* merupakan garis singgung pada lingkaran di titik *A*, dengan *O* adalah titik pusat lingkaran luar, maka haruslah berlaku $OA \perp AT$ dan di dalam berbagai buku geometri tingkat sekolah menengah sudah ditunjukkan bahwa $\angle BAT = \angle BCA$.

Berikut ini akan dibahas tentang segiempat yang memuat sebuah lingkaran dalam (disebut juga segiempat *Circumscriptible*) dan segiempat yang memuat sebuah lingkaran luar (disebut juga segiempat Siklik). Berikut diberikan definisi segiempat *Circumscriptible*.

**Definisi 2.1.3** Segiempat *Circumscriptible* adalah segiempat yang memuat sebuah lingkaran dalam (*Incircle of the Quadrilateral*) sehingga menyinggung keempat sisi segiempat. Lihat gambar 2.1.15




Gambar 2.1.15.

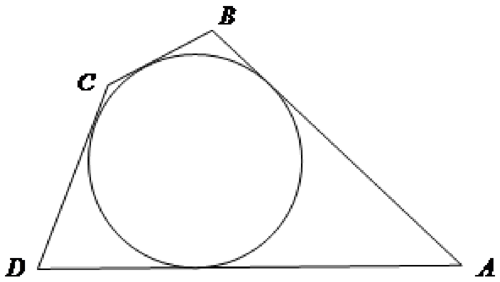
Sebagaimana yang telah disebutkan sebelumnya bahwa tidak semua segiempat adalah *Circumscriptible*. Oleh karena itu, agar suatu segiempat menjadi *Circumscriptible* maka tentulah memerlukan syarat tertentu. Berikut ini diberikan teorema yang menunjukkan syarat untuk suatu segiempat agar menjadi *Circumscriptible*.

**Teorema 2.1.7** Suatu segiempat adalah *Circumscriptible* jika dan hanya jika dua pasang sisi-sisi yang berhadapan mempunyai jumlah panjang yang sama.

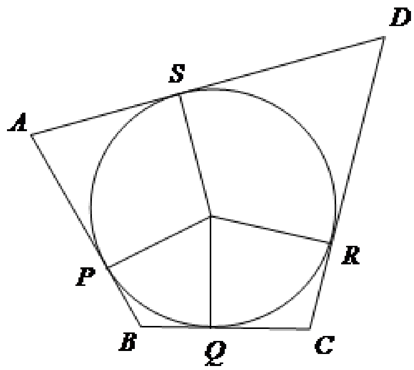
**Bukti.** Misalkan segiempat *ABCD* adalah *Circumscriptible.* Akan ditunjukkan bahwa $AB + CD = BC + DA$. Karena segiempat *ABCD* adalah *Circumscriptible* maka $AB, BC, CD$ dan $AD$ masing-masing menyinggung lingkaran di titik $P, Q, R$ dan $S$. Lihat gambar 2.1.17.

Perhatikan $\Delta APO$ dan $\Delta ASO$. *OP* dan *OS* adalah jari-jari lingkaran sehingga masing-masing tegak lurus ke sisi *AB* dan *AD.* Karena *OP*=*OS* dan *OA*=*OA.*

Menggunakan prinsip Pythagoras, maka diperoleh $AP = AS$. Dengan cara yang sama untuk $\Delta BQO$ dan $\Delta BPO$, $\Delta CRO$ dan $\Delta CQO$, dan $\Delta DSO$ dan $\Delta DRO$, maka diperoleh $BP = BQ, CQ = CR$ dan $DR = DS$. Sehingga (Lihat gambar 2.1.18)




gambar 2.1.16.




Gambar 2.1.17.

$$\begin{aligned} AB + CD &= AP + PB + CR + RD \\ &= AS + BQ + CQ + DS \\ &= BQ + QC + DS + SA \\ &= BC + DA. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$. Sebaliknya, misalkan $AB + CD = BC + DA$. Akan ditunjukkan bahwa segiempat *ABCD* adalah *Circumscriptible*. Misalkan $AB < AD$. Maka

$$AB + CD < AD + CD$$

$$BC + DA < AD + CD$$

$$BC < CD.$$

Karena $AB < AD$ dan $BC < CD$, Maka dapat dipilih titik *X* di *AD* dan *Y* di *CD* sehingga

$AX = AB$ dan $CY = BC$

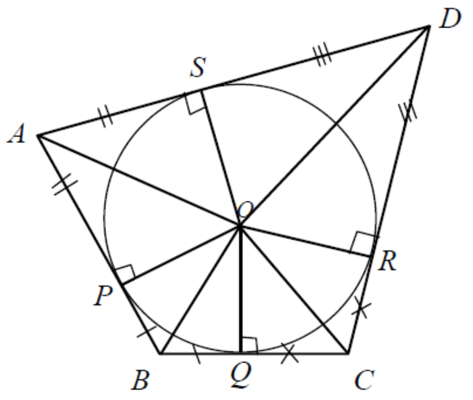
kemudian karena

$$AB + CD = BC + DA$$

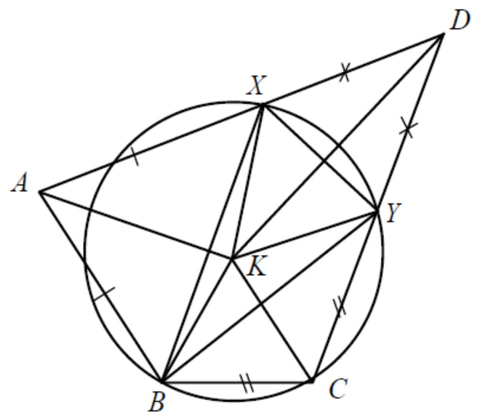
maka

$$AB + CY + YD = BC + AX + XD$$

$$AB + BC + YD = BC + AB + XD$$
$$YD = XD.$$



Gambar 2.1.18.



gambar 2.1.19

Misalkan $K$ adalah titik pusat lingkaran luar $\Delta BXY$. Lihat gambar 2.1.19. Karena $AX = AB$, $KX = KB$ dan $AK = AK$ maka $\Delta AKX$ dan $\Delta AKB$ berkorespondensi *SSS* sehingga $\Delta AKX \cong \Delta AKB$. Dengan cara yang sama diperoleh $\Delta DKX \cong \Delta DKY$ dan $\Delta CKY \cong \Delta CKB$.

Karena $\Delta AKX \cong \Delta AKB, \Delta DKX \cong \Delta DKY$ dan $\Delta CKY \cong \Delta CKB$ maka $AK, DK$ dan $CK$ adalah bisektor sudut $A$, $D$ dan $C$. Sehingga

$$\angle KAX = \angle KAB, \angle KDX = \angle KDY$$

dan

$$\angle KCY = \angle KCB.$$

Apabila ditarik garis tegak lurus dari titik $K$ ke sisi-sisi $AB$, $AD$, $CD$ dan $BC$ sehingga berpotongan di titik $E$, $F$, $G$ dan $H$, maka diperoleh $AE=AF$, $DF=DG$ dan $CG=CH$. Lihat gambar 2.1.20.

Karena $AK, DK$ dan $CK$ masing-masing adalah bisektor sudut $A$, $D$ dan $C$, maka diperoleh

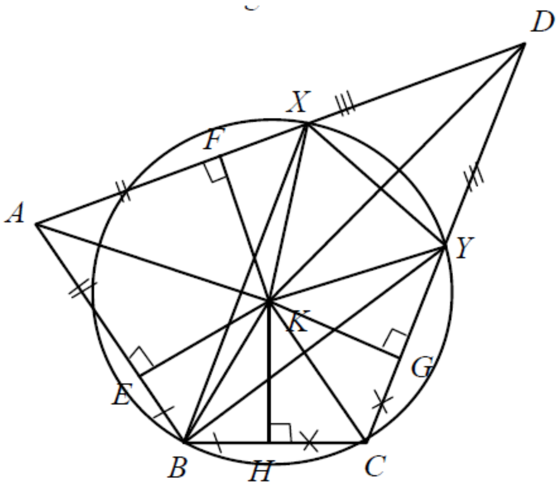
$$\angle KAE = \angle KAF, \ \angle KDF = \angle KDG \text{ dan } \angle KCG = \angle KCH.$$

Selain itu, karena

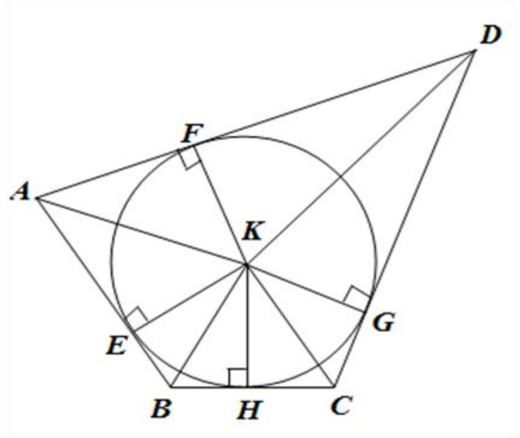
$AE=AF$, $\angle KAE = \angle KAF$ dan $AK = AK$

maka $\Delta KAE$ dan $\Delta AKB$ berkorespondensi *SAS* sehingga

$\Delta KAE \cong \Delta KAF$ . Akibatnya $KE=KF$.




gambar 2.1.20




gambar 2.1.20

Dengan cara serupa, diperoleh $\Delta KDF \cong \Delta KDG$ dan $\Delta KCG \cong \Delta KCH$ sehingga $KF=KG$ dan $KG=KH$. Karena $KE=KF=KG=KH$, Maka $K$ mempunyai jarak yang sama terhadap keempat sisi segiempat sehingga dapat dilukis sebuah lingkaran yang menyinggung sisi *AB*, *AD*, *CD* dan *AB*. Jadi, segiempat *ABCD* memuat sebuah lingkaran dalam dengan pusat $K$.

Kalau pada teoema 2.1.5 sudah dibuktikan bahwa jumlah jumlah sudut yang berhadapat pada segiempat siklik (tali busur) adalah $180^0$, berikut ini diberikan syarat perlu dan cukup untuk segiempat siklik tersebut.

***Teorema 2.1.8*** Segiempat *ABCD* adalah Siklik jika dan hanya jika jumlah sudut yang berhadapan adalah $180^0$ .

**Bukti.** Misalkan segiempat *ABCD* adalah Siklik. Akan ditunjukkan bahwa

$\angle ABC + \angle ADC = 180^0$.

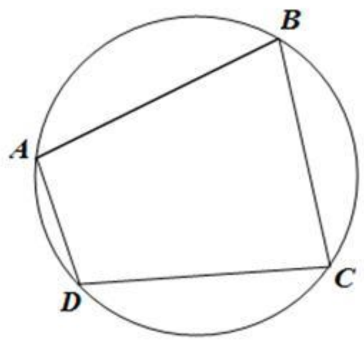
Misalkan *O* titik pusat lingkaran dan misalkan pula *B* dan *O* berada pada sisi yang sama dari *AC*.

maka,

$$\angle AOC = 2\angle ABC \qquad \text{…(2.1.20)}$$

dan

$$\angle AOC = 360^0 - 2\angle ADC. \qquad \text{…( 2.1.21 )}$$




Gambar 2.1.22

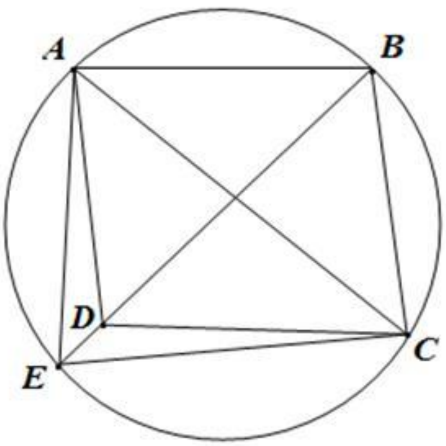
Dari persamaan ( 2.1.20 ) dan ( 2.1.21 ) maka diperoleh

$$2\angle ABC = 360^0 - 2\angle ADC$$

$$\angle ABC = 180^0 - \angle ADC$$

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^0.$$

Sebaliknya, misalkan $\angle ABC + \angle ADC = 180^0$. Akan ditunjukkan bahwa segiempat *ABCD* adalah Siklik dengan menunjukkan kontradiksinya. Misalkan segiempat *ABCD* adalah Konveks . Lukis sebuah lingkaran yang melalui titik *A, B,* dan *C*. dan misalkan *E* adalah titik potong kedua antara lingkaran dengan perpanjangan garis *BD.* Hubungkan garis *AE* dan *CE*. Lihat gambar 2.1.22.




Gambar 2.1.22

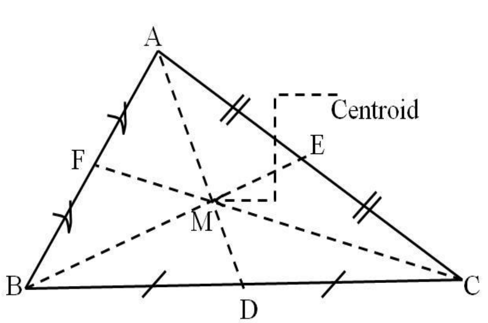
Andaikan $D \neq E$. maka jelas, $\angle ADB > \angle AEB$ dan $\angle CDB > \angle CEB$. Akibatnya $\angle ADC > \angle AEC$. Tetapi, karena titik *A*, *B*, *C* dan *E* berada pada lingkaran maka segiempat *ABCE* adalah Siklik sehingga $\angle ABC + \angle AEC = 180^0$. Karena $\angle ABC + \angle ADC = 180^0$ maka berlaku $\angle ADC = \angle AEC$. Hal ini kontradiksi. Dengan demikian, pangandaian salah. Jadi, haruslah $D = E$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa segiempat *ABCD* adalah Siklik. Dengan cara yang serupa untuk kasus $\angle BAD + \angle BCD = 180^0$, juga diperoleh kesimpulan segiempat *ABCD* adalah Siklik. ♥

## 2.2. *Lingkaran Luar Segi Tiga*

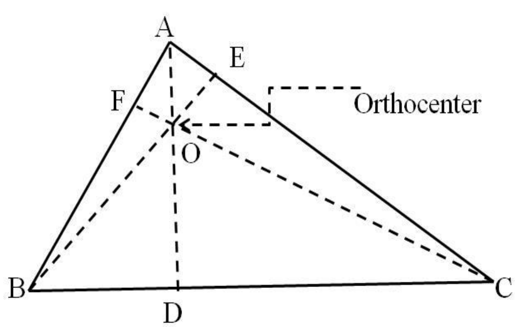
Pada sebarang segitiga *ABC*, banyak kesamaan dan ketaksamaan yang dapat dibentuk, juga dari masing-masing titik sudut segitiga *ABC* dapat dibentuk garis tinggi, garis bagi, dan garis berat. Selain itu dari titik tengah masing-masing sisi juga dapat dibentuk garis yang tegak dengan masing-masing sisi tersebut. Analislah konsep di bawah ini dan perhatikan hubungan antara satu dengan lainnya.

***Definisi 2.2.1.*** Pada sebarang segitiga *ABC* didefinisikan

a. ***Centroid*** adalah titik potong ketiga garis berat yang berpotongan pada suatu titik.
b. ***Orthocenter*** adalah titik potong ketiga garis tinggi yang berpotongan pada satu titik.
c. ***Incenter*** (titik pusat lingkaran dalam) adalah titik potong ketiga garis bagi ketiga sudut yang berpotongan pada satu titik.
d. ***Circumcenter*** (titik pusat lingkaran luar) adalah titik potong ketiga garis yang melalui median dan tegak lurus dengan masing-masing sisi.

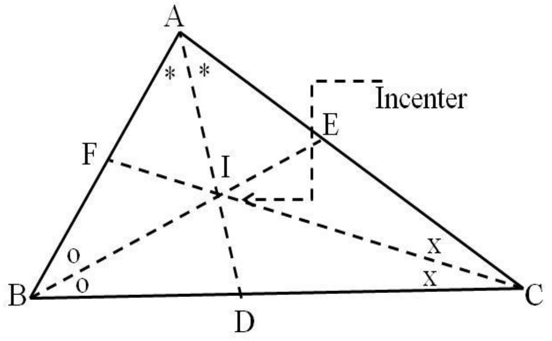



Gambar 2.2.1.a

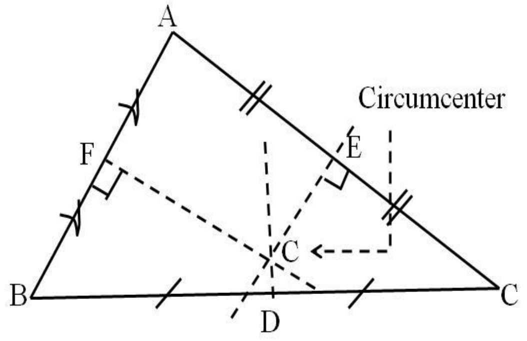



Gambar 2.2.11.b

Segitiga *DEF* disebut dengan segitiga Medial dari segitiga *ABC*.

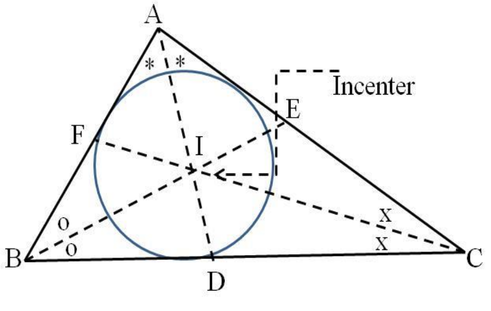



Gambar 2.2.1.c.

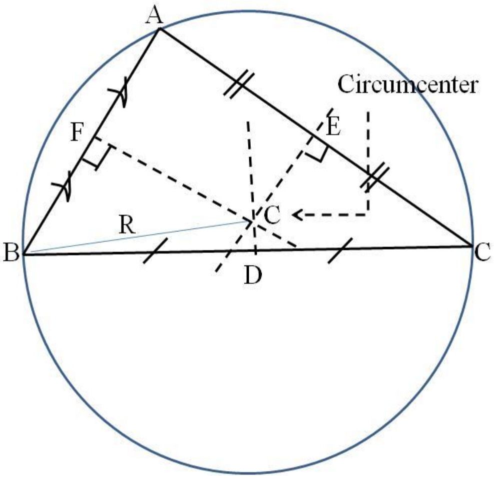



gambar 2.2.1.d.

Dari Incenter dan Circumcenter, dapat dibentuk lingkaran dalam dan lingkaran luar yang mana Incenter merupakan titik pusat lingkaran dalam dan Circumcenter merupakan titik pusat lingkaran luar (perhatikan gambar 2.2.2.a dan 5.2.2.b)




Gambar 2.2.2.a




Gambar 2.2.2b

Misalkan jari-jari lingkaran dalam adalah $r$ dan jari-jari lingkaran luar adalah $R$. Selanjutnya misalkan panjang sisi di depan sudut $A$, $B$ dan $C$ masing-masing adalah $a$, $b$ dan $c$. Selanjutnya akan ditentukan hubungan antara $r$ dengan panjang sisi tersebut dan juga dengan luar daerah yang dibentuknya. Begitu juga dengan $R$.

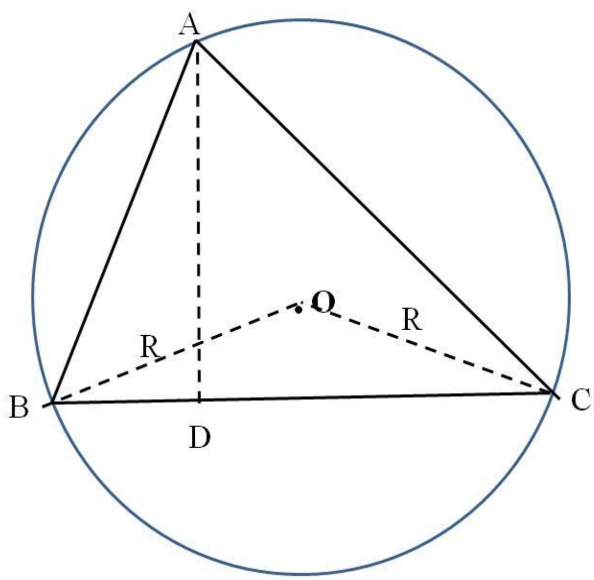
Perlu diperhatikan bentuk kesamaan dan ketaksamaan lain yang berlaku terhadap segitita tersebut.

***Definisi 2.2.2***. *Lingkaran luar* suatu segitiga *ABC* adalah lingkaran yang melalui ketiga titik sudut segitiga tersebut dan titik pusat dari lingkaran luar tersebut adalah circumcenter.

Pada lingkaran luar tersebut berlaku beberapa bentuk kesamaan, misalnya hubungan Jari-jari lingkaran luar dengan aturan sinus, Hubungan antara jari-jari lingkaran luar dengan perbadingan perkalian panjang sisi-sisi dengan Keliling Segitiga. Bentuk hubungan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk teorema-teorema berikut :

***Teorema 2.2.1***. Misalkan *a*, *b* dan *c* adalah panjang sisi pada Segitiga *ABC*, maka berlaku

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R \qquad (2.2.1)$$



Gambar 2.2.3

***Bukti*** : Perhatikan gambar 2.2.3. Dari titik *A*, buat garis tinggi, yaitu garis dari *A* yang tegak lurus dengan *BC*, maka diperoleh

$AD = AB \sin B = c \sin B$,

sehingga diperoleh

Luas $\Delta ABC = ½\, ac \sin B$.

Dengan cara yang sama akan diperoleh

Luas $\Delta\, ABC = ½\, ab \sin C$

Luas $\Delta\, ABC = ½\, bc \sin A$

Pada tingkat Sekolah Menengah Pertama sudah ditentukan bahwa besar $\angle A = \angle BAC = ½ \angle BOC$. Selanjutnya jika dibuat garis yang tegak lurus dari titik pusat ke *BC* (lihat gambar 2.2.4), maka akan diperoleh.

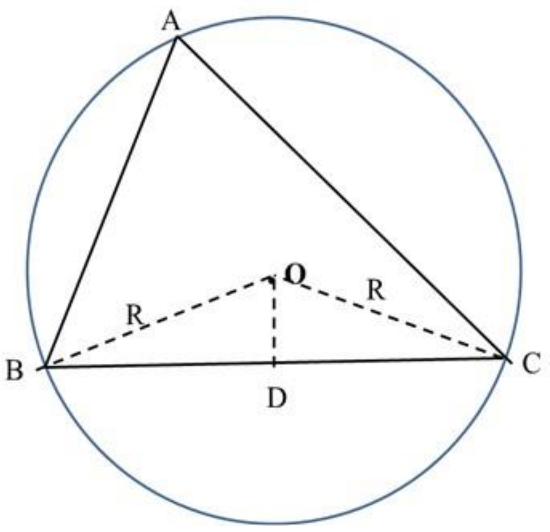
Besar $\angle BOD = ½ \angle BOC = \angle A$ dan panjang *BD* = ½ *BC*.

Jadi $\sin \angle BOD = \dfrac{BD}{R}$ atau

*BD* = *R*× sin ∠ *BOD*. Karena ∠*BOD* = ∠ *A*,

maka *BD* = *R*× sin ∠ *A* . Karena *BC* = 2 *BD*,

sehingga *BC* = *R*× sin ∠ *A* . Sebut *BC* = *a*,




Gambar 2.2.4

maka

$$\frac{a}{\sin \angle A} = 2R$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\frac{b}{\sin \angle B} = 2R \quad \text{dan} \quad \frac{c}{\sin \angle C} = 2R,$$

dengan aturan sinus diperolehlah

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R \qquad ▼$$

Berikut ini dijelaskan hubungan antara jari-jari lingkaran luar dengan perkalian panjang ketiga sisi-sisinya dibagi dengan kelipatan dari keliling lingkaran tersebut.

***Teorema 2.2.2***. Misalkan a, b dan c adalah panjang sisi pada Segitiga ABC, maka berlaku

$$R = \frac{abc}{4L} \qquad (2.2.2)$$

**Bukti :** Tulis rumus luas Δ*ABC* = ½ *bc sin*∠*A* atau dapat ditulis dalam bentuk $sin\angle A = \dfrac{2L}{bc}$ dengan *L* menyatakan luas Δ*ABC*. Jika nilai sin ∠A disubsitusikan pada persamaan $\dfrac{a}{\sin \angle A} = 2R$, maka akan diperoleh

$$R = \frac{abc}{4L}$$ ▼

***Teorema 2.2.3***. Misalkan *a*, *b* dan *c* adalah panjang sisi pada Segitiga *ABC*, maka berlaku $$L = \sqrt{s\,(s - a)(s-b)(s-c)}$$

***Bukti* :** Misalkan panjang sisi pada suatu Δ *ABC* masing-masing dinamakan *a*, *b* dan *c* dan luasnya dilambangkan dengan *L* serta *s* menyatakan setengah dari keliling segitiga yaitu atau *s* = ½(*a*+*b*+*c*). Dengan menggunakan aturan cosinus dalam bentuk

$$\cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

dan dengan menggunakan

$$\sin^2 \angle A = 1 - \cos^2 \angle A,$$

maka diperoleh

$$sin^2 \angle A = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2$$

$$= \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)\left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

$$= \left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)\left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}\right)$$

$$= \left(\frac{(b+c) \;\; - a^2}{2bc}\right)\left(\frac{a^2 - (b+c)^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{(2bc)^2}$$

Perhatikan bahwa *s*= ½ (*a*+*b*+*c*), maka

- *a* + *b* + *c* = 2*s*
- *b* + *c* – *a* = (*a* + *b* + *c*) -2*a* = 2*s* – 2*a* = 2(*s* – *a*)

- $a + b - c = 2(s - c)$
- $a - b + c = 2(s - b)$

sehingga diperoleh

$$sin^2 \angle A = \frac{2s \times 2(s - a) \times 2(s - c) \times 2(s - b)}{(2bc)^2}$$

$$= \frac{4s\,(s - a)(s - c)(s - b)}{(bc)^2}$$

atau

$$sin \angle A = \sqrt{\frac{4s\,(s - a)(s - c)(s - b)}{(bc)^2}} = \frac{2}{bc}\sqrt{s\,(s - a)(s - b)(s - c)} \qquad (2.2.3)$$

Sehingga sekali lagi dengan menggunakan rumus luas segitiga

$$L = ½\, bc\, sin \angle A$$

$$= \frac{1}{2} bc \frac{2}{bc}\sqrt{\mathrm{s}\,(\mathrm{s} - \mathrm{a})(s - b)(s - c)}$$

$$= \sqrt{s\,(s - a)(s - b)(s - c)} \qquad (2.2.4)$$

Yang merupakan rumus menghitung luas segitiga jika ketiga panjang sisinya diketahui. Dengan menggunakan persamaan (2.2.4), maka jari-jari lingkaran luar segitiga *ABC* juga dapat dinyatakan dalam bentuk

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s\,(s - a)(s - b)(s - c)}} \qquad \blacktriangledown$$

Sebenarnya pola menentukan luas segitiga dengan menggunakan rumus L = ½ *bc* *sin∠A* = ½ ac *sin∠B* = ½ ab *sin∠C* memaksa pembaca untuk menyelesaikan persoalan dengan mengingat rumus dan begitu juga dengan rumus-rumus lainnya seperti yang di uraikan di atas. Justru yang lebih menarik adalah apakah memungkinkan menyelesaikan persoalan tersebut tanpa harus menghapal rumus-rumus tapi hanya menggunakan aturan atau rumusan yang sangat sederhana yang sudah begitu bersebati dengan para mahasiswa. Misalnya bagaimana menentukan luas segitiga tanpa menggunakan rumusan di atas jika panjang ketiga sisinya diketahui. Untuk menyelesaikan persoalan tersebut pembaca dapat hanya dengan menggunakan aturan Pythagoras saja (aturan Pythagoras sudah bersebati dengan semua pembaca yang sudah tamat SMP).

***Teladan* 2.2.1.** Suatu segitiga dengan panjang sisi $AB$ = 14 cm, $BC$ = 15 cm dan $AC$ = 13 cm. Hitunglah luas segitiga tersebut

***Penyelesaian*** :

***Cara* I**. Dengan menggunakan $s = ½ (a+b+c)$ diperoleh $s = 21$. Kemudian dengan menggunakan rumus (2.4.1) diperoleh

$$L = \sqrt{\mathrm{s}\left(\mathrm{s-a}\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}$$

$$= \sqrt{21\left(21\text{-}15\right)\left(21-14\right)\left(21-13\right)}$$

$$= \sqrt{7056} \quad = 84 \text{ cm}^2$$

***Catatan*** : sekali lagi cara I ini memaksa pembaca mengingat rumus, justru persoalan utamanya adalah bagaimana menyelesaikannya jika rumusnya lupa atau tidak mau menggunakan rumus. Untuk itu perhatikan penyelesaian cara II berikut.

**Cara II.**

Perhatikan gambar 2.2.5 di atas dan tarik garis tinggi dari titik $C$ ke sisi $A$B. Sebut panjang sisi $AD = x$ yang mana segitia $ADC$ dan segitiga $BDC$ siku-siku di $D$ dan masing-masing berlaku :

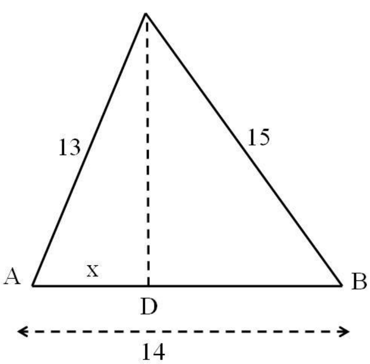
$$\mathrm{CD}^2 = AC^2 - AD^2$$

$$= 13^3 - x^2$$

dan

$$CD^2 = BC^2 - BD^2$$

$$= 15^2 - (14\ x)^2$$




Gambar 2.2.5.

Dari kedua persamaan di atas diperoleh :

$13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$

$13^2 - x^2 = 15^2 - 14^2 + 28x - x^2$

$28x = 13^2 - 15^2 + 14^2$

$= (13 - 15)(13 + 15) + 14^2$

$= -2.\ 28 + (7\ .\ 2)^2$

$28\ x = -2.\ 28 + 7^2\ .\ 2^2$

Dengan membagi kedua ruas dengan 28 diperoleh

$x = -2 + 7 = 5$

Sehingga panjang *CD* dapat ditentukan yaitu

$$CD = \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$= \sqrt{(13-5)(13+8)}$$

$$= \sqrt{8.18} = \sqrt{2^3.2.3^2} = 12$$

Sehingga luas segitiga *ABC* adalah

L = ½ *AB.CD*

= ½. 14. 12 = 84 $\text{cm}^2$

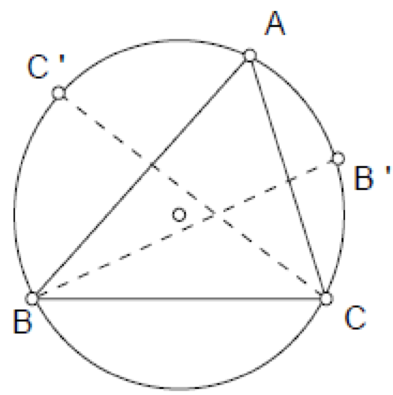
***Catatan*** : Proses perhitungan seperti di atas, sengaja dilakukan, karena itu juga suatu proses pembelajaran melakukan operasi perhitungan tanpa menggunakan alat hitung, tapi cukup dengan menyederhanakan bentuknya.

***Soal Latihan* 2.**

1. Sebuah segitiga panjang sisi-sisinya 40 cm, 45 cm dan 67 cm. Tentukanlah Centroit, Orthocenter, Incenter, dan circum centernya.
2. Seperti penyelesaian teladan I cara II, hitunglah luas segitiga *ABC* yang panjang sisinya *AB* = cm, *BC* = 14 cm dan *AC* = 20 cm.
3. Diketahui $\Delta ABC$ dengan $AB$ = 21 cm, $BC$ = 20 cm dan $CA$ = 13 cm. Dari titik *C* ditarik garis *CD* sehingga *AD* = 14 cm. Hitunglah panjang *CD*
4. Tunjukkan untuk sebarang $\Delta ABC$ yang panjang sisi-sisinya dinyatakan *a*, *b* dan *c*,. dan bila *r* menyatakan panjang jari-jari lingkaran dalam,. Maka luasnya juga dapat dinyatakan dalam bentuk

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = sr$$

5. Lihat gambar 2.2.10 dan tunjukkan bahwa $K\Delta PQR = PA + PB + 2QR$
6. Perhatikan gambar disebelah, $BB'$ dan $CC'$ adalah garis bagi $\angle B$ dan $\angle C$, Tunjukka




   i. jika $\angle B = \angle C$, maka $BB' = CC'$
   ii. Jika $BB' = CC'$ apakah $\angle B = \angle C$. kalau benar buktikan dan kalau tidak benar berikan contoh penyangkal.
7. Misalkan $m_b$ dan $m_c$ masing-masing menyatakan panjang garis berat dari titik *B* dan *C* ke sisi *AC* dan *AB* pada $\Delta ABC$. Jika panjang sisi $AC = b$ dan sisi $AB = c$. Tunjukkan bahwa jika $m_b = m_c$ jika dan hanya jika $b = c$.
8. Tunjukkan bahwa segiempat *Circumscriptible* adalah konveks.
9. Dengan penjelasan yang sama dengan soal no 5 di atas, tunjukkan bahwa $\Delta ABC$ adalah sama sisi jika dan hanya jika $m_b \vdots m_b \vdots m_b = a : b : c$
10. *). Dengan penjelasan yang sama dengan soal no 5 di atas, tunjukkan bahwa

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

11. Jika panjang sisi-sisi suatu segitiga adalah 136, 170 dan 174, hitunglah panjang garis beratnya.
12. Jika panjang sisi-sisi suatu segitiga adalah 136, 170 dan 174, hitunglah panjang garis bagi dan garis tingginya
13. Bentuklah sebuah segitiga yang unik, yang mana panjang sisi-sisinya adalah $b$ -1, $b$ dan $b$ + 1, kemudian hitunglah luasnya
14. *) Jika garis $AC$ merupakan diameter lingkaran dan melalui titik $B$ pada lingkaran ditarik garis yang memotong lingkaran untuk kedua kalinya di $D$ dan perpanjangan diameter $AC$ di $P$. melalui $A$ dan $C$ masing-masing ditarik garis $AE$ dan $CF$ yang tegak lurus $PD$.
    a. Jika $EB$ = 2 cm dan $BD$ = 6 cm, carilah panjang $DF$
    b. Apakah $DF$ = $EF$ (jika benar buktikan).
15. *). Titik $A$ berada di luar lingkaran dan dari titik $A$ dibuat garis singgung ke lingkaran dengan pusat $O$ masing-masing menyinggung lingkaran dititik $B$ dan $C$. jika $BD$ merupakan diameter lingkaran dan dibuat garis $CE \perp BD$,
    a. Hitunglah panjang sisi $AB$
    b. Buktikan bahwa

$$\frac{AB}{\sqrt{BE}} = ED$$

16. Tunjukkan bahwa dalam suatu $\Delta\, ABC$ berlaku
    a. $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$
    b. $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$
17. *) Diketahui $\Delta ABC$ dengan $AB$ = 96 cm, $BC$ = 91 cm dan $AC$ = 37 cm. Hitunglah panjang garis berat dari titik $C$ dan titik $B$.
18. *). Diberikan suatu ΔABC, Kontruksilah sebuah segitiga yang panjang sisinya sama dengan panjang garis berat ΔABC.

19. Diberikan segiempat ABCD, bentuklah $\Delta$APQ dengan titik P pada sisi BC, Q pada sisi CD sehingga $\Delta$APQ samasisi
20. *)Diketahui $\Delta ABC$ dengan $\angle A = 45^0$ dan $\angle B = 30^0$, jika $AC = 5$ cm, hitunglah luas segitiga tersebut, dengan catatan menghitung panjang sisinyanya tidak boleh menggunakan aturan cosinus dan menghitung luasnya juga tidak boleh lansung dengan menggunakan rumus.
21. Misalkan $\Delta\ ABC$ dengan jari-jari lingkaran luar adalah R. jika panjang sisinya masing-masing adalah a, b dan c. tunjukkan bahwa berlaku :

$$L\Delta ABC = \frac{R(a\cos A + b\cos B + c\cos B)}{2}$$

22. *). Bisakah anda bentuk segitiga yang panjang sisinya $1 - x$, $1 + x$ dan $1 + 2x$, berapakah panjang x sehingga panjang garis tingginya adalah 1 satuan. Kemudian tunjukkan bahwa :

$$L\Delta ABC = \sqrt{\frac{3}{16}(1+2x)^2(1+4x)}$$

23. **) Diketahui $\Delta$ABC dengan panjang sisi $AB = c$ cm, $AC = b$ cm dan $\angle A = \alpha$.
    a. Hitunglah panjang garis tinggi dari titik $C$
    b. Hitunglah Luas Segitiga ( $L\Delta ABC = \frac{1}{2}\, bc \sin \alpha$)
    c. Hitunglah panjang garis berat dari titik $C$
    d. Tuliskanlah panjang sisi $BC$ dinyatakan dalam $b$, $c$ dan $\alpha$ ( rumus kosinus).
24. **). Pada $\Delta ABC$, misalkan $m_a$ adalah panjang median (garis berat) dari titik titik $A$ ke garis $BC$, tunjukkan bahwa :
    a. $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$
    b. $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$
    c. $m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

***Catatan*** : soal di atas dikenal dengan nama ***Teorema Appollonius.***

21. **)Diketahui $\Delta ABC$ dengan panjang dua buah sisinya adalah 20 cm dan 30 cm, Jika sudut yang diapitnya $120^0$. Hitunglah panjang sisi ke 3 dan luas segitiga tersebut.

## 2.3. *Lingkaran Dalam Suatu Segitiga*

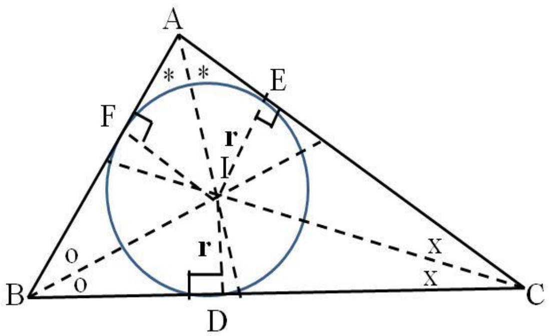
Pada dasarnya konsep lingkaran dalam dan lingkaran luar serta lingkaran singgung luar sudah di bahas ti tingkat sekolah menengah. Akan tetapi di sini diberikan pengulangan konsep lingkaran dalam dan lingkaran luar tersebut, dengan sedikit pendalaman, akan tetapi nanti pendalamannya untuk tingkat yang lebih tinggi dapat penulis ikuti dengan menyelesaikan soal-soal latihan yang diberikan.

***Definisi 2.3.1***. *Lingkaran dalam* suatu segitiga adalah lingkaran yang menyinggung ketiga sisi lingkaran tersebut dan titik pusat dari lingkaran dalam tersebut adalah incenter.

Sama seperti pada lingkaran luar, jika diberikan sebarang segitiga *ABC*, maka rumus untuk menentukan luas segitiga *ABC* tetap berlaku aturan Luas $\Delta$ *AB*C = ½ *bc sin A*= ½ *ac sin B* = ½ *ab sin C*, sedangkan persoalan yang menarik adalah bagaimana menentukan jari-jari dari lingkaran dalamnya. Untuk itu perhatikan teorema berikut ini

***Teorema 2.3.1***. Pada suatu segitiga *ABC* berlaku

$$r = (s - a) \tan \frac{1}{2} A$$




Gambar 2.3.1

***Bukti*** : Misalkan Jari-jari lingkaran dalam pada segitiga *ABC* adalah *r*, dan panjang *BC*, *AC* dan *AB* berturut-turut adalah *a*, *b* dan *c*. *ID* tegak lurus dengan *BC* dan *ID* = *r* merupakan jari-jari lingkaran dalam. Misalkan panjang *AF* = *k*, maka panjang *BF* = *c* – *k*. Kemudian panjang $BD$ = Panjang $BF = c- k$.

Karena panjang $AF$ = panjang $AE = k$,

maka

panjang $CE = b – k$.

Selanjutnya panjang $CD$ = Panjang $CE = b – k$. Dari itu dapat ditentukan bahwa

panjang $AF$ + panjang $FB$ + panjang BD + panjang DC + panjang CE + panjang EA =

panjang AB + panjang BC + panjang CA,

yang menghasilkan

$$k + (c – k) + (c – k) + (b – k) + (b – k) + k = c + a + b.$$

$$2b + 2c – 2k = a + b + c$$

$$2b + 2c – a – b – c = 2k$$

$$b + c – a = 2k \text{ atau } 2k = b + c – a.$$

$$k = \frac{1}{2}(b + c - a)$$

$$k = \frac{1}{2}(a + b + c) - a$$

$$k = s - a \qquad (2.3.1)$$

Jadi

Panjang $AF$ = panjang $AE = s – a$, (2.3.2)

dengan $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

Dengan cara yang sama dengan penurunan di atas diperoleh :

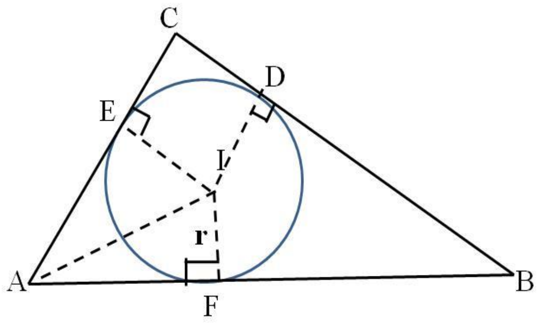
Panjang $BF$ = panjang $BD = s – b$

Panjang $CD$ = panjang $CE = s – c$

Untuk memudahkan penglihatan gambar pada penurunan rumus berikutnya, gambar 2.3.1 akan buat sisi $A$ terletak pada sisi bagian bawah untuk itu perhatikan gambar 2.3.2.

pada segitiga $AIF$,

panjang $AF = s – a$ dan $\angle AFI = 90^0$, panjang $IF = r$,




Gambar 2.3.2

tinjaulah bahwa

$$\angle IAF = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle A$$

dan,

$$tan\angle IAF = \frac{Panjang\ \ IF}{Panjang\ \ AF}$$

maka

$$tan\frac{1}{2}A = \frac{r}{s-a}$$

atau

$$r = (s-a)tan\frac{1}{2}A \qquad (2.3.3)$$

***Remaks* 2.3.1**. Dengan cara yang sama dengan teorema 2.4.1 diperoleh

$$r = (s-b)tan\frac{1}{2}B \qquad (2.3.4)$$

$$r = (s-c)tan\frac{1}{2}C \qquad (2.3.5)$$

Selain menggunakan kesamaan di atas, rumusan untuk mencari panjang jari-jari lingkaran dalam juga dapat diungkapkan dalam bentuk konklusi berikut ini

***Remaks* 2.3.2**. Jari-jari lingkaran dalam pada segitiga ABC dapat ditentukan dengan rumus berikut

$$r = \frac{L}{s} = \frac{1}{s}\sqrt{s\,(s-a)(s-b)s-c} \qquad (2.3.6)$$

***Bukti*** : Pandang

Luas $\Delta ABC$ = Luas $\Delta AIB$ + Luas $\Delta BIC$ + Luas $\Delta CIA$

$$L = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br$$

$$= \frac{1}{2} r \left(a+b+c\right)$$

$$= rs$$

atau

$$r = \frac{L}{s} = \frac{1}{s}\sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)s-c}$$

***Teladan* 2.3.1** . Suatu segitiga dengan panjang sisi *AB* = *c* = 14 cm, *BC* = *a* = 15 cm dan *AC* = *b* = 13 cm. Berapakah panjang jari-jari lingkaran dalamnya

***Penyelesaian* :** Penyelesaiannya akan ditentukan dengan menggunakan rumus yaitu sebagai berikut :

$$s = \frac{1}{2}\ \left(a+b+c\right) = \frac{1}{2}\left(15+13+14\right) = 21$$

Berdasarkan rumus luas maka diperoleh *L* = 84.

Jadi

$$r = \frac{L}{s} = \frac{84}{21} = 4\,cm$$

Ingat bahwa jika nilai *L* belum diketahui (pada contoh di atas karena sudah dihitung pada teladan 5.1..1) maka perlu terlebih dahulu ditentukan nilai L, yang dapat ditentukan dengan L = ½ *bc sin∠A* atau rumus lain yang serupa. Jika ingin menggunakan rumus (2.3.6) tapi tidak ingin menghitung nilai *L*, juga dapat dilakukan dengan terlebih dahulu menghitung nilai *s*. Cara lain yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan rumus (2.3.3), (2.3.4) atau (2.3.5), akan tetapi cara ini kurang efisien karena kita terlebih dahulu mesti menentukan nilai $tan\frac{1}{2}A$ atau $tan\frac{1}{2}B$ atau $tan\frac{1}{2}C$ yang nilai sudut *A* atau sudut *B* atau sudut *C* dapat ditentukan dengan menggunakan aturan cosinus, (untuk itu silakan coba cara ini sebagai latihan).

## 2.4. *Lingkaran Singgung Suatu Segitiga*

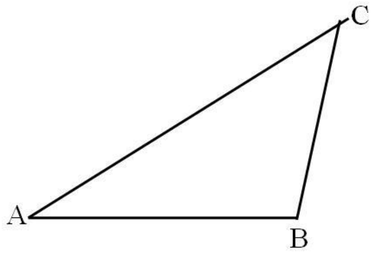
Dalam berbagai buku teks, lingkaran singgung luar disebut dengan istilah lingkaran luar (excircles), karena kita sudah menggunakan istilah lingkaran luar untuk lingkaran yang titik pusatnya di circumcirle. Maka dalam buku ini akan digunakan istilah lingkaran singgung luar dari suatu segitiga *ABC*. Adapun yang dimaksud dengan lingkaran singgung luar tersebut adalah seperti Definisi 2.4.1.

Sangat perlu untuk pembaca cermati adalah konsep penentuan jari-jari luas dari lingkaran singgung luar. Juga perlu di analisa hubungan antara jari-jari lingkaran singgung luar dengan jari-jari lingkaran dalam dan lingkaran luar serta keterkaitannya dengan panjang dari sisi-sisi segitiga tersebut. Kalau jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luar hanya terkait dengan panjang sisi, sedangkan jari-jari lingkaran singgung luar sekaligus dengan panjang sisi dan besar sudut. Perhatikan gambar 2.4.1b, disitu $R_a$ menyatakan jari-jari lingkaran luar yang menyinggung perpanjangan sisi *AC*, *AB* serta sisi *BC* (sisi $a = BC$), jadi untuk $R_a$ pijakannya adalah titik *A*. Dibagian akhir juga akan diberikan penurunan rumus menentukan panjang jari-jari lingkaran singgung luar dengan keterkaitannya dengan luas dan tanpa menggunakan konsep sudut dari segitiga tersebut.

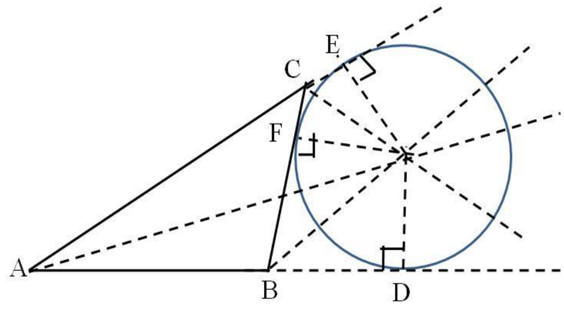
**Definisi 2.4.1.** *Lingkaran singgung* pada suatu segitiga *ABC* adalah lingkaran yang menyinggung sebuat sisi segitiga dan perpanjangan dua sisi lainnya.

Ilustrasi dari Definisi 2.4.1 dapat dilihat pada gambar di bawah ini, yang mana gambar 2.4.1.a merupakan segi tiga asal dan gambar 2.4.1b merupakan segitiga pada gambar 2.4.1.a yang telah dilengkapi dengan lingkaran singgungnya.

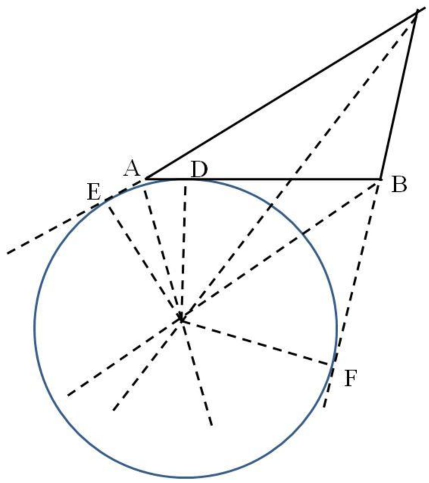
Lingkaran singgung yang menyinggung sisi *BC* pada segitiga *ABC* disebut lingkaran singgung pada sisi *BC*. Jadi lingkaran singgung pada suatu segitiga *ABC* sebenarnya ada 3 buah, yaitu lingkaran singgung yang menyinggung sisi *AB* (gambar 2.4.2), lingkaran singgung yang menyinggung sisi *BC* (gambar 2.4.1.b) dan lingkaran singgung pada sisi *AC* (tidak dibuat gambarnya, karena kalau digambarkan gambarnya lingkarannya akan cukup besar).




Gambar 2.4.1.a




gambar 2.4.1.b




Gambar 2.4.2

Persoalan berikutnya adalah sama seperti lingkaran dalam dan lingkaran luar, yaitu bagaimana menentukan panjang jari-jari dari lingkaran singgung tersebut. Disini akan diberikan perhitungan untuk menentukan panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi *BC*.

***Teorema 2.4.1***. Misalkan *ABC* suatu segitiga sembarang, maka panjang jari-jari lingkarang singgung pada sisi *BC* adalah

$$R_a = s\tan\frac{1}{2}A \tag{2.4.1}$$

***Bukti* :** Misalkan $R_a$ menyatakan panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi *BC* pada gambar 2.4.3, perhatikan bahwa $\Delta AOD$ kongruen dengan $\Delta AOE$. Sehingga $\Delta BOD$ kongruen dengan $\Delta BOF$ dan $\Delta COE$ kongruen dengan $\Delta COF$. Kondisi ini menyebabkan

Panjang $AD$ = panjang $AE$.

dan

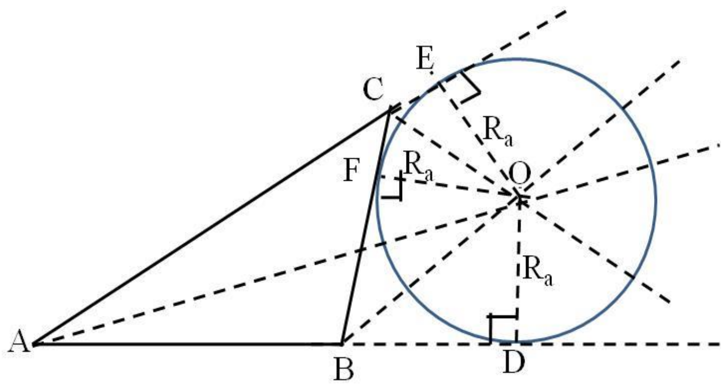
Panjang BD = panjang BF, Serta panjang CE = Panjang CF.

Misalkan, panjang BC, panjanang AC dan panjang AB berturut-turut adalah $a$,b dan $c$ kemudian

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c),$$

serta

panjang $BF$ = panjang $BD = x$.




Gambar 2.4.3

Oleh karena itu

panjang $CF$ = panjang $BC$ – Panjang $BF = a - x$.

dengan demikian juga

panjang $CF$ = panjang $CE = a - x$.

Karena

panjang $AD$ = panjang $AE$,

maka

panjang $AB$ + panjang $BD$ = panjang $AC$ + panjang $CE$

jadi

$c + x = b + a - x$

$2x = b + a - c$

$$x = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

Dengan demikian

Panjang $AD$ = panjang $AB$ + panjang $BD$

$$= c + \frac{1}{2}(a + b - c)$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c) = s$$

Selanjutnya pada $\Delta$ *AOD*,

panjang $AD = s$ dan $\angle ADO = 90^0$ dan $\angle OAD = \frac{1}{2}\angle BAC$

sehingga

$$\tan \angle OAD = \tan \frac{1}{2} \angle BAC = \tan \frac{1}{2} A$$

Jika jari-jari lingkaran singgung pada sisi BC tersebut dinotasikan dengan $R_a$ maka diperoleh

$$\tan \angle OAD = \frac{panjang\ \ OD}{panjang\ \ AD}$$

$$\tan \frac{1}{2} A = \frac{R_a}{s}$$

Jadi

$$R_a = s \tan \frac{1}{2} A$$ ▼

***Remaks* 2.4.1.** Dengan cara yang sama dengan penurunan bukti pada teorema 2.4.1 di atas akan dapat ditunjukkan bahwa

1. Panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi *AC* adalah $R_b = s \tan \frac{1}{2} B$
2. Panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi *AB* adalah $R_c = s \tan \frac{1}{2} C$

Berikut ini diberikan alternatif untuk menghitung panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi BC yang dihubungkaitkan dengan luas segitiga ABC.

***Teorema 2.4.2***. Misalkan *ABC* suatu segitiga sembarang, maka panjang jari-jari lingkarang singgung pada sisi *BC* adalah

$$R_c = \frac{L}{s - a} \tag{2.4.2}$$

**Bukti :** Perhatikan kembali gambar 2.4.3,

Luas □ *ABOC* = Luas Δ *ABO* + luas Δ *ACO*

$$= \frac{1}{2} \times AB \times OD + \frac{1}{2} \times AC \times OC$$

$$= \frac{1}{2} c\, R_a + \frac{1}{2} b\, R_a \tag{2.4.3}$$

maka

Luas □ *ABOC* = Luas Δ *ABC* + luas Δ *BCO*

$$= L + \frac{1}{2} \times BC \times OF$$

$$= L + \frac{1}{2} a\, R_a \tag{2.4.4}$$

Dari persamaan (2.4.3) dan (2.4.4) diperoleh

$$\frac{1}{2} c\, R_a + \frac{1}{2} b\, R_a = L + \frac{1}{2} a\, R_a$$

$$\frac{1}{2} c\, R_a + \frac{1}{2} b\, R_a - \frac{1}{2} a\, R_a = L$$

$$R_a \left( \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} a \right) = L$$

$$R_a \left( \frac{1}{2} ( c + b - a ) \right) = L$$

$$R_a \left( \frac{1}{2} ( a + b + c ) - a \right) = L$$

$$R_a (s - a) = L$$

$$R_a = \frac{L}{s - a}$$

▼

***Remaks* 2.4.2**. Dengan cara yang sama akan diperoleh :

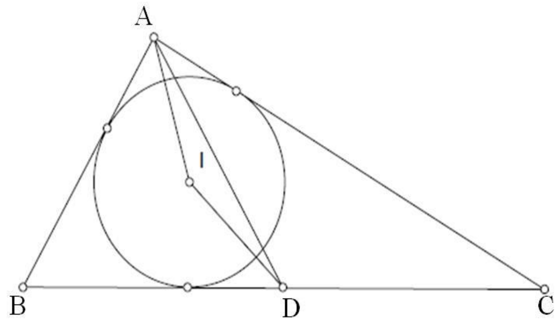
a. Panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi *AC* adalah $R_b = \dfrac{L}{s - b}$

b. Panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi *AB* adalah $R_c = \dfrac{L}{s - c}$

***Soal Latihan* 3.**

1. Sebuah segitiga panjang sisi-sisinya 40 cm, 45 cm dan 67 cm. Tentukanlah
   a. Panjang jari-jari lingkaran dalamnya
   b. Panjang jari-jari lingkaran luarnya
2. Bilakah Jari-jari lingkaran luar suatu segitiga adalah 2 kali jari-jari lingkaran dalam.
3. Berikan contoh kasus bahwa jari-jari lingkaran luar dari suatu segitiga berada di luar segitiga tersebut.
4. Sebuah segitiga dengan ukuran yang sama seperti soal no 1, Hitunglah panjang ketiga jari-jari lingkaran singgung luarnya.
5. Untuk segitiga samakaki, berapakah berbandingan $R_a : R_b : R_c$
6. Sebuah segitiga dengan ukuran seperti soal no 1 tentukanlah perbandingan luas lingkaran dalam dan luas lingkaran singgung pada sisi *AC*.
7. Pada $\Delta ABC$, dibuat titik *P* pada sisi *BC*, sebut *I* adalah titik pusat lingkaran dalamnya, dan tentukan posisi titik *Q* pada *AB* sehingga $BQ = BP$. Tunjukkan bahwa $IP = IQ$.
8. Jika I titik pusat lingkaran dalam pada $\Delta ABC$, jika $\angle A = 60^0$ kemudian garis garis bagi dari sudut *B* dan *C* masing-masing memotong *AC* dan *AB* di titik *E* dan *F*. Tunjukkan bahwa $IE = IF$.
9. Tunjukkan pula bahwa $r_a, r_b . r_c = r^2 s$. denan $s = ½ (a + b + c)$

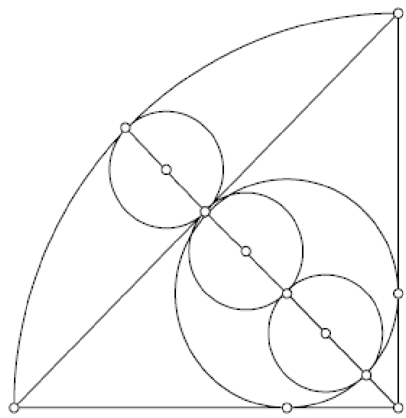
10. Perhatikan $\Delta ABC$ pada gambar disebelah dengan lingkaran dalamnya. Jika $D$ titik tengah dari $BC$ dan $AI = ID$ dan $\Delta ABC$ siku-siku di A, tunjukkan bahwa salah satu dari $\angle B$ atau $\angle C$ adalah $30^0$.




11. Jika pada $\Delta$ $ABC$, jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luar adalah $r$ dan $R$. Tunjukkan bahwa

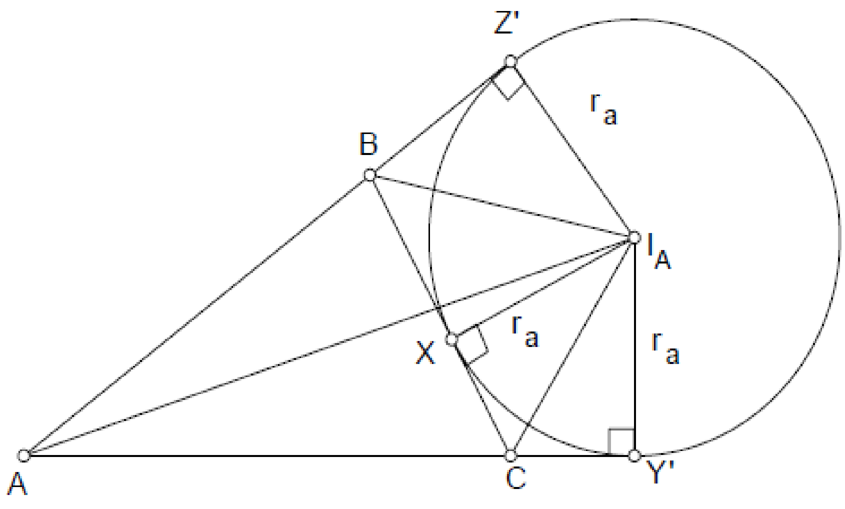
$$r = 4R\, sin\frac{A}{2}.sin\frac{B}{2}.sin\frac{C}{2}$$

12. Perhatikan gambar disebelah kemudian tunjukkan bahwa ketiga lingkaran kecil mempunyai jari-jari yang sama.



13. Jika $P$ sebarang titik pada lingkaran luar segitiga $ABC$, tunjukkan bahwa garis simsonnya merupakan bisektor dari sisi $PH$ dengan $H$ adalah Orthocenter dari segitiga $ABC$.
14. Jika $I_A$. $I_B$ dan $I_C$ masing-masing menyatakan titik pusat lingkaran singgung luar dari titik $A$, $B$ dan $C$ (untuk untuk titik pusat lingkaran singgung luar dari titik $A$ seperti pada Gambar di bawah). Tunjukkan bahwa jari-jari lingkaran luar $\Delta I_AI_BI_C$ adalah $2R$ dengan $R$ jari-jari lingkaran luar $\Delta ABC$.

15. Tunjukkanlah bahwa luas $\Delta I_A I_B I_C$ adalah $\frac{abc}{3r}$ dengan r jari-jari lingkaran dalam $\Delta ABC$ yang sisi-sisinya adalah $a$, $b$ dan $c$.



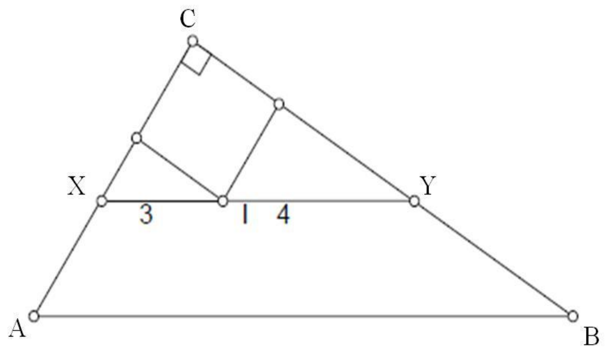

16. *). Jika r jari-jari lingkaran dalam ΔABC, tunjukkan bawah

$$\frac{r}{r_a} = tg\left(\frac{1}{2}B\right) = tg\,\frac{1}{2}C.$$

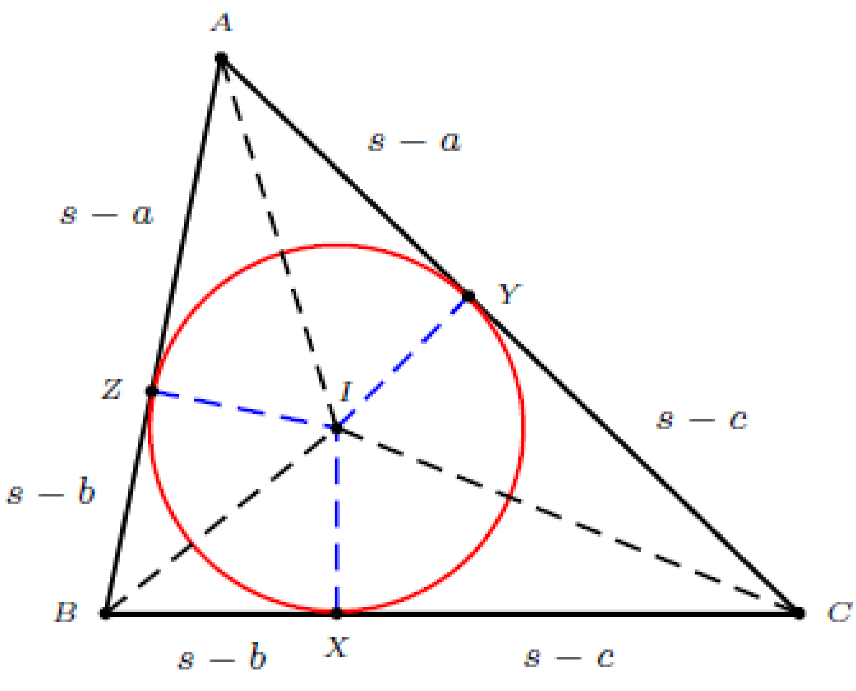
17. *). Untuk sebarang segitiga, tunjukkan bahwah

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

18. $\Delta ABC$ di sebelah, siku-siku di $C$, jika $I$ adalah titik pusat lingkaran dalam, buat garis melalui $I$ sejajar dengan $AB$ yang memotong AC di X dan memotong $BC$ di $Y$, berapakah perbandingan $AC$ dengan $BC$.



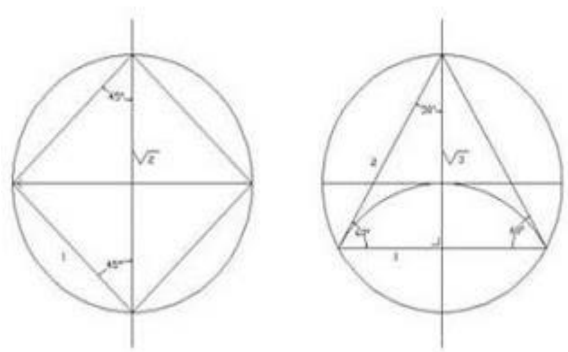
19. Jika panjang garis tinggi suatu segitiga masing-masing adalah 12, 15 dan 20, berapakah luas segitiga tersebut.
20. Sebuah segitiga *ABC* dengan ukuran seperti soal no 2 tentukanlah
    a. Luas lingkaran singgung terkecil
    b. Luas lingkaran singgung terbesar
21. *). Misalkan *D*, *E* dan *F* adalah tiga buah titik yang berada pada sisi *BC*. *CA* dan *AB* pada segitiga *ABC*. Tunjukkan bahwa lingkaran luar dari segitiga *AEF*, *BDF* dan *CDE* berpotongan di suatu titik (titik tersebut dinamakan dengan *titik Miquel*)
22. *). Buktikan secara lansung Remark 5.3.2 yaitu dengan memisalkan *AY* = *AZ* = *s* –*a*, *BX* = *BZ* = *s* – *b* dan *CX* = *CY* = *s* – *cm* dengan *s* = ½ (*a* + *b* + *c*), tunjukkan bahwa $r = \frac{L\Delta ABC}{s}$.



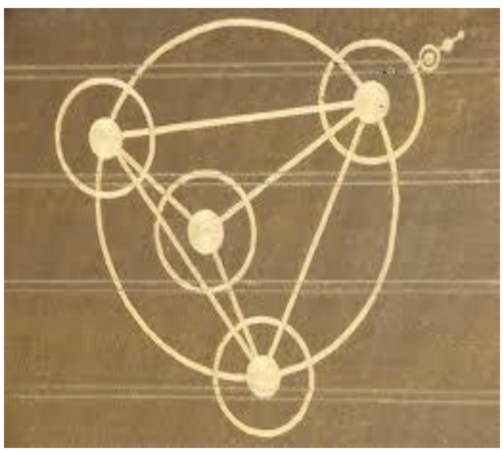
BAB
3

# LINGKARAN II

Dalam kehidupan, kita akan banyak sekali menjumpai ataupun terlibat dalam masalah lingkaran, kalau dalam suatu pipa besar akan dimuat untuk mengalirkan minyak dari tempat pengeboran ke kilang produksi. Jika didalam pipa tersebut juga mesti dibuat pipa kecil sedangkan diantara pipa kecil dan pipa bersar tersebut mesti dibuat wadah dalam bentuk segitiga yang digunakan untuk pemanasan agar minyak tadi tidak membeku, persoalannya adalah berapa ukuran pipa besar dan pipa kecil yang mesti kita buat supaya hasilnya maksimal.



Gambar 7. Sistem proporsi √2 dan √3



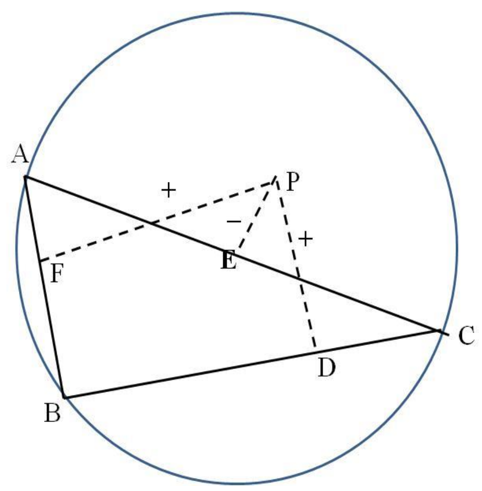
# BAB 3

# LINGKARAN II

## 3.1. *Teorema Carnot's*

Sebelum memuktikan teorema Carnot's terlebih dahulu diperkenalkan jarak bertanda dari suatu titik ke suatu sisi. Jika diberikan suatu segitiga *ABC* sebarang, maka setiap sisi dari segitiga tersebut akan membagi bidang tersebut menjadi 2 bahagian. Maka jarak suatu titik ke suatu garis jika titik dan garis tersebut berada pada bidang yang berda. Perlu diperhatikan bahwa garis yang membagi daerah menjadi dua bidang tersebut dimungkinkan oleh masing-masing sisi dari segitiga tersebut. Untuk itu perhatikan gambar 3.1.1 berikut :

Perhatikan gambar 3.1.1, maka jarak *P* ke garis *AB* dan *B*C diberi nilai Positip (karena titik *P* dan garis *AB* maupun garis *BC* tidak berada pada bidang yang sama) yaitu dipisahkan oleh garis *AC*. Jarak dari titik *P* ke garis *AC* diberi nilai negatip karena berada pada bidang yang sama. Secara khusus jarak bertanda ini akan digunakan pada ketaksamaan Erdos-Mordell, namun juga dapat digunakan untuk pembuktian teorema Carnot's 1 jika titik *P* berada di luar segitiga.



Gambar 3.1.1

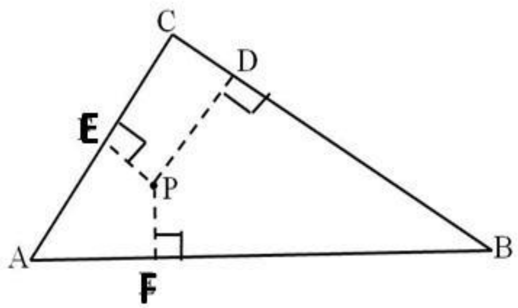
Misalkan *ABC* sebarang segitiga dan ambil titik P sebarang di dalam segitiga *ABC*, kemudian dari titik *P* buat garis yang tegak lurus ke ketiga sisi segitiga *ABC*, Misalkan titik potongnya adalah masing masing, *D*, *E* dan *F*, maka teorema Carnot's yang pertama merupakan jumlah kuadrat sisi-sisi $AD^2 - BD^2 + BE^2 - CE^2 + CF^2 - AF^2$.

Bentuk kedua merupakan kesamaan jumlah jari lingkaran luar ditambah jari-jari lingkaran dalam terhadap panjang dari titik pusat lingkaran luar ke ketiga sisi segitiga *ABC*, yang mana garis dari titik pusat ke masing-masing sisi adalah tegakluru. Bentuk pertama dari teorema Carnot,s adalah sebagai berikut

***Teorema 3.1.1*. (*Teorema Carnot* I)**.
Misalkan *ABC* adalah sebarang segitiga, Jika dari titik *P* dibuat garis yang tegak lurus terhadap ketiga sisi segitiga, katakan titik potongnya masing-masing terhadap sumbu *BC*, *AC* dan *AB* adalah *D*, *E* dan *F*, maka garis *AD*, *BE* dan *CF* adalah kongkuren jika dan hanya jika

$$AF^2 - \mathrm{FB}^2 + BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 = 0. \qquad (3.1.1)$$

**Bukti :** $\Rightarrow$ Buat sebarang segitiga dan ambil sebarang titik *P* dalam segitiga tersebut, Kemudian dari Titik *P* buat garis yang tegak lurus ke sisi *BC*, *CA* dan *AB*, katakana masing-masing titik potongnya masing-masing adalah *D*, *E* dan *F* (perhatikan gambar 3.1.2a). Dengan menggunakan Teorema Pythagoras diperoleh :




$AE^2 + EP^2 = AP^2$
$-BF^2 - FP^2 = -BP^2$
$BD^2 + DP^2 = BP^2$
$-CD^2 - DP^2 = -CP^2$
$CE^2 + PE^2 = CP^2$
$-AF^2 - PF^2 = -AP^2$

Gambar 3.1.2a

Dengan menjumlahkan ke enam persamaan di atas diperoleh

$$AF^2 - FB^2 + BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 = 0.$$

$\Leftarrow$. Untuk membuktikan sebaliknya misalkan persamaan (3.1.1) , misalkan $P$ titik potong dari $AD$ dan $BE$, kemudian buat garis dari titik $P$ yang tegak lurus ke sisi $AB$, tapi katakan titik potongnya di $AB$ adalah $Q$, maka berlaku

$$AQ^2 - BQ^2 + BD^2 - CD^2 + CF^2 - AF^2 = 0$$

Sehingga

$$AQ^2 - BQ^2 = AF^2 - FB^2$$

Dan ini hanya mungkin berlaku jika $F = Q$.

Keberlakuan $F = Q$ juga dapat ditunjukkan dengan memisalkan $BQ = x$, $AB = c$, sehingga $AQ = c - x$, dan

$$AQ^2 - BQ^2 = (c - x)^2 - x^2 = c^2 - 2cx$$

Jika disebut $f(x) = c^2 - 2cx$, yaitu suatu fungsi linear dari $x$, maka $f(x)$ jelas merupakan fungsi yang injektif, artinya $f(x)$ akan memberikan nilai yang sama untuk dua nilai $f(x)$ yang sama. Jadi mestilah $F = Q$.

Teorema Carnot's II, merupakan hubungan jari-jari lingkaran luar ditambah jari-jari lingkaran dalam dibandingkan dengan panjang bertanda sisi-sisi dari titik pusat ke sisi $AB$ ditambah jarak titik pusat ke sisi $BC$ ditambah panjang sisi dari titik pusat ke sisi

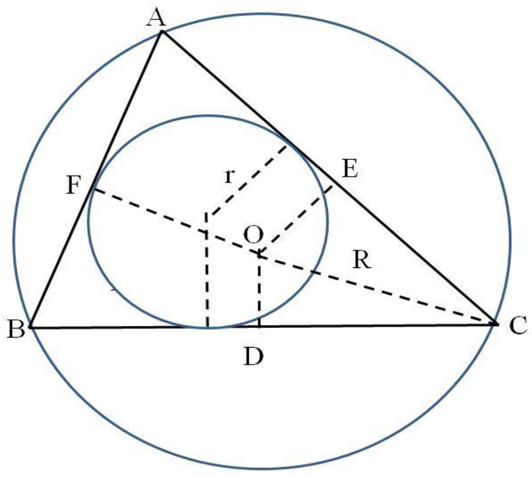
$AC$. Untuk menambah wawasan cara pembuktian, teorema carnot's II ini akan dibuktikan dengan menggunakan konsep luas daerah.

***Teorema 3.1.2*. (*Teorema Carnot* II).**

Pada sebarang segitiga $ABC$ misalkan $P$ adalah titik pusat lingkaran luar, dan $P$ adalah sebarang titik dalam segitiga $ABC$, Jika dari titik $P$ dibuat garis yang tegak lurus terhadap ketiga sisi segitiga, katakan titik potongnya masing-masing terhadap sumbu $BC$, $AC$ dan $AB$ adalah $D$, $E$ dan $F$, maka berlaku. Jika $R$ dan $r$, masing-masing menyatakan jari-jari lingkaran luar dan lngkaran dalam, maka berlaku :

$$OD + OE + OF = R + r. \quad (3.1.2)$$

**Bukti** : Perhatikan gambar berikut




Gambar 3.1.3a

Misalkan $L$ menyatakan luas segitiga $ABC$, maka berdasarkan Remaks 6.1.2 diperoleh

$$rs = L$$

$$r(a + b + c) = 2L$$

Misalkan $O$ titik pusat lingkaran luar, maka berlaku

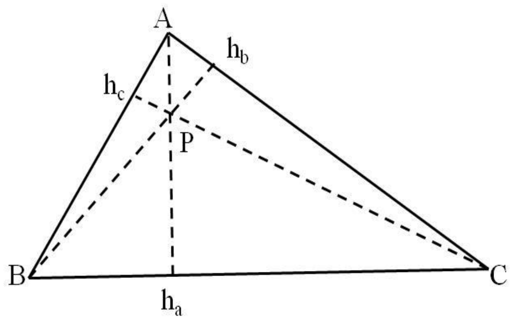
$$\text{Luas } \Delta OAB + \text{Luas } \Delta OBC + \text{Luas } \Delta OAC = \text{Luas } \Delta ABC$$

Maka

$$r(a + b + c) = 2\left(\frac{1}{2}AB \times OF + \frac{1}{2}BC \times OD + \frac{1}{2}CA \times OE\right)$$

$$= AB \times OF + BC \times OD + CA \times OE \quad (3.1.3)$$

Karena O adalah titik pusat lingkaran luar, maka segitiga AOB, BOC dan COA merupakan segitiga samakaki serta $\angle AOB = 2\ \angle C$, $\angle\ BOC = 2\ \angle A$ dan $\angle AOC = 2\angle$ B.




Gambar 3.1.3b

Dari gambar 3.1.3a diperoleh

$$\frac{R}{\sin 90} = \frac{OD}{\sin OCD}$$

Berdasarkan uraian di atas mengakibatkan

$$\frac{R}{1} = \frac{OD}{\sin(90\ \ - A)}$$

$$\frac{R}{1} = \frac{OD}{\sin ABh_b}$$

yang ekivalen dengan

$$\sin ABh_b = \frac{OD}{R}$$

Dengan memperhatikan $\Delta\ ABh_b$ juga akan diperoleh

$$\sin ABh_b = \frac{Ah_b}{c}$$

Jadi

$$\frac{OD}{R} = \frac{Ah_b}{c} \qquad (3.1.3a)$$

Dilain pihak pada gambar 3.1.3b dengan memperhatikan kesebangunan dari $\Delta ABh_b$ dengan $\Delta ACh_c$ diperoleh

$$\frac{Ah_b}{c} = \frac{Ah_c}{b} \qquad (3.1.3b)$$

Dari persamaan (6.1.3a) dan persamaan (6.1.3b) diperoleh

$$\frac{Ah_b}{c} = \frac{Ah_c}{b} = \frac{OD}{R}$$

yang mengakibatkan

$$OD(b + c) = R(Ah_b + Ah_c).$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$OE(a + c) = R(Bh_a + B_{hc})$$

$$OF(a + b) = R(Ch_a + Ch_b)$$

Jumlahkan ketiga persamaan maka akan diperoleh

$$OD(b + c) + OE(a + c) + OF(a + b) = R(Ah_b + Ah_c) + R(Bh_a + B_{hc}) + R(Ch_a + Ch_b)$$

$$OD(b + c) + OE(a + c) + OF(a + b) = R(a + b + c) \qquad (3.1.3c)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (3.1.3) dengan persamaan (3.1.3c) kemudian dengan membagi dengan ($a$+ $b$ + $c$), maka akan diperoleh

$$OD + OE + OF = R + r. \qquad \blacktriangledown$$

## 3.2. *Teorema Centroid dan Teorema Euler*

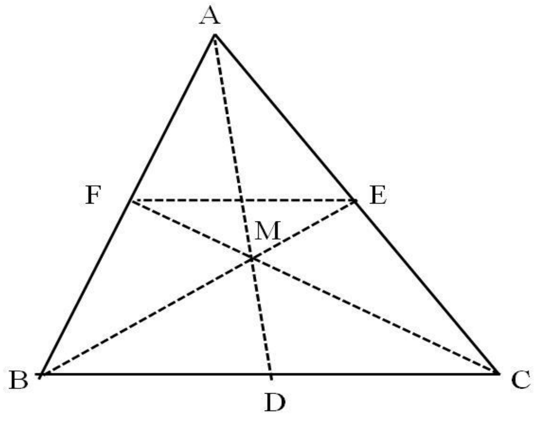
Pada bagian ini akan diperkenalkan tentang teorema *Centroid*, akan tetapi bukti dari teorema tersebut akan diberikan pada bab selanjutnya. Teorema tersebut dimasukkan disini hanya untuk kegunaan pada pembahasan berikutnya. Berikutnya akan dibahas teorema *Euler* yaitu tentang jarang dari titik pusat lingkaran dalam dan lingkaran luar dari suatu segitiga. Yang mana jaraknya dibandingkan dengan nilai dari jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luarnya.

Kebanyakan buku membuktikan teorema Centroid dengan menggunakan teorema Ceva, akan tetapi karena teorema ceva bari akan dibahas pada bab 6, maka untuk membuktikan teorema centroid ini, maka proses pembuktiannya akan digunakan konsep luas dan kesebangunan, sedangkan pada bab 7 juga akan dibahas teorema centroid ini akan tetapi buktinya juga akan digunakan konsep luas dengan cara lain dan sebagai latihan diminta untuk mengerjakannya dengan menggunakan teorema ceva.

***Teorema 3.2.1* (*Teorema Centroid*)**

Jika $D$, $E$ dan $F$ masing-masing adalah titik tengah dari sisi $BC$, $CA$ dan AB pada suatu setigita $ABC$, maka $AD$, $BE$ dan $CF$ congcurent di titik $G$ serta

$$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = 2 \qquad (3.2.1)$$




Gambar 3.2.1.

***Bukti*** : Perhatikan gambar 3.2.1, Hubungka titik F dan E, jelas *BC* // *FE*, karena *E* dan *F* adalah titik tengah *AC* dan *AB*, maka *BC* : *FE* = 2 : 1. Selanjutnya dari $\Delta BMC \sim \Delta EMF$, diperoleh

$$\frac{BM}{ME} = \frac{CM}{MF} = \frac{BC}{FE} = \frac{2}{1}$$

dengan cara yang sama juga dapat ditunjukkan bahwa

$$\frac{AM}{MD} = \frac{2}{1}$$

Misalkan koordinat titik *A*, *B* dan *C* masing-masing adalah $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$ dan $(x_3,y_3)$, jika *G* merupakan centroid dari $\Delta$ *ABC*, maka dapat ditentukan koordinat titik centroid tersebut yaitu

$$\mathrm{G} = \left( \frac{\mathrm{x}_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{\mathrm{y}_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

Koordinat centroid tersebut sebenarnya merupakan akibat lansung dari teorema centroit, yang secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut.

***Corollalry* 3.2.1**. Jika *G* centroid dari segitiga *ABC*, maka berlaku :

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

***Bukti*** : Perhatikan kembali gambar 3.1.4 di atas, jika *D*, *E* dan *F* masing-masing merupakan titik tengah dari *BC*, *AC* dan *AB*, maka berlaku $D = \frac{1}{2}(B+C)$, $E = \frac{1}{2}(A+C)$ dan $F = \frac{1}{2}(A+B)$ juga $G = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}D = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}E = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}F$, sehingga

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C)$$ ♥

***Teorema 3.2.2***. (***Teorema Euler- Formula Euler Untuk OI***)

Misalkan $O$ dan $I$ masing-masing titik pusat lingkaran luar dan lingkaran dalam dari segitiga $ABC$, dengan $R$ Jari-jari lingkaran dalam dan $r$ jari-jari lingkaran luar maka berlaku

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Bukti : Perhatikan gambar 3.2.2, buat garis dari titik $A$ melalui $I$ dan memotong lingkaran dititik $Q$ juga melalui titik $I$ buat garis yang tegak lurus ke sisi $AC$ dan katakana titik $P$. jadi IP $= r$ dan $OA = OB = OC = R$. maka berlaku

$$\angle CBQ = ½ \angle A$$

Selanjutnya akan diperoleh

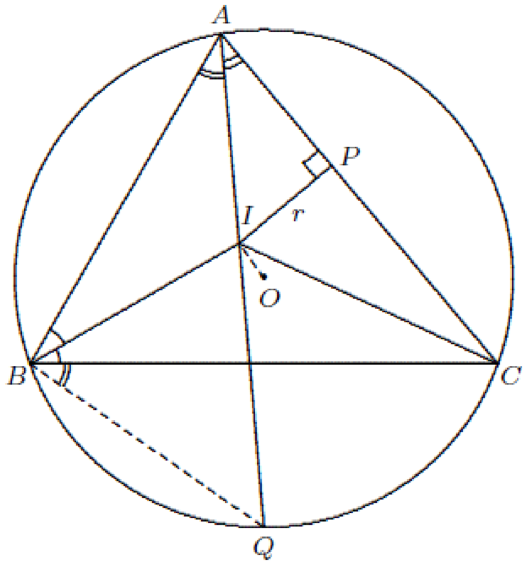
$$\angle QBI = \angle QIB \text{ dan } QB = IQ.$$

Karena nilai mutlak dari nilai kuasa dari titik $I$ terhadap lingkaran luar segitiga $ABC$ adalah

$$R^2 - (\mathrm{OI})^2 = IA.QI = IA.QB$$

$$= \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}.2R\sin\frac{A}{2} = 2Rr$$

Jadi $OI^2 = R^2 - 2$Rr.




Gambar 3.2.2

***Akibat* 3.2.3**. Misalkan $R$ dan $r$ adalah jari-jari lingkaran luar dan lingkaran dalam dari sgitiga $ABC$, maka $R \geq 2r$. dan tanda kesamaan berlaku bila $ABC$ merupakan segitiga samasisi.

**Bukt**i : karena $OI^2 \geq 0$, maka dari teoema 6.2.2 diperoleh $R \geq 2r$.

***Soal Latihan* 4.**

1. Jika titik $P$ berada di luar $\Delta ABC$, Periksalah apakah teorema Carnot I berlaku
2. Buatlah gambar segitiga tumpul, kemudian periksalah apakah teorema Carnot II berlaku.
3. Apakah yang terjadi untuk teorema centroid, jika G segitiga sama kaki atau segitiga samasisi.
4. Misalkan $PP'$ menyatakan diameter dari lingkaran luar segitiga $ABC$. Tunjukkan bahwa garis simson pada $P$ dan $P'$ berpotongan dengan lingkaran dengan Sembilan titik dari segitiga $ABC$ dan membentuk sudut siku.
5. Jika titik $P$ terletak diluar lingkaran kemudian dibuat garis $PA$ dan $PB$ yang menyinggung lingkaran masing-masing di $A$ dan $B$. Dari titi $Q$ dibusur besar (atau busur kecil) $AB$, ditarik garis yang tegak lurus $AB$, $PA$ dan $PB$. Buktikan bahwa panjang garis yang tegak lurus ke $AB$ adalah rata-rata geometri panjang dua garis tegak lurus lainnya.
6. Diketahui $\Delta ABC$ dengan $AB$ = 8 cm, $BC$ = 7 cm dan $CA$ = 6 cm. Titik $D$ terletah pada perpanjangan $AC$ sehingga $CD$ = 12. Hitunglah panjang sisi $BD$.
7. Tentukanlah luas segi-empat terluas yang termuat dalam lingkaran luar segitga $ABC$ sama sisi yang panjang sisinya 12
8. Misalkan $H$ orthocenter dari $\Delta ABC$, tunjukkan bahwa garis euler dari $\Delta ABC$, $\Delta HBC$, $\Delta HCA$ dan $\Delta HAB$ adalah segaris.
9. Misalkan $G$ centroid dari $\Delta$ $ABC$, buatlah sebuah garis melalui $G$ yang memotong $AB$ dan $AC$ masing-masing di titik $M$ dan $N$, buktikan bahwa

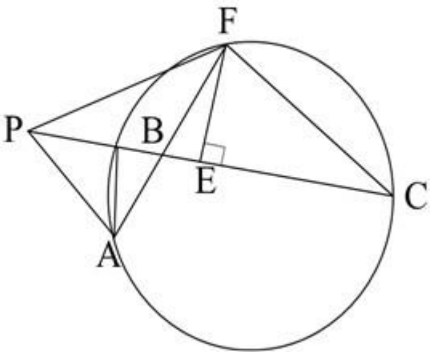
   $$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = 1$$

10. Misalkan $O$ adalah titik pusat lingkaran luar $\Delta ABC$, sedangkan $D$, $E$ dan $F$ masing-masing adalah proyeksi titik Tunjukkan bahwa orthocenter dari $\Delta DEF$ adalah juga circumcenter $O$ dari $\Delta ABC$.

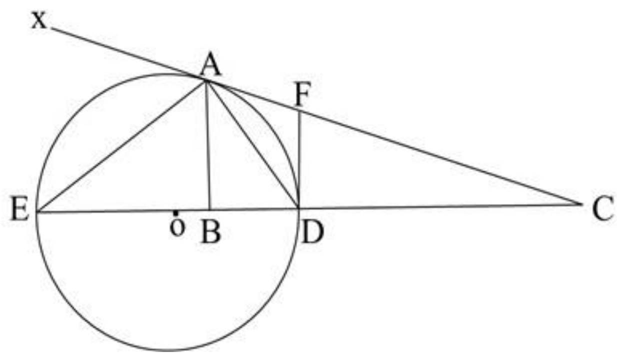
11. Pada gambar disebelah, $AF = FC$ dan $PE = EC$,

    a. Tunjukkan bahwa $\Delta FPA$ samakaki

    b. Tunjukkan bahwa $AB + BE = EC$.




12. Sebuah lingkaran dengan titik pusat $O$, titik $E$, $O$, $B$, $D$ adalah segaris dan juga titik $X$, $A$, $F$, $C$ (seperti gambar disebelah), Garis $XC$ dan $FD$ masing-masing menyinggung lingkaran di titik $A$ dan $D$, tunjukkan bahwa




    *a.* $AD$ bisector $\angle BAC$

    b. $AE$ bisector $\angle BAX$

13. *) Sisi-sisi sejajar suatu trapesium panjangnya adalah 40 cm dan 16 cm. jika panjang kaki-kakinya adalah 24 cm dan 30 cm. Hitunglah panjang diagonalnya.

14. **) diketahui $\Delta ABC$ siku-siku di $A$. Buktikan bahwa

    a. $BC > AB$ atau $BC > AC$

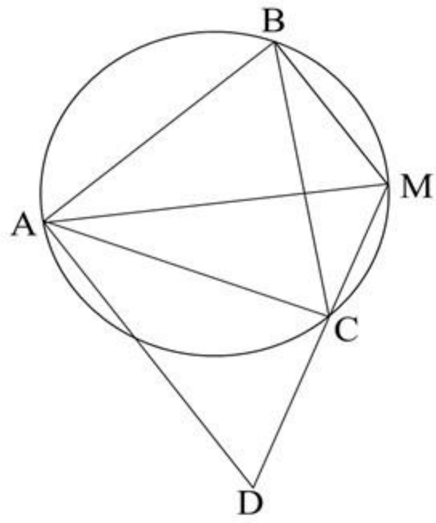
    b. $(BC)^3 > (AB)^3 + (AC)^3$

    c. $(BC)^4 > (AB)^4 + (AC)^4$ atau $(BC)^4 < (AB)^4 + (AC)^4$ , (hanya salah satu yang benar).

15. Dengan kasus yang sama seperti soal nomor 14 di atas, tunjukkan juga bahwa centroid dari $\Delta DE$F juga centroid dari $\Delta AB$C.

16. Berikut ini sebenarnya sebuah teorema yang sering disebut dengan teorema Van Schooten's. yaitu misalkan $\Delta ABC$ sama sisi. Misalkan pula M suatu titik pada busur BC dari lingkaran luarnya. Tunjukkan bawha

$$AM = BM + CM$$

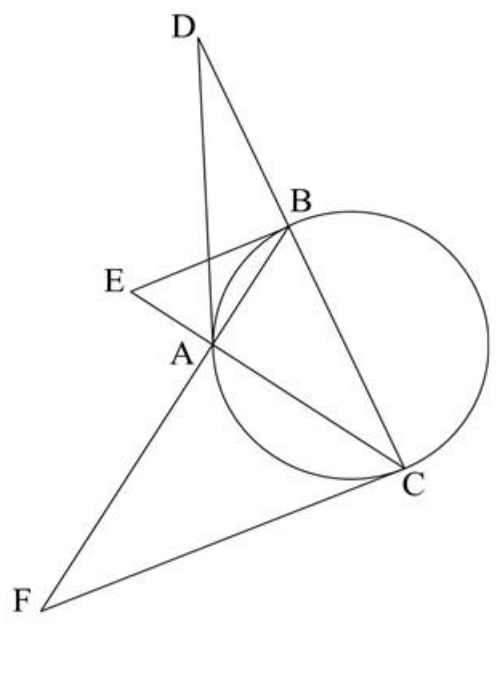



Pentunjuk : kontruksi titik $D$ sehingga $AM = DM$ dan kemudian tunjukkan $\Delta ABM \sim \Delta ACD$.

17. **). Pada gambar disebelah titik $A$, $B$ dan C berada pada lingkaran, garis singgung yang melalui titik $A$ berpotongan dengan $CB$ di titik $D$. Garis singgung dari titik $B$ berpotongan dengan $CA$ di titik $E$ dan garis singgung dari titik $C$ berpotongan dengan $BA$ di titik $F$. Tunjukkan bahwa $D$, $E$ dan $F$ adalah segaris

Pentunjuk : tunjukkan $\Delta ACD \sim \Delta BAD$dan

tunjukkan juga $\dfrac{DB}{DC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$



## 3.3. *Segi-empat Siklik*

Pada bagian ini akan diperkenalkan tentang segi-empat siklik, yang dalam berbagai buku teks sering disebut dengan segi-empat tali busur. Pada sub bab sebelumnya telah diperkenalkan segiempat siklik tersebut, namum pada bagian ini pembahasan segi-empat siklik tidak begitu mendalam, karena akan dibahas juga pada bagian lain. Pada bagian sebelumnya telah disebutkan bahwa empat buah titik dikatakan *siklik* jika keempat titiknya berada pada sebuah lingkaran.

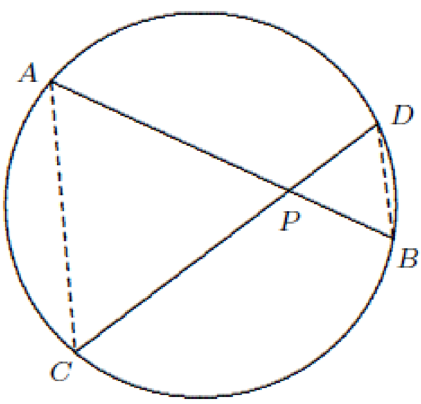
Salahsatu teorema yang paling terkenal tentang segi-empat siklik ini adalah apa yang dikenal dengan teorema Euclide's yang bercerita tentang eksistensi atau syarat perlu dan cukup untuk empat buah titik yang siklik

***Teorema 3.3.1***. Misalkan $A$, $B$, $C$ dan $D$ empat buah titik pada suatu bidang sehingga $AB$ dan $CD$ berpotongan dititik $P$. maka $A$, $B$, $C$ dan $D$ adalah konsiklik jika dan hanya jika

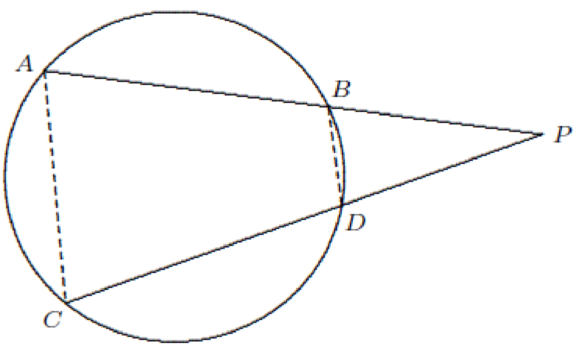
$$PA \,.PB = PC \,.\, PD.$$

***Bukti*** : Perhatikan gambar di bawah ini, maka dengan menunjukkan kesebangunan dari $\Delta APC$ dengan $\Delta DBC$, maka akan diperoleh

$$PA \,..PB = PC \,.\, PD.$$

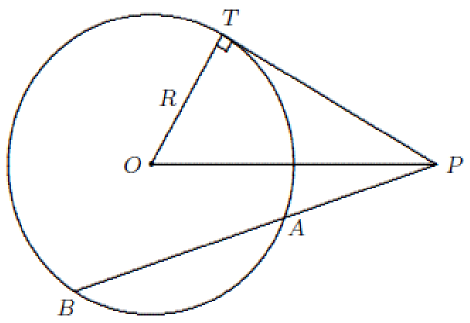



Gambar 3.3.1a

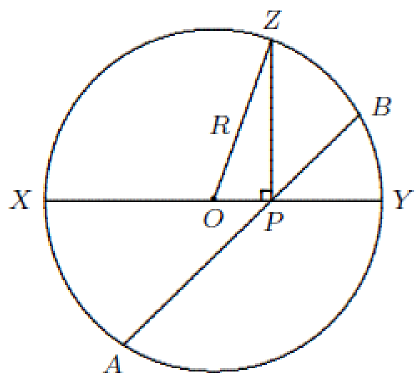



Gambar 3.3.1b

***Definisi 3.3.1***. Misalkan $O$ titik pusat suatu lingkaran dan $R$ adalah jari-jari dari lingkaran tersebut, maka kuasa titik $P$ terhadap lingkaran tersebut didefinisikan $OP^2 - R^2$.




Gambar 3.3.2a




gambar 3.3.2b

Posisi dari titik $P$ terhadap lingkaran tersebut dapat terjadi dalam tiga kondisi yaitu, $P$ berada pada lingkaran, maka jelas kuasanya sama dengan nol. Akan tetapi bila titik $P$ berada diluar lingkaran, maka kuasa titik $P$ terhadap lingkaran tersebut tidak lain adalah panjang garis singgung dari $P$ ke lingkaran. Jika kita buat garis dari $P$ yang memotong lingkaran dititik $A$ dan $B$ (seperti gambar 3.3.2a), jika kita misalkan $K(P)^2$ adalah kuasa dari titik $P$ terhadap lingkaran, maka untuk titik $P$ yang berada diluar lingkaran akan berlaku

$$K(P)^2 = PT^2 = OP^2 - \mathrm{R}^2$$
$$= PA.PB.$$

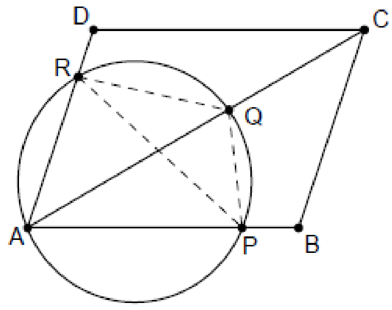
Sedangkan bila titik $P$ berada dalam lingkaran, misalkan $XY$ adalah diameter lingkaran yang melalui $O$ dan $P$ (senantiasa bisa dibuat), kemudian dibuat garis melalui titik $P$ yang memotong lingkaran dititik $A$ dan $B$ (perhatikan gambar 3.3.1b) selanjutnya melalui titik $P$ juga buat garis yang tegak lurus dengan diameter tersebut dan memotong lingkaran dititik $Z$ maka berlaku :

$$K(P)^2 = OP^2 - R^2 = -(PZ)^2$$
$$= -PX.\ PY = -PA.\ PB$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa bila titik $P$ berada diluar lingkaran, maka nilai dari $K(P)^2$ adalah positip dan bila berada pada lingkaran maka $K(P)^2 = 0$ serta bila P berada didalam lingkaran maka nilai $K(P)^2$ adalah negatip.

***Teladan* 3.3.1** : *ABCD* adalah suatu jajaran genjang, dibuat sebuah lingkaran yang melalui titik *A* dan memotong sisi *AB, AD* dan *AC* seperti gambar disebelah, tunjukkan bahwa berlaku

$AP \times AB + AR \times AD = AQ \times AC$




gambar 3.3.3

***Penyelesaian*** : Gunakan teorema Ptolemy untu segi-empat APQR, maka diperoleh

$$AP \times RQ + AR \times PQ = AQ \times RP$$

Kalikan persamaan di atas dengan *AB*/*RQ*, maka diperoleh

$$AP \times AB + AR \times CB = AQ \times AC$$

Kemudian ganti *CB* dengan *AD*, maka diperoleh

$$AP \times AB + AR \times AD = AQ \times AC$$

***Teladan* 3.3.2** : Diketahui garis *AB* dan *AC* menyinggung lingkaran dengan berpusat di *O* masing-masing di *B* dan *C*. Garis *CE* tegak lurus diameter *BD*. Buktikan bahwa

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{BO}$$

***Penyelesaian*** : Perhadikan $\Delta BCE$ dan $\Delta ABO$ (gambar 3.3.3a) , kemudian tarik garis *AO* dan *BC* (gambar 3.3.3b). yang mana dengan *OA* dan *BC* berpotongan di titik *P*.

Perhatikan bahwa

$$AB = OC$$

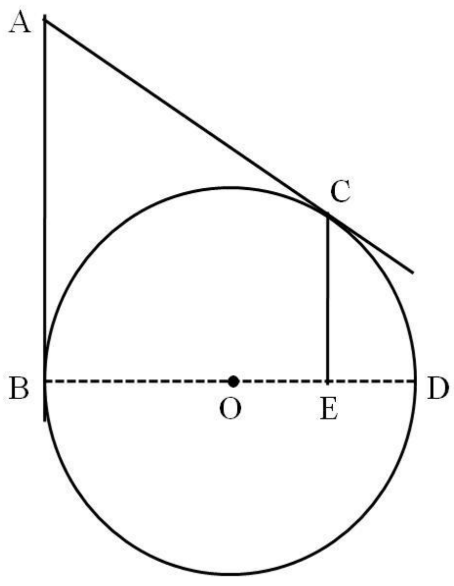
$$AO = AO$$

$$\angle ABO = \angle ACO = 90^2.$$

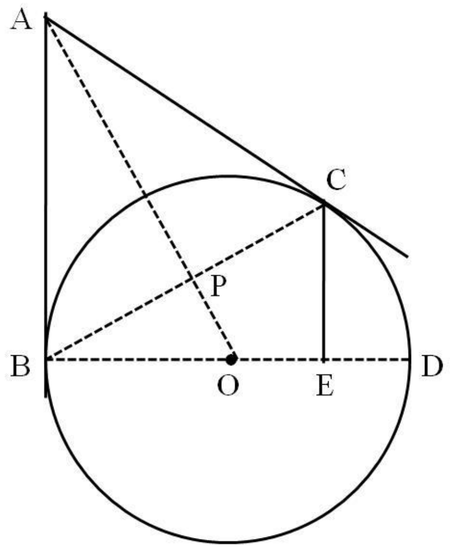
Maka $\Delta AOB = \Delta AOC$, akibatnya $AB = AC$ dan $\angle BAO = \angle OAC$, karena $AP = AP$, maka $\Delta APB$ kongruen dengan segitiga $\Delta APC$. Jadi $\angle P = 90^0$.

Dalam $\Delta AOB$, garis *BP* adalah garis tinggi, maka $\angle BAO = \angle CBE$ dan $\angle OAB = \angle BEC$, yang mengakibatkan $\Delta AOB \sim \Delta BCE$.. Jadi

$$\frac{AB}{BO} = tg\angle AOB = tg\ \angle BCE = \frac{BE}{CE}$$




Gambar 3.3.3a




gambar 3.3.3b

***Teladan* 3.3.3** : Diketahui sebuah lingkaran dan titik *P* diluar lingkaran dan titik *T* pada lingkaran. Dua buah garis singgung dari titik *P* menyinggung lingkaran, masing-masing di titik A dan *B*. Kemudian dibuat garis singgung melalui *T* yang memotong garis *PA* dan *PB* masing-masing di titik *Q* dan *R*. Hitunglah luas $\Delta PQR$.

***Penyelesaian*** : Dari premis yang diberikan maka ada beberapa kemungkinan untuk posisi titik *T* dan *P*. Untuk kasus pertama misalkan posisi titik *T* dan *P* adalah seperti gambar 3.3.4 di bawh

karena

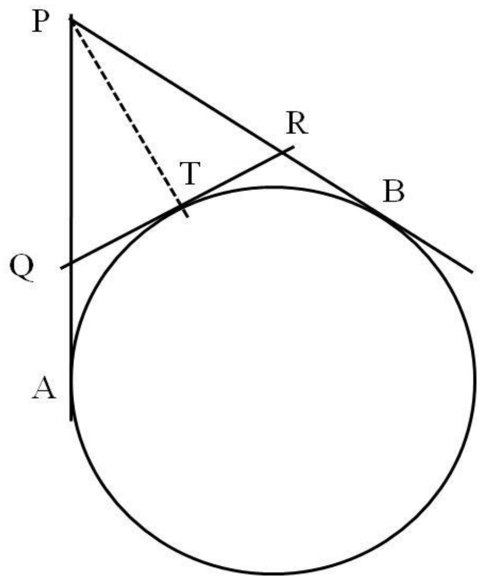
$AQ = QT$ dam $BR = RT$,

selanjutnya keLeling $\Delta PQR$ adalah

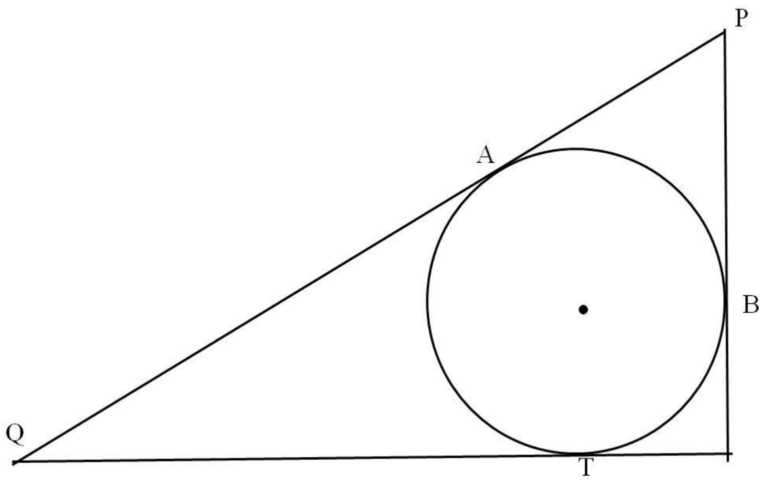
$$\begin{aligned} K &= PQ + QR + RP \\ &= PQ + QT + TR + RP \\ &= PQ + QA + RB + RP \\ &= PA + PB \end{aligned}$$

kasus lain yaitu titik *T* dan *P* seperti pada gambar 3.3.5. dengan cara yang tidak jauh bebeda dengan cara di atas, sebagai latihan silakan ditunjukkan bahwa

$K = PA + PB + 2QR$




gambar 3.3.4




Gambar 3.3.5

.

Dalam buku pelajaran tingkat sekolah menengah, segi-empat siklik ini sering dikenal juga dengan nama *segi-empat tali busur*. Dalam tulisan selanjutnya kadang-kadang kita sebut dengan segi-empat siklik. Berikut ini akan diberikan karakteristik dari segi-empat siklik,

***Teorema 3.3.2*** : Jika *ABCD* adalah segi-empat konvek. Maka pernyataan berikut adalah ekivalen.

a. *ABCD* adalah segi-empat siklik
b. $\angle BAC = \angle BDC$
c. $\angle A + \angle C = 180^0$
d. $\angle ABE = \angle D$
e. ***Bukti*** : a $\Rightarrow$ b. (jelas)

b $\Rightarrow$ c. perhatikan gambar 3.3.6. disebelah dan pembaca dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\Delta APB$ sebangun dengan $\Delta DPC$, dan ini menyebabkan bahwa $\Delta APD$ sebangun dengan $\Delta BPC$, maka $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle CAD = \angle CBD$ dan $\angle ADB = \angle ACB$.

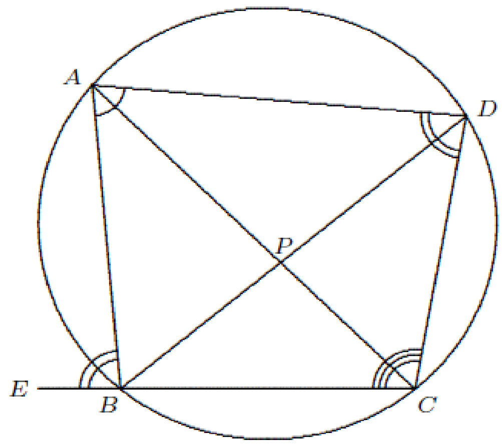
Ini mengakibatkan, $\angle A+\angle C =$

$\angle BAC+\angle CAD+\angle ACB+\angle ACD$

$= ½(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) =$

$180^0$.

c $\Rightarrow$ d dan d $\Rightarrow$ a. Sebagai latihan.



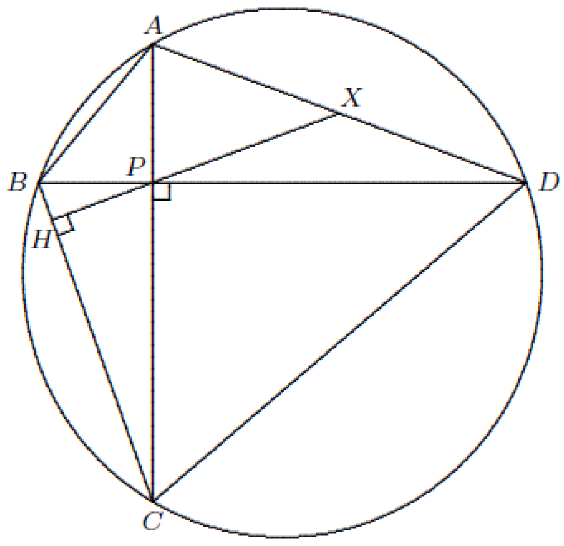

gambar 3.3.6

Berikut ini dibahas kasus khusus yang mana pada segi-empat siklik tersebut berlaku bahwa perptongaan diagonalnya adalah tegaklurus. Akan dianalisa apa akibat yang ditimbulkan dari kasus tersebut

***Teorema 3.3.3.*** : Jika *P* adalah titik potong diagonal pada segi-empat siklik yang mana perpotongan diagonal tersebut adalah tegaklurus. Maka garis bagi sisi yang melalui titik *P* adalah tegak lurus dengan sisi yang bersebelahan.

***Bukti*** : Misalkan X adalah titik biseKtor dari sisi *AD*, garis dari *X* melalui *P* memotong sisi *BC* di titik *H*. akan ditunjukkan bahwa $XH \perp BC$. Untuk itu perhatikan gambar di bawah ini. Dapat ditunjukkan bahwa $\angle DPX = \angle BPH = \angle PCH = \angle ACB = \angle ADB = \angle XDP$. Ini menyatakan bahwa $\Delta XPD$ adalah samasisi. Yang juga akan mengakibatkan $\Delta XAP$ juga samasisi. Konsekuensinya $XA = XP = XD$. Yang dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa :

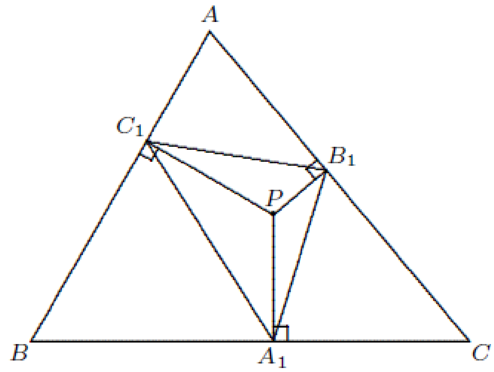
$$\angle PHC = \angle DPC = 90^0.$$




gambar 3.3.7

***Definisi* 3.3.3**: Misalkan *P* sebarang titik dalam $\Delta ABC$, jika $A_1$, $B_1$ dan $C_1$ adalah titik proyeksi dari titik *P* terhadap ketiga sisi segitiga *ABC*, maka $A_1B_1C_1$ disebut segitiga pedal (pedal triangle) dari titik *P* terhadap segitiga *ABC*.

Ilustrasi dari definisi di atas dapat dilihat seperti pada gambar disebelah. Ambil sebarang titik *P* dalam segitiga *ABC* kemudian secara berturut-turut misalkan $A_1$ proyeksi *P* pada sisi *BC*, $B_1$ proyeksi *P* pada sisi *AC* dan $C_1$ proyeksi *P* pada sisi *AB*, maka segitiga $A_1B_1C_1$ itulah yang disebut dengan segitiga pedal dari titik P terhadap segitiga *ABC*.




Gambar 3.3.8

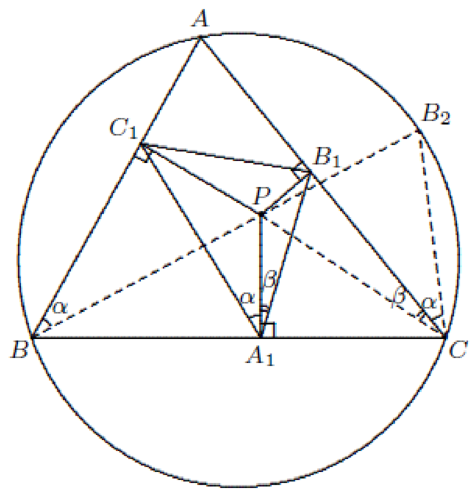
***Teorema 3.3.4.***: Misalkan $A_1B_1C_1$ segitiga pedal dari sebarang titik *P* terhadap segitiga *ABC*. Jika *O* adalah titik pusat lingkaran luar dan *R* adalah jari-jari lingkaran luar segitiga *ABC*, maka berlaku

$$L\Delta A_1B_1C_1 = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} . L\Delta ABC$$

***Bukti*** : Perhatikan gambar 3.3.9 disebelah, misalkan $B_2$ titik potong garis dari titik *B* melalui *P* pada lingkaran luar$\Delta$ *ABC*. Kemudian hubungkan titik $B_2$ dengan C, maka akan diperoleh $\angle A_1 = \alpha + \beta = \angle B_2CP$.

Maka

Dan juga




gambar 3.3.9

$$L\Delta A_1B_1C_1 = \frac{1}{2} A_1B_1 . A_1C_1 . \sin A_1 = \frac{1}{2}(PC \sin C).(PB \sin B). \sin B_2CP$$

$$\frac{\sin B_2CP}{\sin A} = \frac{\sin B_2CP}{\sin BB_2C} = \frac{PB_2}{PC}$$

Maka

$$L\Delta A_1B_1C_1 = \frac{1}{2}PB_1.PB \sin A \sin B \sin C$$

$$= \frac{1}{2}(R^2 - OP^2). \sin A \sin B \sin C$$

$$= \frac{R^2 - OP^2}{\mathbf{4R^2}}.L\Delta ABC$$

Apabila $P$ berada pada lingkaran luar maka jelas akan berlaku luas segitiga pedal adalah nol (sebagai soal latihan bagi pembaca), juga berlaku apabila $A_1$, $B_1$ dan $C_1$ segaris, maka pasti juga luas segitiga pedal tersebut adalah nol.

Kalau untuk sebarang segitiga kita dapat menurutkan rumus untuk menghitung luasnya (walaupun lebih menarik menghitung luas segitiga tanpa menggunakan rumus). Berikut ini akan diberikan rumus untuk menghitung luas sebarang segi-empat siklik (segi-empat tali busur). Sedangkan untuk sebarang segi-empat akan diberikan pada bagian berikutnya. Dalam bentuk khusus kalau segi-empat siklik yang panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat maka segi-empat tersebut dinamakan segi-empat Brahmagupta (segi-empat heron siklik).

**Teorema 3.3.4. Teorema Brahmagupta.**

Misalkan segi-empat siklik mempunyai panjang sisi $a$, $b$, $c$ dan $d$. misalkan s adalah perimeternya. Maka luas segi-empat siklik tersebut adalah

$$L^2 = (s-a).(s-b).(s-c).(s-d)$$

***Bukti*** : Perhatikan gambar 3.3.10 disebelah dan misalkan $n$ merupakan panjang sisi $BD$.

Karena $\angle A + \angle C = 180^0$,

$\cos A = - \cos C$

$\sin A = \sin C$

maka berdasarkan hukum cosinus diperoleh

$n^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A$ dan juga

$n^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos C$;

ini memberikan

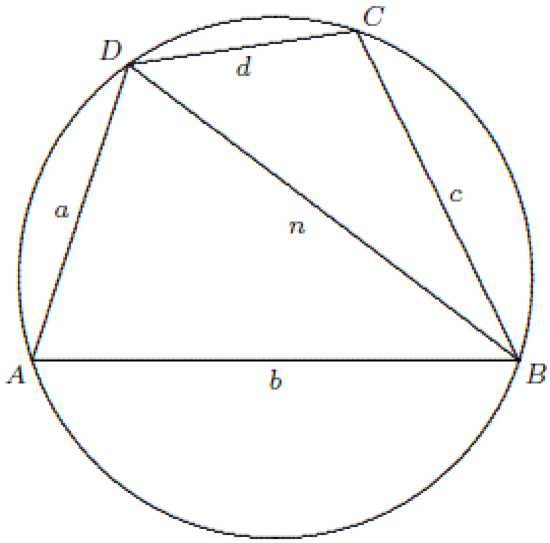
$$2(ab + cd)\, cosA = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \quad (3.3.1)$$

Selanjutnya dari

$$L = \frac{1}{2}ab\sin A + \frac{1}{2}cd\sin C = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin A$$

Jadi

$$4L = (ab + cd)\sin A \qquad (3.3.2)$$




gambar 3.3.10

Dari persamaan (3.3.1) dan (3.3.2) diperoleh

$$4(ab + cd)^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16L^2.$$

$$16L^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

$$= (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)$$

$$= ((a + b)^2 - (c - d)^2).((c + d)^2 - (a - b)^2)$$

$$= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b)$$

$$= (2s - 2d)(2s - 2c)(2s - 2b)(2s - 2a)$$

Jadi

$$L^2 = (s - a).(s - b).(s - c).(s - d) \qquad (3.3.3)$$

Jika pada teorema Brahmagupta di atas $d = 0$. Maka ia akan menjadi $\Delta ABC$ dan kalau luas $\Delta ABC$ dilambangkan dengan $L\Delta ABC$, maka diperoleh

$$L\Delta ABC = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

Kalau pada teorema di atas rumus keliling segi-empatnya adalah untuk segi-empat siklik, maka berikut ini akan diberikan teorema untuk menghitung luas dari sebarang segi-empat. Dan kalau kita ambil kasus khususnya untuk segi-empat yang siklik,

***Teorema 3.3.5***: Pada sebarang segi-empat *ABCD* dengan $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ dan $DA = d$. Buktikan bahwa luas segi-empat

$$L^2 = (s - a).(s - b).(s - c).(s - d) - abcd\cos^2\alpha$$

Dengan $s$ setengah keliling dan $2\alpha$ adalah jumlah sudut yang saling berhadapan

***Bukti*** : Perhatikan gambar 3.3.11 dan tarik garis *BD*. Maka pada $\Delta ABD$ berlaku rumus cosinus yaitu

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle A$$

Dan pada $\Delta BDC$ berlaku hal serupa yaitu

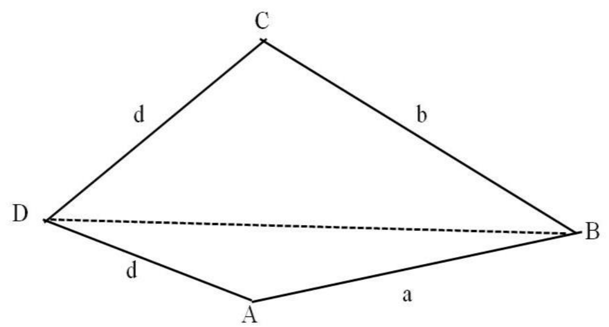
$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle C$$

Maka berdasarkan kedua persamaan tersebut diperoleh

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle A = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle C$$

atau

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad\cos\angle A - 2bc\cos\angle C \qquad (3.3.4)$$




Gambar 3.3.11

Tetapi luas segi-empat *ABCD* dapat ditulis sebagai

$$L\,\square ABCD = L\Delta ABD + L\Delta BDC$$

$$= \tfrac{1}{2}\,ad\sin\angle A + \tfrac{1}{2}\,bc\sin\angle C \qquad (3.3.5)$$

Atau

$$4L = 2ad \sin \angle A + 2\ bc \sin \angle C$$

Jumlah kuadrat ruas kiri dari masing-masing persamaan (3.3.4) dan (3.3.5) diperoleh

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 16\ L^2$$

$$= 4(ad \cos \angle \mathrm{A} - bc \cos \angle \mathrm{C})^2 + 4(ad \sin \angle \mathrm{A} - bc \sin \angle \mathrm{C})^2$$

$$= 4(a^2d^2 + b^2c^2) - 8abcd\ cos(\mathrm{A} + \mathrm{C})$$

$$= 4(a^2d^2 + b^2c^2) - 8abcd\ cos\ 2\alpha$$

$$= 4(a^2d^2 + b^2c^2) - 16abcdcos^2\alpha + 8abcd$$

$$= 4(ad + bc)^2 - 16abcdcos^2\alpha + 8abcd$$

Dengan demikian

$$16L^2 = 4\ (ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcdcos^2\alpha$$

$$= (2ad + 2bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcdcos^2\alpha \qquad (3.3.6)$$

Dengan mengurangkan selisih kuadrat dua suku pertama, diperoleh

$$[(2ad + 2bc) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)].[(2ad + 2bc) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)]$$

$$= [(b + c)^2 - (a - d)^2][(a + d)^2 - (b - c)^2]$$

$$= [(b + c) - (a - d)].[b + c) + )a - d)] \times [(a + d) - (b - c)]\ [(a + d)]$$

$$+ (b - c)$$

$$= (\ +b + c - a)(\ a + b + c - d)(\ a + c + d - b)(a + d + b - c)$$

$$= 2(s - a)2(s - d)\ 2(s - b)\ 2(\ s - c)$$

Gantikan persamaan ini pada persamaan (3) untuk memperolah

$$16L^2 = 16(s - a)\ (s - b)\ (s - c)\ (\ s - d) - 16\ abcd\ cos^2\alpha$$

Jadi

$$L^2 = (s - a)\ (s - b)\ (s - c)\ (\ s - d) - abcd\ cos^2\alpha$$

Kalau di atas adalah tentang luas dari segi-empat Brahmagupta dan luas dari sebarang segi-empat, maka berikut ini akan dibahas tentang panjang diagonal dari segi-empat Brahmagupta. Pada bagian lain juga akan dibahas hal-hal yang terkait dengan perbandingan diagonal dari suatu segi-empat siklik.

***Teorema 3.3.6*** Jika $\overline{AC} = e$ dan $\overline{BD} = f$ adalah panjang diagonal segi-empat Brahmagupta *ABCD* maka berlaku :

$$e=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \text{ dan } f=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

***Bukti* :** Perhatikan Gambar 3.3.13, dengan aturan kosinus diperoleh

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B = c^2 + d^2 - 2cd\cos\angle D. \qquad (3.3.7)$$

Karena $\angle B$ dan $\angle D$ berhadapan maka $\angle B = 180° - \angle D$, sehingga

$$\cos\angle B = -\cos\angle D. \qquad (3.3.8)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.3.8) pada persamaan (3.3.7) diperoleh

$$\cos\angle D = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2ab+2cd}. \qquad (3.3.9)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusi persamaan (3.3.9) pada persamaan (3.3.7) diperoleh

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\left(\frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2ab+2cd}\right)$$

$$e^2 = \frac{(c^2+d^2)(ab+cd) - c^3d - cd^3 + cda^2 + cdb^2}{ab+cd}$$

$$e = \sqrt{\frac{cda^2 + c^2ab + abd^2 + cdb^2}{ab+cd}}$$

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}. \qquad (3.3.10)$$

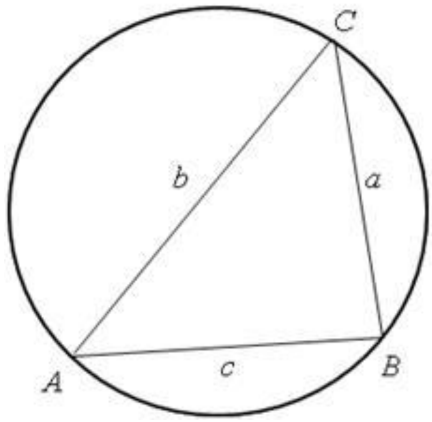
Dengan cara yang sama seperti memperoleh persamaan (3.3.10) diperoleh

$$f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

Setelah membahas panjang diagonal dari segi-empat Bragmagupta, maka selanjutnyakita bahas bagaimana mengkontruksi segi-empat Brahmagupta, hal ini diperlukan karena kalau hanya sebarang segi-empat siklik (segi-empat tali busur), maka yang kita punyai hanya jumlah sudut yang berhadapan adalah $180^0$, akan tetapi belum tentu panjang semua sisinya adalah bilangan bulat. Kalau untuk 3 buah sisi pertama, senantiasa bisa kita buat panjangnya bilangan bulat, akan tetapi yang jadi masalah adalah, kalau sebarang kita buat pada sisi keempat, apa jaminannya panjangnya merupakan bilangan bulat. Adapun cara mengkontruksi segi-empat Brahmagupta adalah sebagai berikut.

Misalkan *ABC* suatu segitiga Heron siklik dengan panjang sisi $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, dan $\overline{AC} = c$ .Pada Gambar 3.3.12, dengan mengambil titik *D* pada busur di depan busur *AB* dengan syarat garis $\overline{CD}$ lebih pendek dari garis $\overline{AB}$ dan tidak ada sisi segi-empat yang sejajar, maka diperoleh segi-empat Brahmagupta *ABCD* dengan panjang sisi $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ dan $\overline{DA} = d$ tidak diketahui.

Selanjutnya, dikontruksi formula Brahmagupta untuk menentukan luas segi-empat Brahmagupta dengan panjang semua sisinya tidak diketahui. Karena garis $\overline{DC}$ lebih pendek dari pada garis $\overline{AB}$, maka perpanjangan $\overline{AD}$ dan $\overline{BC}$ akan berpotongan pada satu titik di luar lingkaran, namakan titik perpotongannya adalah titik *E* dan misalkan $\overline{EC} = \alpha$ dan $\overline{ED} = \beta$ .



Gambar 3.3.12.

Perhatikan segi-empat $ABCD$ dan $\Delta CDE$ pada Gambar 3.3.13.

$$\angle ABC + \angle ADC = 180° \quad ...(3.3.11)$$

$$\angle ADC + \angle CDE = 180°, \quad ...(3.3.12)$$

Maka dari persamaan (3.3.11) dan (3.3.12) diperoleh

$$\angle ABE = \angle CDE,$$

dengan $\angle ABC = \angle ABE.$

Kemudian dari segi-empat $ABCD$ dan $\Delta CDE$ pada Gambar 3.3.13 juga diperoleh

$$\angle DAB + \angle BCD = 180° \quad ...(3.3.13)$$

$$\angle BCD + \angle ECD = 180°, \quad ...(3.3.14)$$

maka dari persamaan (3.3.13) dan (3.3.14) diperoleh

$$\angle EAB = \angle ECD,$$

dengan $\angle DAB = \angle EAB.$

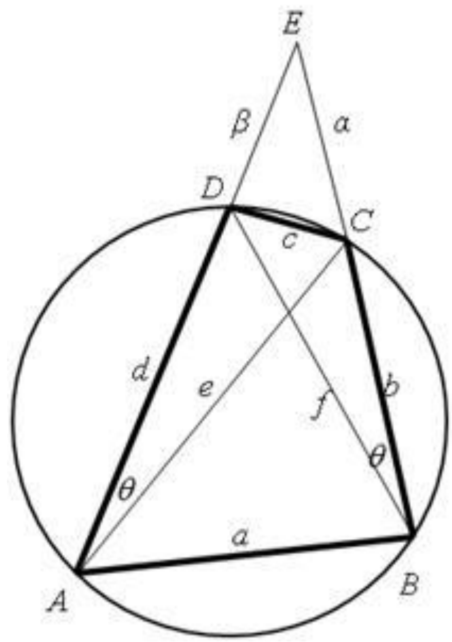
Sehingga dari kesebangunan segitiga Sd-Sd, diperoleh

$\Delta ABE \sim \Delta CDE.$

Akibatnya

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\alpha + b}{\beta} = \frac{\beta + d}{\alpha}. \qquad \text{…(3.3.15)}$$




Gambar 3.3.13.

Misalkan persamaan (3.3.15) sama dengan $\lambda$, maka diperoleh

$$\left.\begin{array}{l} a = \lambda c, \\ b = \lambda\beta - \alpha, \\ d = \lambda\alpha - \beta. \end{array}\right\} \qquad \text{…(3.3.16)}$$

Selanjutnya, perhatikan $\Delta ABC$ dan $\Delta ADC$ pada Gambar 3.3.13, diperoleh

$$\frac{e}{\sin \angle ABC} = \frac{e}{\sin \angle ADC} = 2R$$

sehingga

$$e = 2R\sin \angle ABC = 2R\sin \angle ADC. \qquad \text{…(3.3.17)}$$

Kemudian perhatikan $\Delta BAD$ dan $\Delta BCD$ pada Gambar 3.3.13, dengan cara yang sama seperti memperoleh persamaan (3.3.17) diperoleh

$$f = 2R\sin \angle BAD = 2R\sin \angle BCD.$$

Selanjutnya dari $\Delta CDE$ pada Gambar 3.3.13, dapat dibentuk suatu lingkaran luar segitiga yang menyinggung ketiga titik sudut $\Delta CDE$ dan misalkan $\rho$ adalah panjang jari-jari lingkaran luar $\Delta CDE$ . Berdasarkan Teorema 2.1.3 diperoleh

$$\frac{\alpha}{\sin\angle CDE}=\frac{\beta}{\sin\angle DCE}=\frac{c}{\sin\angle CED}=2\rho. \qquad \ldots(3.3.18)$$

Dari persamaan (3.3.18) diperoleh

$$\sin\angle CDE=\frac{\alpha}{2\rho}. \qquad \ldots(3.3.19)$$

Karena $\angle CDE$ dan $\angle ADC$ merupakan sudut berpelurus dan berdasarkan persamaan (3.3.19) diperoleh

$$\sin\angle ADC=\sin\angle CDE$$

$$\sin\angle ADC=\frac{\alpha}{2\rho}. \qquad \ldots(3.1.20)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.3.19) pada persamaan (3.3.17) diperoleh

$$e=\frac{R}{\rho}\alpha. \qquad \ldots(3.3.21)$$

Selanjutnya dengan cara yang sama seperti memperoleh persamaan (3.1.21) diperoleh

$$f=\frac{R}{\rho}\beta. \qquad \ldots(3.3.22)$$

Pada segi-empat Brahmagupta diperoleh

$$ac+bd=ef. \qquad \ldots(3.3.23)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.3.16), (3.3.21) dan (3.3.22) pada persamaan (3.3.23) diperoleh

$$\left(\frac{R}{\rho}\alpha\right)\left(\frac{R}{\rho}\beta\right)=\lambda c.c+(\lambda\beta-\alpha)(\lambda\alpha-\beta)$$

$$\frac{R^2}{\rho^2}=\frac{\lambda^2\alpha\beta-\lambda\left(\alpha^2+\beta^2-c^2\right)+\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$\frac{R^2}{\rho^2}=\lambda^2-\frac{\lambda\left(\alpha^2+\beta^2-c^2\right)}{\alpha\beta}+1. \qquad \ldots(3.3.24)$$

Dengan menggunakan aturan kosinus pada $\Delta CDE$ diperoleh

$$2\cos\angle E=\frac{\alpha^2+\beta^2-c^2}{\alpha\beta}. \qquad \ldots(3.3.25)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (3.3.25) pada persamaan (3.3.24) diperoleh

$$\frac{R^2}{\rho^2} = \lambda^2 - 2\lambda \cos\angle E + 1$$

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 = \lambda^2 - 2\lambda \cos\angle E + \cos^2\angle E + \sin^2\angle E$$

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 - (\lambda - \cos\angle E)^2 = \sin^2\angle E$$

$$\left(\frac{R}{\rho} - \lambda + \cos\angle E\right)\left(\frac{R}{\rho} + \lambda - \cos\angle E\right) = \sin^2\angle E. \qquad \ldots(3.3.26)$$

Dari persamaan (3.3.26) secara aljabar nilai $\sin\angle E$ adalah rasional atau irrasional. Padahal jika nilai $\sin\angle E$ adalah rasional maka nilai $\cos\angle E$ adalah irrasional, tapi jika nilai $\sin\angle E$ adalah irrasional maka nilai $\cos\angle E$ mungkin rasional atau irrasional. Namun, karena $\angle E$ adalah sudut Heron maka nilai $\sin\angle E$ dan $\cos\angle E$ haruslah rasional, jadi untuk memperoleh nilai rasional dari $R$ dan $\lambda$ dengan $t$ bilangan rasional berlaku

$$\frac{R}{\rho} - \lambda - \cos\angle E = t\sin\angle E \qquad \ldots(3.3.27)$$

$$\frac{R}{\rho} + \lambda + \cos\angle E = \frac{\sin\angle E}{t}. \qquad \ldots(3.3.28)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (6.1.27) dan persamaan (6.1.28) diperoleh

$$R = \frac{\rho}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\sin\angle E. \qquad \ldots(3.3.29)$$

Dari persamaan (6.1.18) diperoleh

$$2\rho\sin\angle CED = 2\rho\sin\angle E = c$$

$$\frac{c}{2} = \rho\sin\angle E. \qquad \ldots(3.3.30)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.3.30) pada persamaan (3.3.29) diperoleh

$$R = \frac{c}{4}\left(t + \frac{1}{t}\right). \qquad \ldots(3.3.31)$$

Kemudian, dengan mengurangkan persamaan (3.3.27) dari persamaan (3.3.28) diperoleh

$$2\lambda = \left(\frac{1}{t} - t\right)\sin \angle E - 2\cos \angle E$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right)\sin \angle E - \cos \angle E \qquad \ldots(3.3.32)$$

dengan $t = \tan\frac{\theta}{2}$.

Dengan mengambil

$$t_1 = \tan\frac{\angle CDE}{2} \text{ dan } t_2 = \tan\frac{\angle ECD}{2}$$

untuk sudut Heron *CDE* dan *ECD*, maka diperoleh

$$\cos \angle E = \frac{1 - \tan^2 \frac{\angle E}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\angle E}{2}}$$

$$\cos \angle E = \frac{1 - \left(\frac{1 - t_1 t_2}{t_1 + t_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1 - t_1 t_2}{t_1 + t_2}\right)^2}$$

$$\cos \angle E = \frac{(t_1 + t_2)^2 - (1 - t_1 t_2)^2}{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)} \qquad \ldots(3.3.33)$$

dan

$$\sin \angle E = \frac{2\tan\frac{\angle E}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\angle E}{2}}$$

$$\sin \angle E = \frac{2\left(\frac{1 - t_1 t_2}{t_1 + t_2}\right)}{1 + \left(\frac{1 - t_1 t_2}{t_1 + t_2}\right)^2}$$

$$\sin\angle E = \frac{2(1-t_1t_2)(t_1+t_2)}{\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)}. \qquad \ldots(6.1.34)$$

Dengan memilih $c = t\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)$, maka dari persamaan (3.3.17) dan (3.3.21) diperoleh

$$\alpha = 2\rho \sin\angle ADC. \qquad \ldots(6.1.35)$$

Karena $\angle ADC + \angle CDE = 180°$ dan berdasarkan persamaan (3.3.18) diperoleh

$$\rho = \frac{c}{2\sin\angle E},$$

sehingga persamaan (6.1.35) dapat dituliskan menjadi

$$\alpha = 2\frac{c}{2\sin\angle E}\sin(180° - \angle CDE)$$

$$\alpha = \frac{c\sin\angle CDE}{\sin\angle E}$$

$$\alpha = \frac{t\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)\dfrac{2t_1}{\left(1+t_1^2\right)}}{\dfrac{2(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}{\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)}}$$

$$\alpha = \frac{tt_1\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)^2}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}. \qquad \ldots(6.3.36)$$

Dengan cara yang sama seperti memperoleh persamaan (6.3.36) diperoleh

$$\beta = \frac{tt_2\left(1+t_1^2\right)^2\left(1+t_2^2\right)}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}. \qquad \ldots(6.3.37)$$

Berikut ini diberikan formula untuk menentukan panjang sisi dan panjang diagonal segi-empat Brahmagupta sebagai berikut.

1) *a* adalah panjang garis dari titik *A* ke titik *B*. Dengan mensubstitusikan persamaan (3.3.32), (3.3.33) dan (3.3.34) pada persamaan (3.3.16) diperoleh

$$a = \lambda c = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right)\sin\angle E - \cos\angle E\right)\left(t\left(1+t_1^2\right)\left(1+t_2^2\right)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)\frac{2(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}{(1+t_1{}^2)(1+t_2{}^2)}-\frac{(t_1+t_2)^2-(1-t_1t_2)^2}{(1+t_1{}^2)(1+t_2{}^2)}\right)\left(t(1+t_1{}^2)(1+t_2{}^2)\right)$$

$$a=(t(t_1+t_2)+(1-t_1t_2))(t_1+t_2-t(1-t_1t_2)). \qquad \ldots(6.3.38$$

2) $b$ adalah panjang garis dari titik $B$ ke titik $C$. Dengan mensubstitusikan persamaan (6.3.38), (6.3.36) dan (6.3.37) pada persamaan (3.3.16) diperoleh

$$b=\lambda\beta-\alpha$$

$$b=\frac{(t(t_1+t_2)+(1-t_1t_2))(t_1+t_2-t(1-t_1t_2))}{t(1+t_1{}^2)(1+t_2{}^2)}\frac{tt_2(1+t_1{}^2)^2(1+t_2{}^2)}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}-\frac{tt_1(1+t_1{}^2)(1+t_2{}^2)^2}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}$$

$$b=(1+t_1{}^2)(t_2-t)(1+tt_2). \qquad \ldots(6.1.39)$$

3) $c$ adalah panjang garis dari titik $C$ ke titik $D$.

$$c=t(1+t_1{}^2)(1+t_2{}^2). \qquad \ldots(6.1.40)$$

4) $d$ adalah panjang garis dari titik $D$ ke titik $A$. Dengan mensubstitusikan persamaan (6.3.38), (3.3.34) dan (6.3.37) pada persamaan (3.3.16) diperoleh

$$d=\lambda\alpha-\beta$$

$$d=\frac{(t(t_1+t_2)+(1-t_1t_2))(t_1+t_2-t(1-t_1t_2))}{t(1+t_1{}^2)(1+t_2{}^2)}\frac{tt_1(1+t_1{}^2)(1+t_2{}^2)^2}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}-\frac{tt_2(1+t_1{}^2)^2(1+t_2{}^2)}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}$$

$$d=(1+t_2{}^2)(t_1-t)(1+tt_1). \qquad \ldots(6.3.41)$$

5) $e$ adalah panjang garis dari titik $A$ ke titik $C$. Dengan mensubstitusikan persamaan (3.3.20), (3.3.31) dan (3.3.34) pada persamaan (3.3.20) diperoleh

$$e=\frac{R}{\rho}\alpha$$

$$e=\frac{(1+t_1{}^2)(1+t_2{}^2)(1+t^2)2(2(t_1+t_2)(1-t_1t_2))tt_1(1+t_1{}^2)(1+t_2{}^2)^2}{4t(1+t_1{}^2)^2(1+t_2{}^2)^2(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}$$

$$e=t_1(1+t^2)(1+t_2{}^2). \qquad \ldots(6.3.42)$$

6) $f$ adalah panjang garis dari titik $B$ ke titik $D$. Dengan mensubstitusikan persamaan (3.3.20), (3.3.31) dan (6.3.37) pada persamaan (3.3.22) diperoleh

$$f = \frac{R}{\rho}\beta$$

$$f = \frac{\left(1+t_1^{\,2}\right)\left(1+t_2^{\,2}\right)\left(1+t^2\right)2\left(2\left(t_1+t_2\right)\left(1-t_1t_2\right)\right)tt_2\left(1+t_1^{\,2}\right)^2\left(1+t_2^{\,2}\right)}{4t\left(1+t_1^{\,2}\right)^2\left(1+t_2^{\,2}\right)^2\left(t_1+t_2\right)\left(1-t_1t_2\right)}$$

$$f = t_2\left(1+t^2\right)\left(1+t_1^{\,2}\right). \qquad \ldots(6.3.43)$$

Sehingga formula untuk menentukan luas segi-empat Brahmagupta berdasarkan Gambar 9 dan dengan mensubstitusikan persamaan (6.3.38), (6.3.39), (6.3.40) dan (6.3.41) yaitu :

$$\begin{aligned}
LABCD &= L\Delta ABC + L\Delta ADC \\
&= \frac{1}{2}\left(ab+cd\right)\sin\angle ADC \\
&= \frac{1}{2}\left(ab+cd\right)\sin\angle EDC \\
&= \frac{1}{2}\Big[\left(t\left(t_1+t_2\right)+\left(1-t_1t_2\right)\right)\left(t_1+t_2-t\left(1-t_1t_2\right)\right)\left(1+t_1^{\,2}\right)\left(t_2-t\right)\left(1-tt_2\right)\Big]\frac{2t_1}{1+t_1^{\,2}} \\
&\quad + \Big[t\left(1+t_1^{\,2}\right)\left(1+t_2^{\,2}\right)^2\left(t_1-t\right)\left(1+tt_1\right)\Big]\frac{2t_1}{1+t_1^{\,2}}
\end{aligned}$$

$$LABCD = -t_1t_2\left(2t\left(1-t_1t_2\right)-\left(t_1+t_2\right)\left(1-t^2\right)\right)\left(2\left(t_1+t_2\right)t+\left(1-t_1t_2\right)\left(1-t^2\right)\right). \quad \ldots(6.3.44)$$

Formula luas pada persamaan (6.3.44) sedikit berbeda dari yang ditulis dalam berbagai buku teks lainnya. Dalam berbagai buku teks juga ditulis sebagai berikut

$$LABCD = t_1t_2\left(2t\left(1-t_1t_2\right)-\left(t_1+t_2\right)\left(1-t^2\right)\right)\left(2\left(t_1+t_2\right)t+\left(1-t_1t_2\right)\left(1-t^2\right)\right).$$

Dengan mensubstitusikan $c$ pada persamaan (3.3.31), maka berikut ini diperoleh diameter lingkaran luar segi-empat Brahmagupta

$$2R = \frac{\left(1+t_1^{\,2}\right)\left(1+t_2^{\,2}\right)\left(t^2+1\right)}{2}. \qquad \ldots(6.3.45)$$

Selanjutnya, diberikan beberapa contoh aplikasi dari formula Brahmagupta.

***Teladan* 3.3.4**. Dengan memilih $t_1 = t_2 = \dfrac{n}{m}$ dan $t = \dfrac{v}{u}$, kemudian mensubstitusikan pada persamaan (6.3.38), (6.3.39), (6.3.40), (6.3.41), (6.3.42) dan (6.3.43) diperoleh formula Brahmagupta untuk panjang sisi dan diagonal trapesium sebagai berikut.

$$a = (m^2u - n^2u + 2nmv)(2mnv - m^2v + n^2v)$$

$$b = d = (m^2 + n^2)(nu - mv)(mu + nv)$$

$$c = (m^2 + n^2)^2 uv$$

$$e = f = mn(m^2 + n^2)(u^2 + v^2).$$

Formula Brahmagupta untuk diameter dan luas trapesium yaitu :

$$2R = \frac{(m^2 + n^2)^2 (u^2 + v^2)}{2},$$

$$L = -m^2n^2\left(2vu(m^2 - n^2) - 2mn(u^2 - v^2)\right)\left(4mnvu + (m^2 - n^2)(u^2 - v^2)\right) \qquad \ldots(6.3.46)$$

Formula luas trapesium pada persamaan (6.3.46) juga dengan yang ada dalam berbagai buku teks, dalam berbagai buku teks lainnya ditulis :

$$L = 2m^2n^2(nu - mv)(mu + nv)\left((m+n)u - (m-n)v\right)\left((m+n)v - (m-n)u\right) \ldots \ (6.3.47)$$

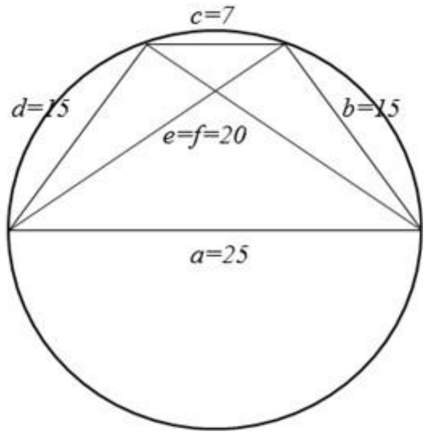
Jika formula luas pada persamaan (6.3.47) digunakan untuk menghitung nilai $L$ maka hasil perhitungannya tidak sesuai dengan hasil perhitungan pada tabel 1. Jadi penulis menggunakan formula luas pada persamaan (6.3.46) untuk menghitung nilai $L$.

Berikut diberikan Tabel hasil perhitungan untuk panjang sisi, diagonal dan luas trapesium yang diperoleh jika nilai $t_1$ dan $t$ diketahui .

**Tabel 1**. Hasil Perhitungan Contoh 1.

| $t_1 = t_2$ | *T* | *a* | *b = d* | *C* | *e = f* | *2R* | *Luas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/2 | 1/7 | 25 | 15 | 7 | 20 | 25 | 192 |
| ½ | 2/9 | 21 | 10 | 9 | 17 | 41 | 120 |
| 1/3 | 3/14 | 52 | 15 | 28 | 41 | 197 | 360 |
| 1/3 | 3/19 | 51 | 20 | 19 | 37 | 181 | 420 |
| 2/3 | 1/8 | 14 | 13 | 4 | 15 | 65/4 | 108 |
| 2/3 | 3/11 | 21 | 13 | 11 | 20 | 61 | 192 |

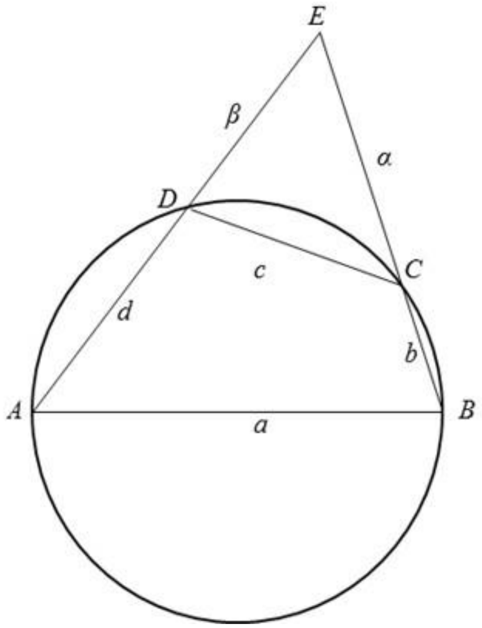
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2/3 | 9/20 | 40 | 13 | 30 | 37 | 1203/4 | 420 |
| 3/4 | 2/11 | 25 | 25 | 11 | 30 | 61 | 432 |




Gambar 3.3.14.

***Teladan* 3.3.5.** Misalkan *ECD* adalah segitiga Heron rasional dengan $c:\alpha:\beta = 14:15:13$ dan $t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = \frac{1}{2}$ dan $t_3 = \frac{4}{7}$.

***Penyelesaian :***




Gambar 3.3.15.

Dengan memisalkan $t = \frac{v}{u}$ , diperoleh formula untuk panjang sisi dan diagonal segi-empat Brahmagupta yaitu :

$$a = (7u - 4v)(4u + 7v)$$

$$b = 13(u - 2v)(2u + v)$$

$$c = 65uv$$

$$d = 5(2u - 3v)(3u + 2v)$$

$$e = 30(u^2 + v^2)$$

$$f = 26(u^2 + v^2).$$

Formula luas dan jari-jari lingkaran luar segiempat Brahmagupta yaitu:

$$L = 24\left(2u^2 + 7uv - 2v^2\right)\left(7u^2 - 8uv - 7v^2\right)$$

,

$$2R = \frac{65\left(u^2 + v^2\right)}{2}.$$

Dengan mengganti nilai $u$ dan nilai $v$ diperoleh panjang sisi, diagonal, luas dan panjang jari-jari lingkaran luar segi-empat Brahmagupta sebagai berikut.

**Tabel 2**. Hasil perhitungan contoh 2.

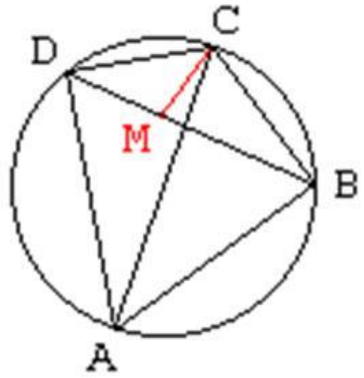
| *u* | *V* | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *2R* | *Luas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 323 | 91 | 195 | 165 | 300 | 260 | 325 | 28416 |
| 11 | 3 | 65 | 25 | 33 | 39 | 60 | 52 | 65 | 1344 |

### 3.4. Teorema Ptolemy

Teorema Ptolemy masih terkait dengan segi-empat siklik. Teorema ini membahas tentang hubungan antara jumlah dua sisi yang bersebelahan dengan hasil kali diagonal dari suatu segi-empat siklik. Teorema ini sangat mudah digunakan, misalnya untuk menentukan nilai *sin*($x$ + $y$) yang dalam buku sekolah menengah buktinya sangat panjang. Akan tetapi disini akan diberikan buktu yang cukup sederhana.

***Teorema 3.4.1* (*Teorema Ptolemy*)**

Jika *ABCD* sebarang segi-empat yang berada pada suatu lingkaran, maka jumlah dua pasang sisi yang bersebelahan adalah sama dengan hasil kali diagonalnya.




Gambar 3.4.1

***Bukti*** **:** Pada diagonal $BD$ buat titik $M$ sehingga $\angle ACB = \angle MCD$. Karena $\angle BAC$ dan $\angle BDC$ menghadap busur yang sama, maka $\angle BAC = \angle BDC$. Yang mengakibatkan $\angle DNC = \angle ABC$, jadi $\Delta ABC \sim \Delta DMC$, sehingga

$$\frac{CD}{MD} = \frac{AC}{AB}$$

Atau

$$AB.CD = AC.MD \qquad (3.4.1)$$

Selanjutnya karena

$$\angle ACB = \angle MCD, \text{ maka } \angle BCM = \angle ACD$$

dan karena

$$\angle DAC = \angle DBC = \angle MBC \text{ (menghadap busur yang sama),}$$

ini mengakibatkan $\Delta BCM \sim \Delta ACD$, sehingga

$$\frac{BC}{BM} = \frac{AC}{AD}$$

atau

$$AD.BC = AC.BM \qquad (3.4.2)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (3.4.1) dan (3.4.2) diperoleh

$$AB.CD + AD.BC = AC.MD + AC.BM = AC(MD + BM) = AC.BD \; \blacktriangledown$$

Berikut ini diberikan pola lain untuk membuktikan teorema di atas.

***Bukti 2*** : Misalkan $ABCD$ segi-empat siklik, perhatikan gambar 3.4.2 .Kontruksi $E$ sehingga $\Delta CAD \cong \Delta CEB$, yang mengakibatkan

$$\frac{CE}{CA} = \frac{CB}{CD} = \frac{BE}{DA},$$

Sehingga diperoleh

$$BE = \frac{CB \cdot DA}{CD}. \qquad (3.4.3)$$

Kita juga dapat menunjukkan bahwa

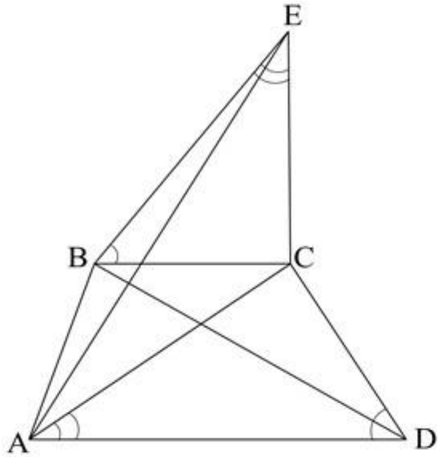
$\angle$ECA = $\angle$BCD

Sehingga didapat

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CB}{CE}$$

Kemudian tunjukkan pula bahwa $\Delta$ECA ~ $\Delta$BCD sehingga

$$\frac{EA}{BD} = \frac{CA}{CD}$$



gambar 3.4.2

jadi

$$EA = \frac{CA \cdot DB}{CD} \qquad \text{. . . . . .(3.4.4)}$$

Sebagai ingatan bahwa jika *ABCD* siklik, maka

$$\angle CBE + \angle ABC = \angle CDA + \angle ABC = 180^0.$$

Tapi jelas ini akan menyebabkan *A*, *B* dan *E* segaris yang berarti *AB* + *BA* = *AE*. Jadi dari (3.4.3) dan (3.4.4) kita peroleh

$$\frac{CA \cdot DB}{CD} = AB + \frac{CB \cdot DA}{CD}$$

Maka diperoleh

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD$$

***Teladan* 3.4.1** : Misalkan titik P berada pada busur *CD* pada lingkaran luar dari empat persegi *ABCD*, tunjukkan bahwa

$$PA(PA + PC) = PB(PB + PD)$$

***Penyelesaian*** : Perhatikan gambar 3.4.3. Misalkan panjang sisi persegi tersebut adalah *a* satuan. Selanjutnya gunakan teorema Ptolemy untuk *PDAB* maka diperoleh

$$PD \,.\, BA + PB \,.DA = PA \,.DB$$

$$a.(PD + PB) = a\sqrt{2}.PA$$

$$PD + PB = \sqrt{2}.\ PA$$

$PB.(PD + PB) = \sqrt{2}.\ PA.PB$ (3.4.5)

dan bila teorema Ptolemy digunakan pada PABC,

maka diperoleh

$PA\ .\ BC + PC\ \ AB = PB\ .\ AC.$

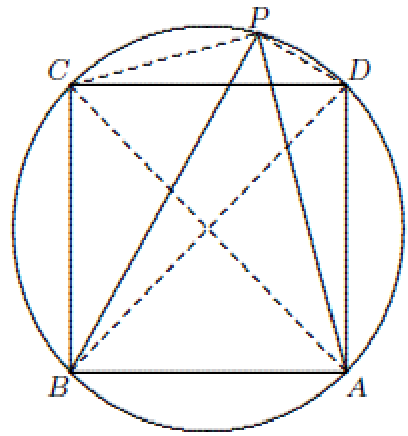
$a.(PA + PC) = a\sqrt{2a}.PB$

$PA + PC = \sqrt{2}.PB$

$PA(PA + PC) = \sqrt{2}.PB.PA$ (3.4.6)

maka dari (3.4.5) dan (3.4.6) diproleh

$PA(PA + PC) = PB.(PD + PB)$




Gambar 3.4.3

Jika segiemapat *ABCD* bukan merupakan segi-empat, maka yang berlaku adalah tanda lebih besar, seperti ditunangkan dalam teorema berikut ini :

***Teorema 3.4.2*** : Jika *ABCD* bukan segi-empat siklik, maka berlaku

$$AB.CD + AD.BC > AC.BD$$

***Bukti*** : Mialkan ABCD bukan merupakan segi-empat siklik. Dalam artian yang berlaku adalaha

$$\angle CBE + \angle ABC = \angle CDA + \angle ABC \neq 180^0.$$

Ini menyebabkan ketiga titik A, B dan E membentuk segitiga dengan $EA < AB + BE$, sehingga dari persamaa (*) dan (**) di atas diperoleh

$$\frac{CA \cdot DB}{CD} < AB + \frac{CB \cdot DA}{CD}$$

Sehingga $AB.CD + AD.BC > AC.BD.$

Berikut ini akan diberikan pengunaan teorema Ptolemy untuk membuktikan rumus *sin* (α + β) dan *sin* (α - β), untuk rumus trigonometri yang lain dapat dilakukan sebagai soal latihan.

***Teladan* 3.4.2.** Tunjukkan bahwa *sin* (α + β) = *sin* α cos β + *cos* α *sin* β

***Penyelesaian*** : Perhatikan gambar di bawah ini yang merupakan lingkaran berpusat di $O$ dan berdiameter 1 satuan. Diameter lingkaran adalah $BC$ = 1 satuan, maka $\angle BAC = \angle BDC = 90^0$. Misalkan $\angle ABC = \alpha$ dan $\angle DBC = \beta$. Maka

$$sin\,\alpha = \frac{AC}{BC}$$

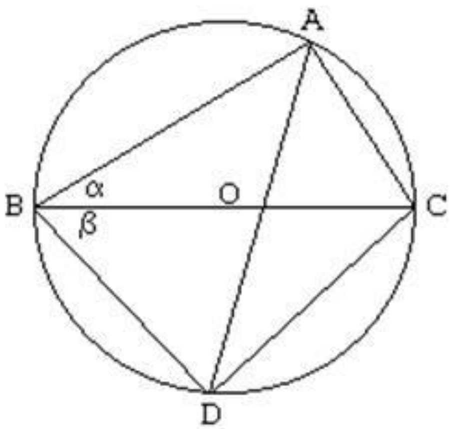
Jadi

$$AC = sin\,\alpha$$

$$AB = cos\,\alpha$$

$$BD = cos\,\beta$$

$$DC = sin\,\beta$$




Gambar 3.4.4

Kemudian dari $\dfrac{AD}{sin(\alpha+\beta)} = 2R$ maka

$$\frac{AD}{sin(\alpha+\beta)} = 2\times\frac{1}{2}$$

Maka

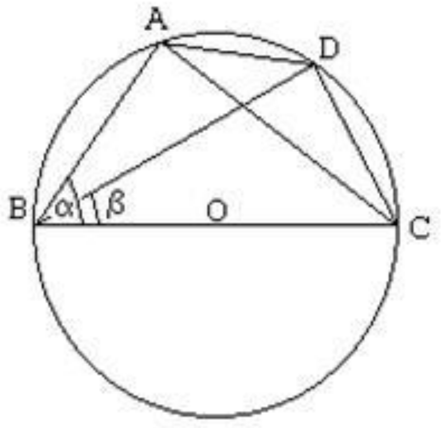
$$AD = sin\,(\alpha + \beta)$$

Jadi dengan berdasarkan Teorema Ptolemy diperoleh

$$AD.BC = AC.BD + AB.DC$$

Karena $BC$ = 1, maka $sin\,(\alpha + \beta) = sin\,\alpha\, cos\,\beta + cos\,\alpha\, sin\,\beta$ ▼

***Teladan* 3.4.3.** Tunjukkan bahwa $sin\,(\alpha - \beta) = sin\,\alpha \cos\beta - cos\,\alpha\, sin\,\beta$




Gambar 3.4.5

Sama seperti contoh teladan 3.4.2 diperoleh

$BC = 1$

$AB = \cos \alpha$

$AC = \sin \alpha$

$BD = \cos \beta$

$DC = \sin \beta$

$AD = \sin (\alpha - \beta)$

Maka berdasarkan teorema Ptolemy diperoleh

$$AC.BD = AD.BC + AB.DC$$

$$\sin \alpha . \cos \beta = \sin (\alpha - \beta).1 + \cos \alpha . \sin \beta$$

Jadi

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha . \cos \beta - + \cos \alpha . \sin \beta \quad \blacktriangledown$$

Kalau pada teoema Brahmagupta adalah untuk menentukan sebarang luas segi-empat. Sedang kan kalau sisi-sisi dari segi-empat tersebut diketahui, maka secara umum akan dapat ditentukkan panjang diagonal dari segi-empat tersebut. Akan tetapi berikut ini akan diberikan teoema khusus untuk membahas panjang diagonal dari segi-empat tali busur.

***Teorema 3.4.3*** : Diketahui tahui segi-empat talibusur *ABCD* dengan panjang $AB = a$ cm, $BC = b$ cm dan $CD = c$ cm serta $DA = d$ cm. Jika $p$ dan $q$ masing-masing menyatakan panjang diagonal *AC* dan *BD*, Maka

$$\frac{p}{q} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$$

***Bukti*** : Dengan menggunakan rumus aturan cosinus pada $\Delta ABC$ dan $\Delta ADC$ diperoleh

$p^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle B$

$p^2 = c^2 + d^2 - 2ad \cos \angle D$

$= c^2 + d^2 - 2ad\ cos\ \angle B$

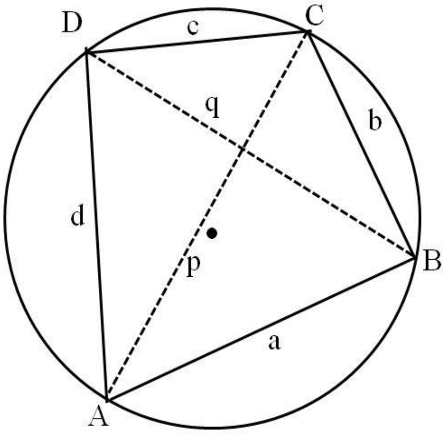
Berdasarkan kedua persamaan diperoleh

$a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \angle B = c^2 + d^2 - 2ad\ cos\ \angle B$

jadi

$$cos\ \angle B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

Gantikan $cos\ \angle B$ pada persamaan di atas, maka diproleh




gambar 3.4.6

$$p^2 = a^2 + b^2 - 2ab\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)$$

$$= \frac{2ab\ (a^2+b^2) + 2cd\ (a^2+b^2) - ab\ (a^2+b^2) + 2cd(c^2+c^2)}{2(ab+cd)}$$

$$= \frac{2a^2cd + 2b^2cd + 2abc^2 + 2abd^2}{2(ab+cd)}$$

$$= \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}$$

Dengan cara yang serupa dengan yang di atas, akan diperoleh

$$cos\ \angle A = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

$$q^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$$ ♥

Perhatikan bahwa dengan menggunakan $p^2$ dan $q^2$ di atas, maka kita akan mendapatkan panjang hasil kali diagonal dan hasil bagi diagonal yaitu sebagai berikut

$$pq = ac + bd \qquad (3.4.7)$$

$$\frac{p}{q} = \frac{ad+bc}{ab+cd} \qquad (3.4.8)$$

Rumus (3.4.7) dan (3.4.8) di atas sering dikenal dengan rumus Ptolemaeus. Berikut ini akan diberikan cara pembuktian lain dari teorema Ptolemaeus yaitu dengan menggunakan kesebangunan.

***Teorema 3.4.4.*** : Pada segi-empat talibusur berlaku prekalian diagonal segi-empat tali busur sama dengan jumlah perkalian sisi yang berhadapan.

***Bukti*** : Perhatikan kembali gambar 6.4.6. akan dibuktikan

$$pq = ac + bd \text{ atau } p = \frac{ac}{q} + \frac{bd}{q}$$

Misalkan $x = \frac{ac}{q}$ dan $y = \frac{bd}{q}$, jadi kita mesti membagi diagonal p menjadi dua bahagian garis yang masing-masing panjangnya *x* dan *y*.

Sekarang perhatikan

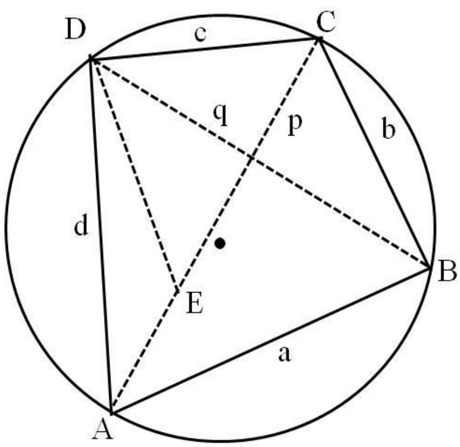
$$x = \frac{ac}{q} \text{ atau } q : a = c : x$$

perhatikan gambar 3.4.7, sisi q dan a terletak pada $\Delta ABD$ dan mereka membentuk $\angle ABD$. Perhatikan juga bahwa $\angle ABD = \angle ACD$.

Misalkan $CE = x$, sehingga jika kita letakkan $\angle BAD$ pada $\angle E$, sehingga $\angle CED = \angle BAD$ atau $\angle ADB = \angle CDE$, maka $\Delta ABD \sim \Delta CDE$.

Akibatnya

$$\frac{q}{c} = \frac{a}{x} \text{ atau } x = \frac{ac}{q}.$$



gambar 3.4.7

Sekarang perhatikan $\Delta BDC$ dan $\Delta AED$.

$\angle CAD = \angle DBC$ dan $\angle ADE = \angle BDC$. jadi $\Delta BDC \sim \Delta AED$, akibatnya

$$\frac{AE}{b} = \frac{d}{q} \text{ atau } AE = \frac{bd}{q} = y$$

Karena $CE = x$ dan $AE = y$, maka $AC = x + y$ atau

$$p = \frac{ac}{q} + \frac{bd}{q}$$ ♥

Kalau kita perhatikan, proses pembuktian teoema Ptolemaeus di atas cukup rumit. Sebenarnya kita membuktikan dengan cara yang lebih sederhana yaitu cukup dengan rumus-rumus yang ada dalam segitiga yang lebih sederhana. Kita suah mengenal bahwa $R$ adalah jari-jari lingkaran luar yang pada prinsipnya jari-jari lingkaran luar tersebut adalah perkalian ketiga sisi dibagi dengan 4 kali luas segi tiga. Maka dalam hal ini untuk gambar 3.4.6 atau 6.4.7 akan berlaku :

$$abp = 4R \times \mathrm{L}\Delta ABC$$

$$cdp = 4R \times \mathrm{L}\Delta ADC$$

dengan $R$ merupakan jari-jari lingkaran luarnya. Maka dari kedua persamaan di atas kalau dijumlahkan akan diperoleh

$$(ab + cd).p = 4R \times \text{Luas } \square\, ABCD \qquad (3.4.9)$$

Dengan cara yang serupa dengan langkah di atas, akan diperoleh

$$adq = 4R \times L\Delta ABD$$

$$bcq = 4R \times L\Delta BDC$$

jumlah keduanya akan memberikan

$$(ad + bc).q = 4R \times \text{Luas } \square\, ABCD \qquad (3.4.10)$$

Dari persamaan (3.4.9) dan (3.4.10) akan diperoleh

$$(ad + cd).p = (ad + bc).q$$

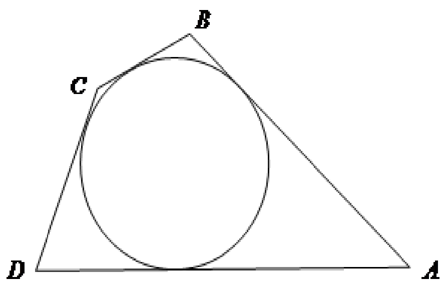
Atau

$$p = \frac{ac}{q} + \frac{bd}{q}$$

Para pembaca dapat membandingkan tingkat kesulitan dari kedua proses pembuktian yang diberikan di atas, kalau cara pertama itu adalah cara yang banyak dimuat dalam berbagai buku teks. Bandingkanlah dengan proses pembuktian cara kedua (terakhir), kami yakin proses pembuktian ke dua ini jauh lebih mudah untuk dipahami. Ide seperti di atas sekali lagi sebenarnya memberikan inspirasi kepada kita, pada dasarnya teorema-teorema yang ada dalam geometri tersebut banyak yang dapat kita buktikan dengan hanya menggunakan matematika yang lebih sederhana.

Di atas sudah diberikan tentang segi-empat siklik yang sering juga disebut dengan segi-empat talibusur (dalam artian segi-empat tersebut mempunyai lingkaan luar. berikut ini akan dibahas suatu segi-empat yang mempunyai lingkaran dalam, artinya ke empat sisi dari segi-empat tersebut menyinggung lingkaran dalamnya hal ini yang disebut dengan segi-empat *Circumscriptible.*

**Definisi 3.4.1** Segi-empat *Circumscriptible* adalah segi-empat yang memuat sebuah lingkaran dalam ( *Incircle of the Quadrilateral* ) sehingga menyinggung keempat sisi segi-empat.



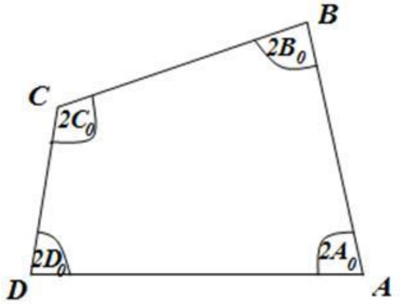
Gambar 3.4.8

Sebagaimana yang telah disebutkan pada bagian terdahulu bahwa tidak semua segi-empat adalah *Circumscriptible*. Oleh karena itu, agar suatu segi-empat menjadi *Circumscriptible* maka tentulah memerlukan syarat tertentu.

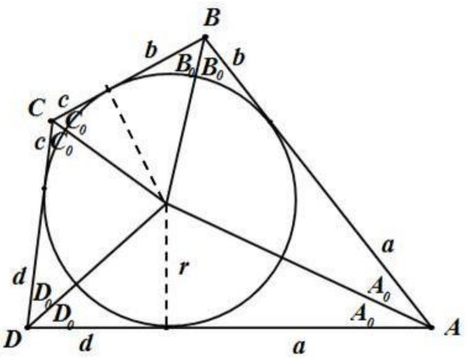
Berikut ini diberikan teorema yang menunjukkan syarat untuk suatu segi-empat agar menjadi *Circumscriptible*. Sedangkan syarat perlu dan cukup agar suatu segi-empat merupakan segi-empat *Circumscriptible* telah dibahas pada teorema 5.1.7. sedangkan segi-empat *Circumscriptible* adalah konvek telah dibahas pada teorema 5.1.7. Selanjutnya, dibahas hubungan antara panjang diagonal dengan panjang garis singgung pada segi-empat Bisentrik. Adapun hubungan tersebut dinyatakan dalam bentuk teorema yang mana dalam pembuktiannya menggunakan 3 buah lemma. Adapun teorema tersebut beserta pembuktiannya diberikan dibagian akhir dari bab ini. Pada lemma dibawah ini menyatakan adanya hubungan antara segi-empat Bisentrik dengan panjang garis singgung dari titik sudutnya.

**Lema 3.4.1** Misalkan *ABCD* adalah segi-empat *Circumscriptible* dengan panjang garis singgung dari titik sudut $A, B, C$ dan *D* berturut-turut adalah *a*, *b*, *c* dan *d*, dan *r* adalah jari-jari lingkaran dalamnya. Segi-empat *ABCD* adalah Siklik jika dan hanya jika $ac = bd$.

**Bukti.** Diberikan sebarang segi-empat Konveks *ABCD* yang mana besar sudut *A, B, C* dan *D* berturut-turut adalah $2A_0, 2B_0, 2C_0$ dan $2D_0$ ( lihat gambar 3.4.8 ). Karena *ABCD* adalah Konveks, maka berlaku $2A_0, 2B_0, 2C_0$ dan $2D_0$ kurang dari $180^0$ sehingga $A_0, B_0, C_0$ dan $D_0$ kurang dari $90^0$. Dengan demikian $A_0, B_0, C_0$ dan $D_0$ adalah sudut lancip.



Gambar 3.4.8



Gambar 3.4.9

Misalkan segi-empat Konveks *ABCD* tersebut adalah *Circumscriptible* dengan panjang garis singgung dari titik sudut *A, B, C* dan *D* berturut-turut adalah *a, b, c* dan *d,* dan *r* adalah jari-jari lingkaran dalamnya. Lihat gambar 3.4.9.

Pada gambar 3.4.9, diperoleh

$$\tan A_0 = \frac{r}{a},\ \tan B_0 = \frac{r}{b}$$

$$\tan C_0 = \frac{r}{c} \text{ dan } \tan D_0 = \frac{r}{d}. \qquad \ldots(3.4.11)$$

Maka

$$\tan A_0 \tan C_0 = \frac{r}{a}\frac{r}{c}$$

$$= \frac{r^2}{ac} \qquad \ldots(3.4.12)$$

dan

$$\tan B_0 \tan D_0 = \frac{r}{b}\frac{r}{d}$$

$$= \frac{r^2}{bd}. \qquad \ldots(3.4.13)$$

Berdasarkan 3.4.12 dan 3.4.13, Bila ditunjukkan $\tan A_0 \tan C_0 = \tan B_0 \tan D_0$ maka mestilah berlaku $ac = bd$.

Oleh karena itu, untuk membuktikan segi-empat $ABCD$ adalah Siklik jika dan hanya jika $ac = bd$, maka cukup ditunjukkan bahwa segi-empat $ABCD$ adalah Siklik jika dan hanya jika $\tan A_0 \tan C_0 = \tan B_0 \tan D_0$. Kemudian dengan mensubtitusi persamaan (3.4.11), diperoleh $ac = bd$. Misalkan $ABCD$ adalah Siklik. Akan ditunjukkan bahwa (lihat gambar 3.4.10).

$$\tan A_0 \tan C_0 = \tan B_0 \tan D_0.$$

Karena $ABCD$ adalah Siklik, berdasarkan Teorema 2.3.8,

$$2A_0 + 2C_0 = 2B_0 + 2D_0 = 180^0$$

$$A_0 + C_0 = B_0 + D_0 = 90^0.$$

Maka

$$tan(A_0 + C_0) = tan(B_0 + D_0) = tan90^0.$$

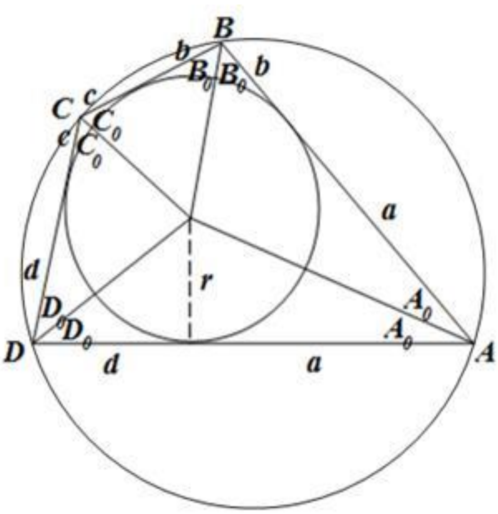
$\ldots(3.4.14)$

Dari persamaan 6.4.14 diperoleh

$$\tan(A_0 + C_0) = \frac{\tan A_0 + \tan C_0}{1 - \tan A_0 \tan C_0} = \tan 90^0$$

dan

$$\tan(B_0 + D_0) = \frac{\tan B_0 + \tan D_0}{1 - \tan B_0 \tan D_0} = \tan 90^0.$$




Gambar 3.4.10

Karena $\tan 90^0$ tidak terdefinisi, maka haruslah

$$\tan A_0 \tan C_0 = 1 \qquad \ldots(3.4.15)$$

dan

$$\tan B_0 \tan D_0 = 1. \qquad \ldots(3.4.16)$$

Dari persamaan 6.4.15 dan 6.4.16, disimpulkan bahwa

$$\tan A_0 \tan C_0 = \tan B_0 \tan D_0$$

$$\frac{r}{a}\frac{r}{c} = \frac{r}{b}\frac{r}{d}$$

$$ac = bd.$$

Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa jika *ABCD* tidak Siklik maka

$$\tan A_0 \tan C_0 \neq \tan B_0 \tan D_0$$

(pernyataan ini setara dengan pernyataan jika

$$\tan A_0 \tan C_0 = \tan B_0 \tan D_0$$

maka segi-empat *ABCD* adalah Siklik). Misalkan *ABCD* tidak Siklik. Lihat gambar 3.4.11.

Berdasarkan Teorema 5.1.8,

$2A_0 + 2C_0 \neq 180^0$ dan

$2B_0 + 2D_0 \neq 180^0$ . Sehingga terdapat dua kemungkinan yaitu

$$180^0 < 2A_0 + 2C_0 < 360^0$$

dan

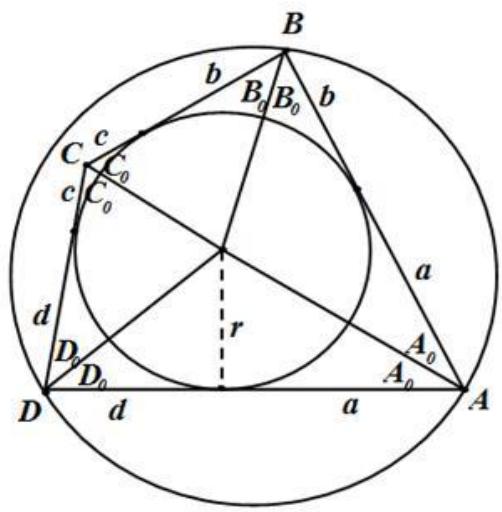
$$0^0 < 2B_0 + 2D_0 < 180^0$$

atau

$$0^0 < 2A_0 + 2C_0 < 180^0$$

dan

$$180^0 < 2B_0 + 2D_0 < 360^0.$$




Gambar 3.4.11

Jika

$$180^0 < 2A_0 + 2C_0 < 360^0$$

Dan

$$0^0 < 2B_0 + 2D_0 < 180^0,$$

maka

$$90^0 < A_0 + C_0 < 180^0$$

dan

$$0^0 < B_0 + D_0 < 90^0 \ .$$

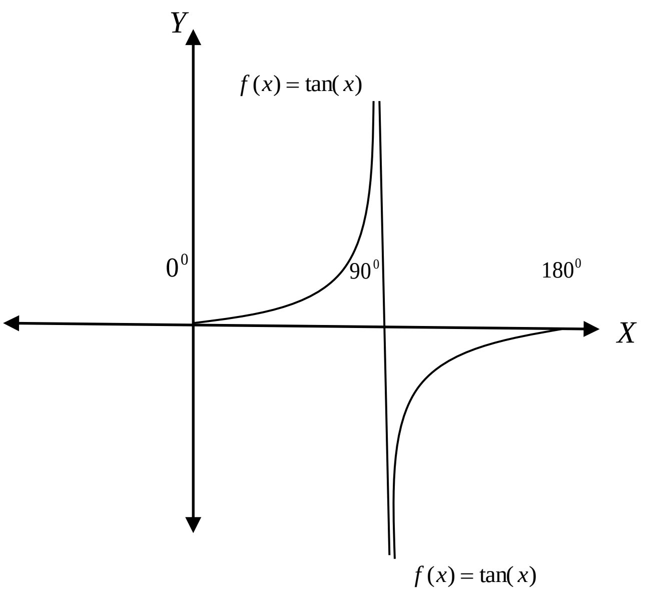
Karena $90^0 < A_0 + C_0 < 180^0$ dan fungsi tangen monoton naik tegas di $(90^0, 180^0]$ ( lihat gambar 3.4.12 ),

maka

$$\tan(A_0 + C_0) < \tan 180^0 .$$

Sehingga

$$\tan(A_0 + C_0) = \frac{\tan A_0 + \tan C_0}{1 - \tan A_0 \tan C_0} < 0 .$$




Gambar 3.4.12

Tetapi, karena $A_0$ dan $C_0$ adalah sudut lancip maka $\tan A_0 > 0$ dan $\tan C_0 > 0$. Akibatnya, $\tan A_0 + \tan C_0 > 0$. Dengan demikian, agar

$$\frac{\tan A_0 + \tan C_0}{1 - \tan A_0 \tan C_0} < 0$$

maka haruslah $1 - \tan A_0 \tan C_0 < 0$. Sehingga $\tan A_0 \tan C_0 > 1$.

Selain itu, karena $0^0 < B_0 + D_0 < 90^0$ dan fungsi tangen juga monoton naik tegas di $[0^0, 90^0)$ maka $\tan 0^0 < \tan(B_0 + D_0)$. Sehingga

$$0 < \frac{\tan B_0 + \tan D_0}{1 - \tan B_0 \tan D_0}.$$

Tetapi, karena $B_0$ dan $D_0$ adalah sudut lancip maka $\tan B_0 > 0$ dan $\tan D_0 > 0$. Akibatnya, $\tan B_0 + \tan D_0 > 0$. Oleh karena itu, agar

$$0 < \frac{\tan B_0 + \tan D_0}{1 - \tan B_0 \tan D_0},$$

maka haruslah $1 - \tan B_0 \tan D_0 > 0$. Sehingga $\tan B_0 \tan D_0 < 1$. Dengan demikian, disimpulkan bahwa $\tan A_0 \tan C_0 \neq \tan B_0 \tan D_0$. Maka berlaku $ac \neq bd$. Dengan cara yang serupa untuk kasus $0^0 < 2A_0 + 2C_0 < 180^0$ dan $180^0 < 2B_0 + 2D_0 < 360^0$, maka berturut turut diperoleh $\tan A_0 \tan C_0 < 1$ dan $\tan B_0 \tan D_0 > 1$. sehingga, disimpulkan juga $\tan A_0 \tan C_0 \neq \tan B_0 \tan D_0$. Maka berlaku $ac \neq bd$. ♥

Selanjutnya, diberikan sebuah lemma yang menunjukkan hubungan antara jari-jari lingkaran dalam dengan panjang garis singgung pada segi-empat *Circumscriptible.*

***Lema 3.4.2*** Misalkan *ABCD* adalah segi-empat *Circumscriptible* dengan panjang garis singgung dari titik sudut $A, B, C$ dan $D$ berturut-turut adalah $a$, $b$, $c$ dan $d$, dan $r$ adalah jari-jari lingkaran dalamnya. Jari-jari lingkaran dalam dapat dinyatakan dalam bentuk

$$r^2 = \frac{bcd + acd + abd + abc}{a + b + c + d}.$$

***Bukti.*** Misalkan $ABCD$ adalah segi-empat yang mana besar sudut $A$, $B$, $C$ dan $D$ berturut-turut adalah $2A_0,\ 2B_0,\ 2C_0$ dan $2D_0$ ( lihat gambar 20 ), dan misalkan

$$\alpha = \tan A_0\,,\ \beta = \tan B_0\,,\ \gamma = \tan C_0\ \text{ dan }\ \delta = \tan D_0.$$

Misalkan juga

$$\varepsilon_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$\varepsilon_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\delta + \gamma\delta$$

$$\varepsilon_3 = \alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta + \alpha\beta\delta$$

$$\varepsilon_4 = \alpha\beta\gamma\delta.$$

$$\tan(A_0 + B_0 + C_0 + D_0) = \frac{\tan(A_0 + B_0) + \tan(C_0 + D_0)}{1 - \tan(A_0 + B_0)\cdot\tan(C_0 + D_0)}$$

$$= \frac{\dfrac{\tan A_0 + \tan B_0}{1 - \tan A_0\cdot\tan B_0} + \dfrac{\tan C_0 + \tan D_0}{1 - \tan C_0\cdot\tan D_0}}{1 - \dfrac{\tan A_0 + \tan B_0}{1 - \tan A_0\cdot\tan B_0}\cdot\dfrac{\tan C_0 + \tan D_0}{1 - \tan C_0\cdot\tan D_0}}$$

$$= \frac{\dfrac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta} + \dfrac{\gamma + \delta}{1 - \gamma\delta}}{1 - \dfrac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}\cdot\dfrac{\gamma + \delta}{1 - \gamma\delta}}$$

$$= \frac{(1 - \gamma\delta)(\alpha + \beta) + (1 - \alpha\beta)(\gamma + \delta)}{(1 - \gamma\delta)(1 - \alpha\beta) - (\alpha + \beta)(\gamma + \delta)}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta + \delta + \gamma) - (\alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta + \alpha\beta\delta)}{1 - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\delta + \gamma\delta) + \alpha\beta\delta\gamma}.$$

$$\tan(A_0 + B_0 + C_0 + D_0) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4} \qquad \ldots 3.4.17$$

Pada sebarang segi-empat, jumlah keempat sudutnya sama dengan $360^0$. Karena besar sudut segi-empat *ABCD* adalah $2A_0,\ 2B_0,\ 2C_0$ dan $2D_0$, maka :

$$2A_0 + 2B_0 + 2C_0 + 2D_0 = 360^0.\ \text{Sehingga}\ A_0 + B_0 + C_0 + D_0 = 180^0.$$

Oleh karena itu, berdasarkan persamaan 6.4.17 diperoleh

$$\tan 180^0 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4}$$

$$0=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{1-\varepsilon_2+\varepsilon_4}$$

Pada pembuktian Lema 6.4.1, telah ditunjukkan bahwa :

a) Jika $A_0+C_0=B_0+D_0=90^0$, maka $\alpha\gamma=\beta\delta=1$ .

b) Jika $90^0<A_0+C_0<180^0$ dan $0^0<B_0+D_0<90^0$, maka $\alpha\gamma>1$ dan $\beta\delta<1$.

c) Jika $0^0<A_0+C_0<90^0$ dan $90^0<B_0+D_0<180^0$, maka $\alpha\gamma<1$ dan $\beta\delta>1$.

Berikut ini, menggunakan ketiga hasil tersebut akan ditunjukkan bahwa $\varepsilon_2-\varepsilon_4\neq 1$.

**Kasus 1.**

Jika $\alpha\gamma=\beta\delta=1$, maka
$$\begin{aligned}\varepsilon_2-\varepsilon_4&=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta-\alpha\beta\gamma\delta\\&=\alpha\beta+1+\alpha\delta+\beta\gamma+1+\gamma\delta-1\cdot 1\\&=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+1.\end{aligned}$$

Karena $A_0, B_0, C_0$ dan $D_0$ sudut lancip maka berlaku $\alpha+\gamma>0$ dan $\beta+\delta>0$.

Akibatnya

$$\varepsilon_2-\varepsilon_4=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+1>1.$$

**Kasus 2.**

Jika $\alpha\gamma>1$ dan $\beta\delta<1$, maka
$$\begin{aligned}\varepsilon_2-\varepsilon_4&=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta-\alpha\beta\gamma\delta\\&=\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+\alpha\gamma(1-\beta\delta)\\&>\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+(1-\beta\delta)\\&=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+1\\&>1.\end{aligned}$$

**Kasus 3.**

Jika $\alpha\gamma<1$ dan $\beta\delta>1$, maka
$$\begin{aligned}\varepsilon_2-\varepsilon_4&=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta-\alpha\beta\gamma\delta\\&=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\gamma\delta+\beta\delta(1-\alpha\gamma)\\&>\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\gamma\delta+(1-\alpha\gamma)\\&=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+1\end{aligned}$$

$$>1.$$

Dari kasus 1, 2 dan 3 dapat disimpulkan bahwa $\varepsilon_2 - \varepsilon_4 \neq 1$. Sehingga pada persamaan

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4} = 0 \text{ haruslah. } \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = 0.$$

Dengan demikian,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\delta + \beta\delta\gamma + \alpha\beta\delta. \qquad \ldots 3.4.18$$

Misalkan segi-empat *ABCD* tersebut adalah *Circumscriptible*. Maka persamaan (3.4.11 ) berlaku. Jika persamaan (3.4.11 ) disubtitusikan ke persamaan (3.4.18 ) maka diperoleh

$$r^2 = \frac{bcd + acd + abd + abc}{a + b + c + d}. \qquad \heartsuit$$

Berikut ini diberikan sebuah lemma yang menunjukkan hubungan antara panjang diagonal dengan panjang garis singgung pada segi-empat *Circumscriptible*. Adapun dalam pembuktiannya menggunakan Lemma 3.4.2.

***Lema 3.4.3*** Misalkan *ABCD* adalah segi-empat *Circumscriptible* dengan panjang diagonal *AC* dan *BD* berturut-turut adalah *u* dan *v*. Misalkan juga panjang garis singgung dari titik sudut $A, B, C$ dan *D* berturut-turut adalah *a*, *b*, *c* dan *d*. Panjang diagonal-diagonal segi-empat *ABCD* dapat dinyatakan dalam bentuk

$$v^2 = \frac{b+d}{a+c}((a+c)(b+d) + 4ac) \text{ dan } u^2 = \frac{a+c}{b+d}((a+c)(b+d) + 4bd).$$

***Bukti.*** Misalkan $ABCD$ adalah segi-empat yang mana besar sudut *A*, *B*, *C* dan *D* berturut-turut adalah $2A_0$, $2B_0$, $2C_0$ dan $2D_0$.

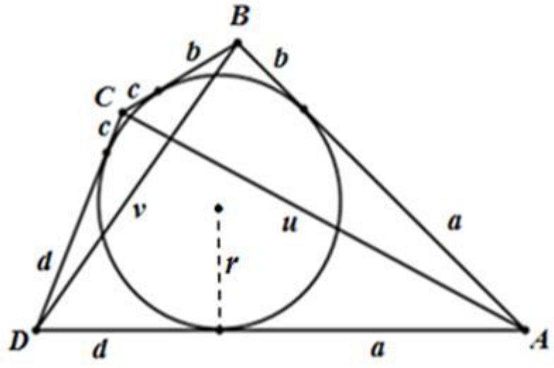
perhatikan

$$\cos 2A_0 = \cos^2 A_0 - \sin^2 A_0$$

$$= \frac{\cos^2 A_0 - \sin^2 A_0}{\cos^2 A_0} \cdot \cos^2 A_0$$

$$= (1-\tan^2 A_0)\cdot\frac{1}{\sec^2 A_0}$$

$$\cos 2A_0 = \frac{1-\tan^2 A_0}{1+\tan^2 A_0}.$$




Gambar 3.4.13

…( 3.4.19 )

Misalkan segi-empat $ABCD$ tersebut adalah *Circumscriptible* dengan panjang diagonal $AC$ dan $BD$ berturut-turut adalah $u$ dan $v$. Misalkan juga panjang garis singgung dari titik sudut $A, B, C$ dan $D$ berturut-turut adalah $a$, $b$, $c$ dan $d$, dan $r$ adalah jari-jari lingkaran dalamnya (lihat gambar 3.4.11). Maka persamaan ( 3.4.11 ) berlaku. Jika persamaan (3.4.11 ) disubtitusikan ke persamaan ( 3.4.19 ) maka diperoleh

$$\cos 2A_0 = \frac{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{a^2+r^2}{a^2-r^2}. \qquad \text{…(3.4.20)}$$

Menggunakan Lemma 3.4.3 pada persamaan 3.4.20, maka diperoleh

$$\cos 2A_0 = \frac{a^2 - \left(\frac{bcd+acd+abd+abc}{a+b+c+d}\right)}{a^2 + \left(\frac{bcd+acd+abd+abc}{a+b+c+d}\right)}$$

$$= \frac{a^2(a+b+c+d)-(bcd+acd+abd+abc)}{a^2(a+b+c+d)+(bcd+acd+abd+abc)}$$

$$= \frac{a^2(a+b+c+d) - (bcd+acd+abd+abc)}{(a+b)(a+c)(a+d)}. \qquad \ldots(3.4.21)$$

Dengan cara yang serupa diperoleh

$$\cos 2D_0 = \frac{d^2(a+b+c+d) - (bcd+acd+abd+abc)}{(b+d)(a+d)(c+d)}. \qquad \ldots(3.4.22)$$

Selanjutnya, menggunakan aturan Kosinus pada $\Delta BAD$ dan $\Delta ACD$ yang berada pada segi-empat *Circumscriptible ABCD* (lihat gambar 3.4.11), maka berturut-turut diperoleh

$$v^2 = (a+b)^2 + (a+d)^2 - 2(a+b)(a+d)\cos 2A_0 \qquad \ldots(3.4.23)$$

dan

$$u^2 = (a+d)^2 + (c+d)^2 - 2(a+d)(c+d)\cos 2D_0. \qquad \ldots(3.4.24)$$

Dengan mensubtitusi persamaan (3.4.11) ke persamaan (3.4.13), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
v^2 &= (a+b)^2 + (a+d)^2 - 2(a+b)(a+d)\cos 2A_0 \\
&= (a+b)^2 + (a+d)^2 - 2(a+b)(a+d)[a^2(a+b+c+d) - (bcd+acd \\
&\quad + abd+abc)]/(a+b)(a+c)(a+d) \\
&= (a+b)^2 + (a+d)^2 - \frac{2}{a+c}[a^2(a+b+c+d) - (bcd+acd+abd+abc)] \\
&= ((a+c)[a^2+2ab+b^2+a^2+2ad+d^2] - 2[a^3+a^2b+a^2c+a^2d \\
&\quad -(bcd+acd+abd+abc)])/(a+c) \\
&= ((a+c)[b^2+d^2+2bd-2bd+2a^2+2ab+2ad] - 2[a^3+a^2b \\
&\quad +a^2c+a^2d-(bcd+acd+abd+abc)])/(a+c) \\
&= ((a+c)(b+d)^2 + 2(a+c)(-bd+a^2+ab+ad) - 2[a^3+a^2b+a^2c \\
&\quad +a^2d-(bcd+acd+abd+abc)])/(a+c) \\
&= ((a+c)(b+d)^2 + 2(-abd+a^3+a^2b+a^2d-bcd+a^2c+abc+acd \\
&\quad -a^3-a^2b-a^2c-a^2d+bcd+acd+abd+abc))/(a+c)
\end{aligned}$$

$$= \frac{(a+c)(b+d)^2 + 2(2abc + 2acd)}{a+c}$$

$$= \frac{(a+c)(b+d)^2 + 4ac(b+d)}{a+c}$$

$$v^2 = \frac{b+d}{a+c}\left((a+c)(b+d) + 4ac\right).$$

Dengan mensubtitusi persamaan (3.4.22) ke persamaan (3.4.24) maka diperoleh

$$u^2 = (a+d)^2 + (c+d)^2 - 2(a+d)(c+d)\cos 2D_0$$

$$= \left(a+d\right)^2 + (c+d)^2 - 2(a+d)(c+d)[d^2(a+b+c+d) - (bcd + acd$$

$$+ abd + abc)]/(b+d)(a+d)(c+d)$$

$$u^2 = (a+d)^2 + (c+d)^2 - \frac{2}{b+d}[d^2\left(a+b+c+d\right) - (bcd + acd + abd + abc)]$$

$$= ((b+d)[a^2 + 2ad + d^2 + c^2 + 2cd + d^2] - 2[d^3 + d^2b + d^2c + a^2d$$

$$-(bcd + acd + abd + abc)])/(b+d)$$

$$= ((b+d)[a^2 + c^2 + 2ac - 2ac + 2d^2 + 2ad + +2cd] - 2[d^3 + d^2a$$

$$+ d^2b + d^2c - (bcd + acd + abd + abc)])/(b+d)$$

$$= ((b+d)(a+c)^2 + 2(b+d)(-ac + d^2 + ad + cd) - 2[d^3 + d^2a + d^2b$$

$$+ d^2c - (bcd + acd + abd + abc)])/(b+d)$$

$$= ((b+d)(a+c)^2 + 2(-abc + d^3 + cd^2 + bcd + ad^2 + bd^2 + abd - acd$$

$$- d^3 - d^2b - d^2c - d^2a + bcd + acd + abd + abc))/(b+d)$$

$$= \frac{(b+d)(a+c)^2 + 2(2abd + 2bcd)}{b+d}$$

$$= \frac{(b+d)(a+c)^2 + 4bd(a+c)}{b+d}$$

$$u^2 = \frac{a+c}{b+d}\left((a+c)(b+d) + 4bd\right). \qquad \heartsuit$$

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang menyatakan adanya hubungan antara panjang diagonal dengan panjang garis singgung pada segi-empat Bisentrik. Pada prinsipnya pada teorema 3.4.3 sudah diberikan hubungan antara perbandingan panjang diagonal tersebut untuk segi-empat siklik (tali busur), berikut ini diberikan lagi hubungan yang sama, akan tetapi diberlakukan untuk segi-empat *Circumscriptible* dan menjadi syarat perlu dan cukup untuk segi-empat siklik. Berikut teorema yang dimaksud.

***Teorema 3.4.5*** Misalkan *ABCD* adalah segi-empat *Circumscriptible* dengan panjang diagonal *AC* dan *BD* berturut-turut adalah $u$ dan $v$. Misalkan juga panjang garis singgung dari titik sudut $A, B, C$ dan $D$ berturut-turut adalah $a$, $b$, $c$ dan $d$ ( lihat gambar 3.4.11 ). Segi-empat *ABCD* adalah Siklik jika dan hanya jika $\frac{u}{v} = \frac{a+c}{b+d}$.

Menggunakan Lema 3.4.1 dan 3.4.2, diberikan pembuktian singkat dari Teorema 3.4.5 berikut ini.

**Bukti.** $\Rightarrow$. Misalkan segi-empat *ABCD* adalah *Circumscriptible.* Akan ditunjukkan bahwa jika segi-empat *ABCD* adalah Siklik maka $\frac{u}{v} = \frac{a+c}{b+d}$. Misalkan segi-empat *ABCD* adalah Siklik. Berdasarkan Lema 6.4.1, berlaku

$$ac = bd\,.$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan 4, kemudian ditambahkan dengan $(a+c)(b+d)$ maka diperoleh

$$(a+c)(b+d) + 4ac = (a+c)(b+d) + 4bd$$

Menggunakan Lema 6.4.3, maka diperoleh

$$\frac{v^2(a+c)}{b+d} = \frac{u^2(b+d)}{a+c}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{a+c}{b+d}\,.$$

$\Leftarrow$. Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa jika $\frac{u}{v} = \frac{a+c}{b+d}$ maka *ABCD* adalah Siklik. Misalkan

$$\frac{u}{v}=\frac{a+c}{b+d}.$$

Jika kedua ruas dikuadratkan maka diperoleh

$$\frac{v^2(a+c)}{b+d}=\frac{u^2(b+d)}{a+c}.$$

Menggunakan Lemma 6.3.4, maka diperoleh

$$(a+c)(b+d)+4ac=(a+c)(b+d)+4bd$$

$$ac=bd.$$

Berdasarkan Lema 3.4.1, maka disimpulkan segi-empat *ABCD* adalah Siklik. ♥

Dalam berbagai buku teks, banyak dibuktikan jari-jari lingkaran luar untuk segi-empat tali busur, akan tetapi proses pembuktiannya selalu dengan menggunakan pendekatan geometri yang sangat berbelit-belit. Bukti cara lain tidak diberikan disini, akan tetapi berikut ini akan diberikan cara pembuktian jari-jari lingkaran luar dengan menggunakan konsep geometri yang lebih sederhana seperti yang diberikan di atas.

***Teorema 3.4.6***: Diketahui tahui segi-empat talibusur *ABCD* dengan panjang $AB = a$ cm, $BC = b$ cm dan $CD = c$ cm serta $DA = d$ cm. Maka jari-jari lingkaran luarnya adalah

$$R=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4\,L}$$

***Bukti*** : Kembali perhatikan gambar 3.1.13 atau 3.1.14 di atas, sama seperti langkah di atas yaitu untuk $\Delta ABC$ dan $\Delta ACD$ diperoleh

$abp = 4R \times L\Delta ABC$

$cdp = 4R \times L\Delta ADC$

yang kalau kedua persamaan di atas dijumlahkan akan diperoleh

$(ab + cd).p = 4R \times$ Luas □*ABCD*

Jadi

$$R=\frac{(ab+cd)}{4}.p$$

$$= \frac{ab+cd}{4L} \cdot \sqrt{\frac{(ad+bc).(ac+bd)}{ab+cd}}$$

$$= \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4\,L}$$ ♥

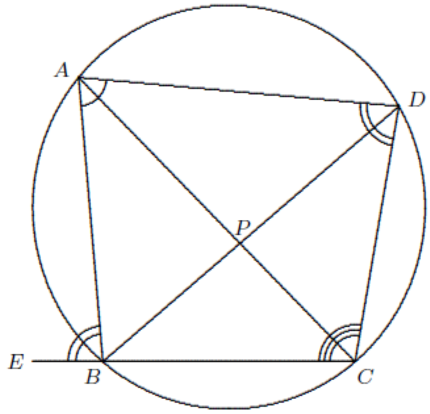
***Soal Latihan*** **5.**

1. Tentukanlah bentuk Persamaan yang dapat dihasilkan seperti pada teorema Carnot I, jika titik P berada diluar $\Delta ABC$
2. Periksalah apakah ketaksamaan Erdos-Mordell berlaku jika titik *P* berada di luar segitiga *ABC*. Kalau berlaku silakan dibuktikan dan kalau tidak berlaku berikan contoh penyangkalnya.
3. Jika P tidak berada pada busur *AC* pada lingkaran luar $\Delta ABC$, maka tunjukkan bahwa

   $AC \,.\, PB + BC \,.\, PA > AB \,.\, PC$
4. Tunjukkan bahwa teorema Pythagoras adalah bentuk khusus dari teorema Ptolemaeus.
5. Diketahui trapesium samakaki *ABCD* (*AB* sejajar *DC*). Buktikan bahwa

   $$(AC)^2 - (AD)^2 = AB \times CD$$
6. Gunakan teorema Ptolemy untuk membuktikan rumus-rumus trigonometri misalnya *tan* $(\alpha+\beta)$ dan *tan* $(\alpha-\beta)$.

7. Jika pada gambar disebelah, *ABCD* adalah segi-empat siklik, tunjukkan bahwa $\angle ABE = \angle D$

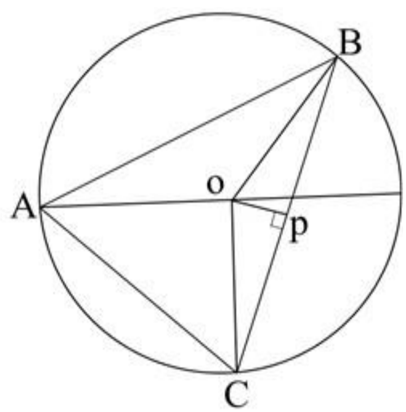



8. Jika pada gambar disebelah pada segi-empat *ABCD* berlaku $\angle ABE = \angle D$, tunjukkan bahwa *ABCD* adalah segi-empat siklik.
9. Jika *P* adalah titik potong sebarang segi-empat sikllik, tunjukkan bahwa

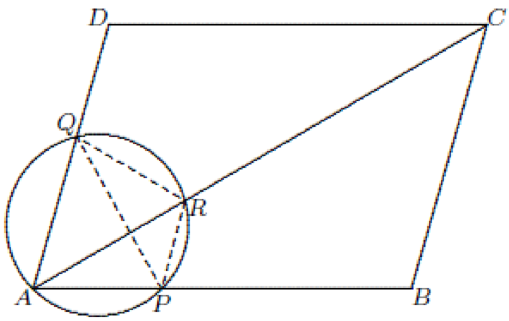
   $AP \cdot PC = BP \cdot PD.$
10. Pada sebuah lingkaran yang berpusat di titik *O* dibuat busur *AB* dan *AC*, dengan *X* dan *Y* merupakan titik tengah dari busur *AB* dan *AC*, buktikan bahwa *O*, *X*, *A* dan *Y* adalah titik yang consiklik.
11. Jika pada sebuah trapesium *ABCD*, dengan *AB* sejajar dengan *DC*, misalkan *E* titik tengah dari sisi *BC*. Tunjukkan bahwa $2L\Delta AED = L\square ABCD$
12. Jika ABCD adalah segi-empat Konvek. Tunjukkan bahwa luas segi-empat tersebut adalah

$$K^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\ cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

13. Perhatikan gambar disebelah. Misalkan *O* titik pusat lingkaran luar $\Delta ABC$ dengan diameter *d*, jika $\angle BAC = \alpha$, tunjukkan bahwa $\sin \alpha = BC/\text{d}$.



14. Pada jajaran genjang *ABCD* seperti gambar disebelah. Sebuah lingkaran melalui titik *A* memotong sisi *AB*, *AD* dan *AC* masing-masing dititik *P*. *Q* dan *R*. Tunjukkan berlaku :
    *AP . AB + AQ . AD = AR . AC*




15. Buktikan teorema Pythagoras dengan menggunakan teorema Ptolemy
16. Buktikan teoema Van Schooten's dengan menggunakan teorema Ptolemy
17. *) Diketahui segitiga samasisi *ABC* dan titik *P* terletak sedemikian rupa sehingga jumlah jarak *P* ke *A* dan jarak *P* ke *C* tidak lebih jauh dari jarak *P* ke *B*. Buktikan bahwa *PB* = *PA* + *PC* jika dan hanya jika P terletak pada lingkaran luar ΔABC
18. *) Diketahui Δ*ABC* samakaki (*AB* = *AC*), dibuat lingkaran lluar dan titi *P* terletak pada busur *BC*. Buktikan bahwa :
$$\frac{PA}{PB+PC}=\frac{AC}{BC}$$
19. **) Dalam segilima beraturan *ABCDE* dibuat lingkaran luar dan titik *P* terletak pada busur BC. Buktikan bahwa
$$PA + PD = PB + PC + PE$$
20. *). Jika pada segitiga *ABC*, masing-masing titik *D*, *E* dan *F* berada pada sisi *BC*, *CA* dan *AB*. Tunjukkan lingkaran luar dari Δ*AEF*, Δ*BDF* dan Δ*CDE* berpotongan disatu titik. (titik perpotongannya itu disebut dengan *titik Miquel*).
21. Jika *ABCD* adalah segi-empat siklik dengan panjang sisi *a*, *b*, *c* dan *d*. tunjukkan bahwa Luasnya adalah $K=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ dengan *s* adalah semiperimeter.

BAB

4

# Garis Berat dan Berbagai Pembuktiannya.


Garis berat sangat banyak dipergunakan dalam Ilmu Matematika sendiri, statistika, secara khusus adalah menentukan keseimbangan dalam berbagai kasus dan berbagai disiplin Ilmu. Untuk itu sudah sewajarnya kita memahami dengan benar konsep Garis Berat dan titi kesemimbangan tersebut.

# BAB 4

# Garis Berat dan Berbagai Pembuktiannya

Garis berat pada suatu segitiga, sudah dipelajari mulai dari mulai dari tingkat sekolah menengah. Garis berat ini merupakan salah satu garis-garis istimewa dalam suatu segitiga. Dalam berbagai buku teks, kebanyakan pembuktian panjang garis berat ini adalah dengan menggunakan teorema Stewart's. Teorema Stewart's itu sendiri proses pembuktiannya dengan cara yang tidak terlalu sederhana. Maka pada bagian ini akan dibahas berbagai cara untuk pembuktian atau penurusan rumus dari panjang garis berat pada suatu segitiga. Tujuannya adalah untuk memberikan wawasan kepada mahasiswa agar memiliki kemampuan/skill untuk berinovasi dalam membuktikan suatu teorema.

## 4.1. Teorema Stewart's dan *Teorema Apollonius.*

disini hanya akan diberikan sebahagian yaitu yang terkait dengan hubungan sisi dan sudut. Untuk yang pertama akan diberikan hubungan antara panjang sisi segitiga jika sebuah garis kita tarik dari sebarang titik sudutnya, secara khusus hal ini dikenal dengan teorema Stewart's berikut ini.

***Teorema Stewart's*** : 4.1.1. diberikan sebuah segitiga $ABC$, pada sisi $BC$ dibuat titik $X$ dengan perbandingan $BX : XC = r : s$, jika panjang sisi $AX$ adalah $p$, maka berlaku :

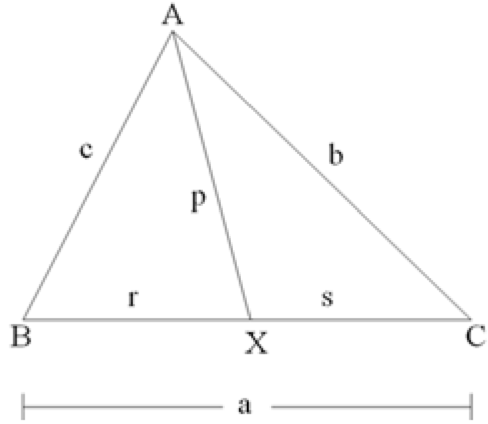
$$a(p^2 + rs) = b^2r + c^2s$$

***Bukti*** : Misalkan $\angle B = \theta$, gunakan hokum kosinus untuk $\Delta AXB$, maka diperoleh

$$cos\,\theta = \frac{r^2 + p^2 - c^2}{2pr}$$

Kemudian gunakan juga hokum kosinus untuk ΔBXC, yang memberikan

$$\cos\theta = \frac{b^2 - s^2 - p^2}{2ps}.$$




gambar 4.1.1

Jadi

$$\frac{r^2 + p^2 - c^2}{2pr} = \frac{b^2 - s^2 - p^2}{2ps}.$$

Karena $a = r + s$, maka dari persamaan di atas diperoleh $a(p^2 + rs) = b^2r + c^2s$

Perlu diperhatikan bahwa dalam berbagai buku, teorema stewart's di atas ditulis dalam bentuk berikut

$$ap^2 = b^2.r + c^2.s - rsa \qquad (4.1.1)$$

Pada prinsipnya teorema stewart's tersebut juga berlaku jika $\angle A$ adalah tumpul, untuk memahaminya dapat penulis lakukan sebagai latihan. Berikut ini akan diberikan bukti lain dari teorema Stewart's yang hasilnya ditulis dalam bentuk seperti persamaan (4.1.1), akan tetapi dibuktikan untuk $\angle A$ yang tumpul dan dengan memberikan notasi yang berbeda dengan bukti yang di atas.

***Bukti lain teorema Stewart's***

Perhatikan gambar 4.2.2a. buat garis dari titik $C$ ke $AB$ dan katakana titik potongnya adalah $D$, sebut $AD = c_1$ dan $DB = c_2$. Kemudian dari titik $C$ buat garis tinggi ke sisi $AB$ (seperti gambar 4.1.2b). Katakan titik potongnya dengan garis $AB$ adalah di titik $E$ dan katakan panjang $DE = m$. kemudian katakana panjang sisi $CD = x$, akan ditunjukkan

$$x^2.c = a^2c_1 + b^2.c_2 - c_1c_2c$$

Berdasarkan teorema proyeksi pada segitiga lancip/tumpul, maka pada $\Delta DBC$ berlaku

$$a^2 = x^2 + c_2^2 + 2mc_2$$

$$m = \frac{-x^2 - c_2^2 + a^2}{2c_2} \qquad (4.1.2)$$

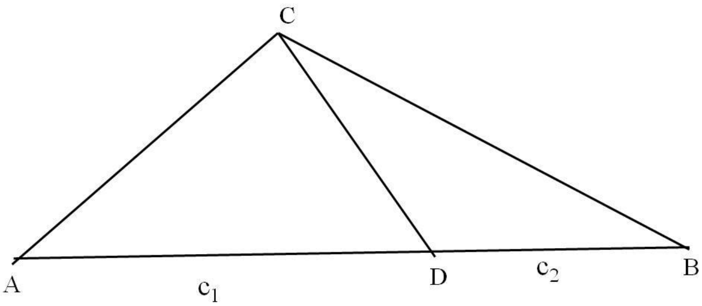
Kemudian pandang $\Delta ADC$ (lancip),kembali berdasarkan teorema proyeksi pada segitiga lancip/tumpul dipreoleh

$$b^2 = x^2 + c_1^2 - 2mc_1$$

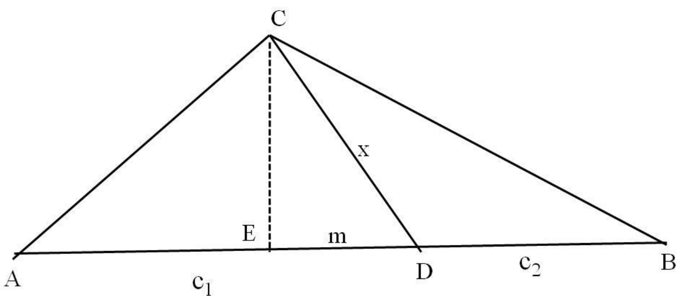
Maka diperoleh

$$m = \frac{x^2 + c_1^2 - b^2}{2c_c} \qquad (4.1.3)$$

Maka dari persamaan (4.1.2) dan (4.1.3) diperoleh




Gambar 4.1.2a




gambar 4.1.2b

$$\frac{x^2 + c_1^2 - b^2}{2c_1} = \frac{-x^2 - c_2^2 + a^2}{2c_2}$$

$$x^2c_2 + c_1^2c_2 - b^2c_2 = -x^2c_1 - c_1^2c_1 + a^2c_1$$

$$x^2(c_1 + c_2) = a^2c_1 + b^2c_2 + c_1c_2(c_1 + c_2)$$

$$x^2c = a^2c_1 + b^2c_2 + c_1c_2c$$

Jika pada teorema stewart’s di atas titik *X* merupakan bisektor dari *BC* atau $\Delta ABC$ merupakan segitiga samasisi, maka dipreleh bentuk khususnya yang sering disebut dengan teorema Apollonius, seperti berikut ini.

***Teorema Apollonius*** **4.1.2**: Jika pada $\Delta ABC$ dengan panjang sisi masing-masing adalah *a*, *b* dan *c*, dan *BX* merupakan bisektor dari *AC*, bila panjang *BX* = *m*, maka berlaku

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + a^2 / 2.$$

Dan jika $b = c$, maka segitiga tersebut menjadi segitiga samasisi dan berlaku

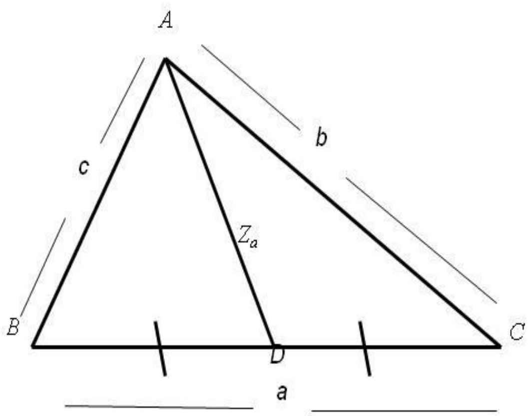
$$m^2 + (a/2)^2 = b^2.$$

***Bukti*** : gunakan lansung teorema Stewart's (4.1.1) ♥

## 4.2. Panjang Garis Tinggi

Penurunan Panjang garis berat dengan menggunakan Teorema Stewart's adalah cara penurunan yang banyak digunakan dalam berbagai buku teks.

**Definisi 4.2.1** Garis berat adalah garis yang ditarik dari suatu titik sudut segitiga dan membagi sisi dihadapannya menjadi dua bagian sama panjang.




Gambar 4.2.1a:

Perhatikan Gambar 4.2.1a, jika pada $\Delta ABC$ ditarik garis dari titik $\angle A$ ke sisi $BC$ berpotongan di titik $D$ dan membagi sisi $BC$ menjadi dua bagian yang sama panjang yaitu $BD = CD = \frac{1}{2}BC$, maka $AD$ merupakan garis berat dari $\Delta ABC$.

Teorema khusus berikutnya yang akan dibahas adalah hubungan antara panjang sisi-sisi suatu segi tiga dengan panjang garis berat (yaitu garis dari suatu titik sudut yang membagi sisi dihadapannya atas dua bahagian yang sama panjang).

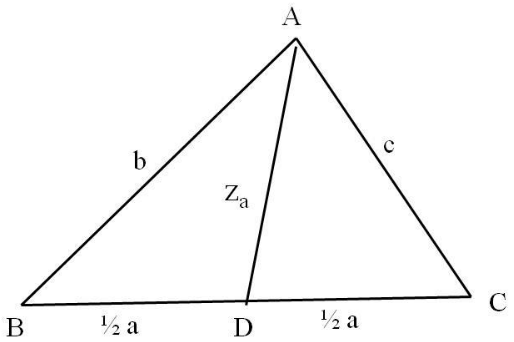
***Teorema* 4.2.1**: misalkan $\Delta ABC$ dengan sisi $a$, $b$ dan $c$ serta $z_a$, $z_b$ dan $z_c$ masing-masing menyatakan garis berat dari ke masing-masing sisi $a$, $b$ dan $c$, maka berlaku

$$z_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$z_b^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}b^2$$

$$z_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c^2$$

***Bukti*** : diketahui $\Delta ABC$, dengan $z_a = AD$ (seperti pada gambar 4.2.1b). Dari teorema Stewart akan diperoleh




Gambar 4.2.1b

$$z_a^2.a = b^2.\frac{1}{2}.a + c^2.\frac{1}{2}.a - \frac{1}{2}a.\frac{1}{2}a.a$$

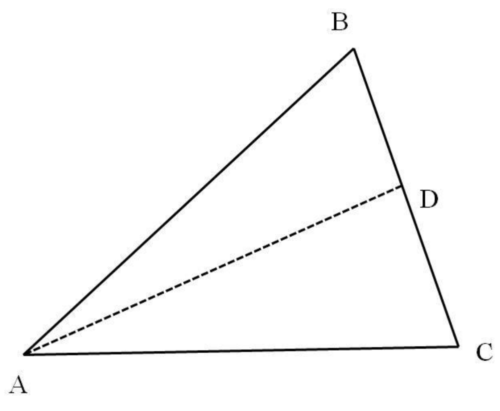
$$a.z_a^2 = a.\left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2\right)$$

Sehingga maka diperolehlah

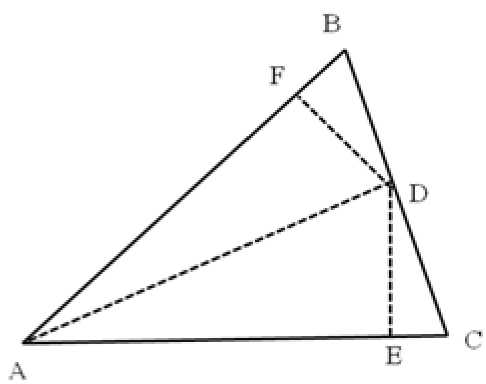
$$z_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$$

***Teorema*** 4.2.2: Garis yang membagi sisi di depannya menjadi dua bagian yang berbanding seperti sisi-sisi yang berdekatan.

***Bukti*** : perhatikan gambar 4.2.2a kemudian tarik garis $AD$, selanjutnya buat titik $E$ dan $F$ sehingga $DE \perp AB$ dan $DF \perp AC$ sehingga $\Delta ADE \cong \Delta ADF$. Sebut $CD = a_1$ dan $DB = a_2$. Akan dibuktikan bahwa berlaku $a_1 : a_2 = c : b$.




Gambar 4.2.2a




Gambar 4.2.2b

Perhatikan $\Delta ABD$ dan $\Delta ACD$

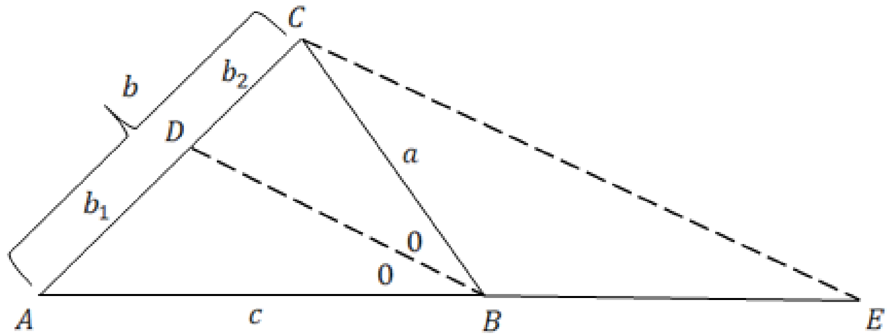
$$\frac{L\Delta ABD}{L\Delta ACD} = \frac{\frac{1}{2}.AB.DE}{\frac{1}{2}.AC.DF} = \frac{c}{b}$$

Jika garis tinggi dari $A$ disebut $z_a$ , maka berlaku

$$\frac{L\Delta ABD}{L\Delta ACD} = \frac{\frac{1}{2}.BD.z_a}{\frac{1}{2}.CD.z_a} = \frac{a_1}{a_2}$$

Sehingga dapat disimpulkan $a_1 : a_2 = c : b$. ♥

Teorema 4.2.2 tersebut juga dapat dibuktikan dengan cara sebagai berikut : . Perhatikan Gambar 4.2.3. Pada $\Delta ABC$ dari titik $C$ ditarik garis sejajar garis bagi $BD$ yaitu $CE$.




Gambar 4.2.3

Karena garis $BD$ sejajar garis $CE$ maka diperoleh

$\angle ABD = \angle CBD$ ($BD$ adalah garis bagi), (4.2.1)

$\angle AEC = \angle ABD$ (sudut saling sehadap), (4.2.2)

$\angle BCE = \angle CBD$ (sudut dalam berseberangan). (4.2.3)

Dari persamaan (4.2.1), (4.2.2) dan (4.2.3) diperoleh $\angle AEC = \angle BCE$ maka $\Delta CBE$ adalah segitiga sama kaki sehingga

$$BE = BC. \quad (4.2.4)$$

Pada $\Delta AEC$ garis $BD$ sejajar garis $CE$ maka diperoleh perbandingan sisi-sisinya

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}. \quad (4.2.5)$$

Bila persamaan (4.2.4) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.2.5) maka diperoleh

$$b_1 : b_2 = c : a. \tag{4.2.6}$$

Karena $b_1 + b_2 = b$, dengan demikian persamaan (4.2.6) diketahui perbandingan dan jumlahnya sehingga menjadi

$$b_1 = \frac{bc}{a+c}, \tag{4.2.7}$$

$$b_2 = \frac{ab}{a+c}. \tag{4.2.8}$$

**Teorema 4.2.4** Jika $BD$ adalah garis bagi dalam $\angle B$ dan $b_1$ dan $b_2$ adalah sisi dihadapan garis bagi, $a$ dan $c$ merupakan sisi yang berdekatan maka berlaku rumus untuk panjang garis bagi dalam $\angle B$ adalah

$$BD^2 = ac - b_1 b_2. \tag{4.2.9}$$

**Bukti**. Perhatikan kembali $\Delta ABC$ pada Gambar 4.2.4, berdasarkan Teorema Stewart diperoleh

$$BD^2\, b = a^2\, b_1 + c^2\, b_2 - b_1\, b_2\, b. \tag{4.2.10}$$

Berdasarkan Teorema 4.2.3 diketahui bahwa

$$ab_1 = cb_2. \tag{4.2.11}$$

Bila persamaan (4.2.11) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.2.10) maka diperoleh

$$BD^2 b = a\,cb_2 + c\,ab_1 - b_1 b_2 b,$$

$$BD^2 b = ac(b_1 + b_2) - b_1 b_2 b,$$

$$BD^2 = ac - b_1 b_2. \qquad \blacksquare$$

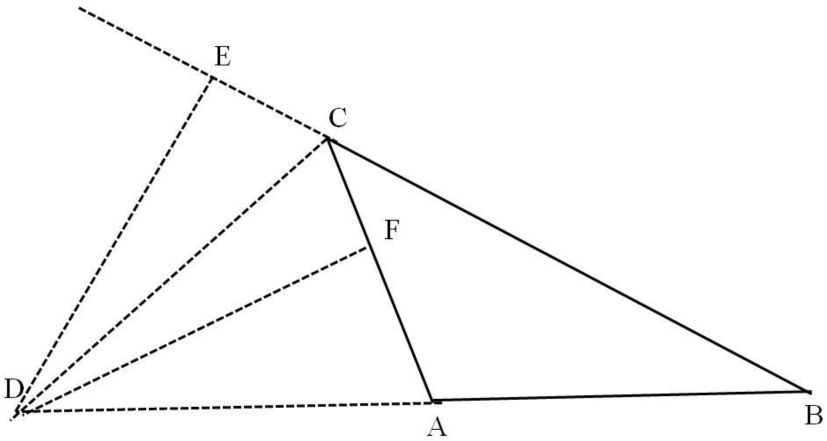
Bila persamaan (4.2.7) dan persamaan (4.2.8) disubstitusikan ke persamaan (4.2.11) maka rumus untuk panjang garis bagi bisa diubah dalam bentuk

$$BD^2 = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right). \tag{4.2.12}$$

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa teorema 4.2.2 juga berlaku untuk garis bagi luar. Bila diketahui $\Delta ABC$, kemudian buat garis bagi luar $\angle$C, perpanjang sisi $BA$

sehingga memotong garis bagi tadi di titik *D* (seperti gambar 4.2.6), kemudian buat garis tegak lurus dari titik *D* ke *AC* dan perpanjangan sisi *BC*. Sebut *AD* = *p* dan *BD* = *q*, akan ditunjukkan bahwa berlaku

$$CD^2 = pq - ab$$




Gambar 4.2.6

Menurut teorema 4.2.1 (teorema Stewart) berlaku :

$$b^2q = CD^2.c + a^2.p - pcq$$

$$CD^2.c = pqc + b^2.q - a^2.p$$

$$CD^2.c = pqc + b(b.q) - a(a.p)$$

$$CD^2.c = pqc + b(a.p) - a(b.q)$$

$$CD^2.c = pqc + abp - abq$$

$$CD^2.c = pqc + a\,b(p - q)$$

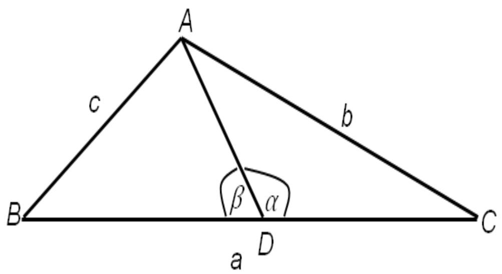
$$CD^2.c = pqc - abc$$

$$CD^2 = pq - ab$$

## 4.3. Penurunan Secara Trigonometri.

Perhatikan kembali teorema 4.2.1, berikut ini akan diberikan pembuktiannya secara geometri dan pembuktian juga akan diberikan dalam 2 cara dan untuk kasus segitiga lancip dan segitiga tumpul.

***Cara* I.**




Gambar 4.3.1.

Perhatikan $\Delta ABD$ pada Gambar 4.3.1. Berdasarkan aturan cosinus diperoleh

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2(AD)(BD)(\cos\beta).$$

Kemudian perhatikan $\Delta ADC$, juga berdasarkan aturan cosinus diperoleh

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2(AD)(CD)(\cos\alpha),$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2(AD)(CD)(\cos\beta). \qquad (4.3.1)$$

Apabila persamaan di atas dijumlahkan maka diperoleh

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + CD^2,$$

$$2AD^2 = AB^2 + AC^2 - BD^2 - CD^2,$$

$$AD^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{2}BD^2 - \frac{1}{2}CD^2.$$

Karena $BD = CD = \frac{1}{2}BC$ sehingga diperoleh

$$AD^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{2}CD^2 - \frac{1}{2}CD^2,$$

$$= \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - CD^2.$$

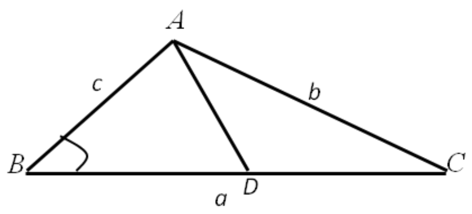
$$= \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2,$$

$$AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

***Cara* II.**

**Kasus Segitiga Lancip**

Pada kasus ini, konstruksi gambar segitiga masih sama dengan Cara I tetapi sudut $\beta$ berada pada segitiga lancip di titik $B$.




Gambar 4.3.1

Perhatikan $\Delta ABC$, dengan aturan cosines diperoleh

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2(AB)(BC)(\cos\alpha),$$

$$\cos\alpha = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2(AB)(BC)}. \qquad \ldots\ (4.3.2)$$

Kemudian untuk $\Delta ABD$, diperoleh

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2(AB)(BD)(\cos\alpha). \qquad (4.3.3)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (4.3.2) ke persamaan (4.3.3) diperoleh

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2(AB)(BD)\left(\frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2(AB)(BC)}\right),$$

Berdasarkan Definisi 2.4 diketahui bahwa $BD = \frac{1}{2}BC$ sehingga diperoleh

$$AD^2 = AB^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 - 2(AB)\left(\frac{1}{2}BC\right)\left(\frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2(AB)(BC)}\right),$$

$$= AB^2 + \frac{1}{4}BC^2 - \left(\frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2}\right),$$

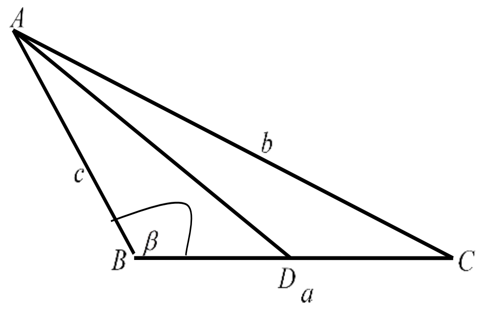
$$= AB^2 + \frac{1}{4}BC^2 - \frac{1}{2}BC^2 - \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2,$$

$$= \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}BC^2,$$

$$AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

**Kasus Sudut Tumpul**

Pada kasus ini, konstruksi gambar segitiga juga masih sama dengan kasus sudut lancip, tetapi sudut $\beta$ berada pada segitiga tumpul di titik $B$.




Gambar .4.3.2:

Perhatikan $\Delta ABC$ pada Gambar 4.3.2. Berdasarkan Teorema 4.2.7 diperoleh bahwa

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)(\cos\beta),$$

$$\cos\beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2(AB)(BC)}. \qquad (4.3.4)$$

Kemudian perhatikan $\Delta ABD$, berdasarkan aturan cosinus juga diperoleh bahwa

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2(AB)(BD)(\cos\beta). \qquad (4.3.5)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (4.3.4) ke persamaan (4.3.5) diperoleh

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2(AB)(BD)\left(\frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2(AB)(BC)}\right),$$

Berdasarkan Definisi 2.4 diketahui bahwa $BD = \frac{1}{2}BC$ sehingga diperoleh

$$AD^2 = AB^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 - 2(AB)\left(\frac{1}{2}BC\right)\left(\frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2(AB)(BC)}\right),$$

$$= AB^2 + \frac{1}{4}BC^2 - \left(\frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2}\right),$$

$$= AB^2 + \frac{1}{4}BC^2 - \frac{1}{2}BC^2 - \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2,$$

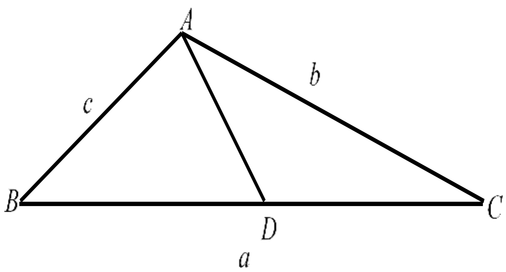
$$= \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}BC^2,$$

$$AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

**4.4. Dengan Konsep Luas Daerah**

Perhatikan $\Delta ABC$ pada Gambar 4.4.1. Misalkan $\Delta ABC$ dengan sisi $a$, $b$, dan $c$ sehingga luas segitiga adalah

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ dengan } s = \frac{a+b+c}{2}.$$




Gambar 4.4.1:

Jadi, luas $\Delta ABC$ pada Gambar 4.4.1 adalah

$$\mathrm{L} = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left[\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\right]},$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)},$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 - a^4 + 2b^2c^2 - b^4 + 2a^2c^2 - c^4}. \qquad (4.4.1)$$

Perhatikan $\Delta ABD$ pada Gambar 4.4.1. Berdasarkan Teorema 4.2.9 dan persamaan (4.4.1) diperoleh

$$\mathrm{L}\Delta ABD = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 - a^4 + 2b^2c^2 - b^4 + 2a^2c^2 - c^4},$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2\left(\frac{a}{2}\right)^2 AD^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^4 + 2AD^2c^2 - AD^4 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 c^2 - c^4},$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a^2}{2} AD^2 - \frac{a^4}{16} + 2AD^2c^2 - AD^4 + \frac{a^2}{2} c^2 - c^4}. \qquad (4.4.2)$$

Selanjutnya perhatikan $\Delta ADC$ pada Gambar 4.4.1 diperoleh bahwa

$$\text{L}\Delta ADC = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 - a^4 + 2b^2c^2 - b^4 + 2a^2c^2 - c^4},$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2\left(\frac{a}{2}\right)^2 b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^4 + 2b^2AD^2 - b^4 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 AD^2 - AD^4},$$

$$\text{L}\Delta ADC = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a^2}{2} b^2 - \frac{a^4}{16} + 2b^2AD^2 - b^4 + \frac{a^2}{2} AD^2 - AD^4}. \qquad (4.4.3)$$

Karena

$$\text{L}\Delta ABD = \text{L}\Delta ADC. \qquad (4.4.4)$$

Apabila persamaan (4.4.2) dan (4.4.3) disubstitusikan ke persamaan (4.4.4) maka diperoleh

$$(\text{L}\Delta ABD)^2 = (\text{L}\Delta ADC)^2,$$

$$2AD^2c^2 + \frac{a^2}{2} c^2 - c^4 = \frac{a^2}{2} b^2 + 2b^2AD^2 - b^4,$$

$$2AD^2b^2 - 2AD^2c^2 = b^4 - c^4 - \frac{a^2}{2}b^2 + \frac{a^2}{2}c^2,$$

$$2AD^2\left(b^2 - c^2\right) = \left(b^2 + c^2\right)\left(b^2 - c^2\right) - \frac{a^2}{2}\left(b^2 - c^2\right),$$

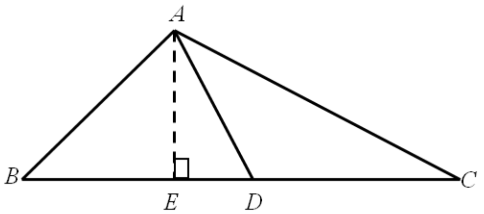
$$2AD^2 = \left(b^2 + c^2\right) - \frac{a^2}{2},$$

$$AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

## 4.5. Dengan Menggunakan Teorema Pythagoras

Pada bagian ini, untuk menurunkan rumus panjang garis berat suatu segitiga pada Teorema 4.2.2 adalah dengan mengkonstruksi garis tinggi pada suatu segitiga.

Perhatikan $\Delta ABC$ pada Gambar 4.5.1, ditarik suatu garis dari titik sudut $A$ tegak lurus ke sisi $BC$ dan berpotongan di titik $E$.




Gambar 4.5.1

Perhatikan $\Delta ABE$ dan $\Delta ACE$ pada Gambar 4.5.1. diperoleh

$$AE^2 = AB^2 - BE^2.$$

$$AE^2 = AC^2 - CE^2.$$

Dan pada $\Delta ABE$ dan $\Delta ACE$ diperoleh

$$AE^2 = AB^2 - BE^2. \qquad (4.5.1)$$

$$AE^2 = AC^2 - CE^2. \qquad (4.5.2)$$

Dari persamaan (4.5.1) dan (4.5.2) diperoleh

$$\begin{aligned}
AB^2 - BE^2 &= AC^2 - CE^2,\\
AB^2 &= AC^2 + BE^2 - CE^2,\\
&= AC^2 + (BC - CE)^2 - CE^2,\\
&= AC^2 + BC^2 - 2(BC)(CE) + CE^2 - CE^2,\\
&= AC^2 + BC^2 - 2(BC)(CE),\\
2(BC)(CE) &= AC^2 + BC^2 - AB^2,\\
(BC)(CE) &= \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2}. \qquad (4.5.3)
\end{aligned}$$

Perhatikan $\Delta ADE$ pada Gambar 4.5.1, maka

$$\begin{aligned}
AD^2 &= AE^2 + ED^2,\\
&= \left(AC^2 - CE^2\right) + (CE - CD)^2,
\end{aligned}$$

$$= AC^2 - CE^2 + CE^2 - 2(CE)(CD) + CD^2,$$

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2(CE)(CD).$$

Karena $CD = \frac{1}{2}BC$ sehingga diperoleh

$$AD^2 = AC^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 - 2CE\left(\frac{1}{2}BC\right)^2,$$

$$AD^2 = AC^2 + \frac{1}{4}BC^2 - (BC)(CE). \qquad (4.5.4)$$

Apabila persamaan (4.5.3) disubstitusikan ke persamaan (4.5.4) maka diperoleh

$$AD^2 = AC^2 + \frac{1}{4}BC^2 - \left(\frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2}\right),$$

$$= AC^2 - \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{4}BC^2 - \frac{1}{2}BC^2,$$

$$= \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}BC^2,$$

$$AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

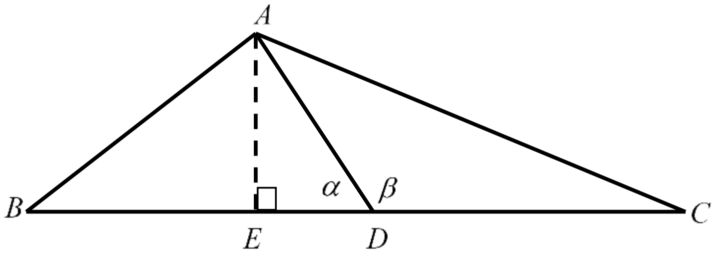
**4.6. Dengan Konsep Proyeksi**

Selain dengan mengkonstruksi garis tinggi pada suatu segitiga, dengan menggunakan teorema proyeksi juga dapat diturunkan rumus panjang garis berat suatu segitiga pada Teorema 4.2.1.

Perhatikan $\Delta ABC$ pada Gambar 4.6.1, ditarik sebuah garis dari titik sudut $A$ tegak lurus ke sisi $BC$ dan berpotongan di titik $E$.

Selanjutnya perhatikan $\Delta ADB$ pada Gambar 4.6.1, jika garis $AD$ diproyeksikan ke garis $BD$ maka berdasarkan Teorema 4.2.1 diperoleh

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2(BD)(DE). \qquad (4.6.1)$$




Gambar 4.6.1

Kemudian perhatikan $\Delta ADC$ pada Gambar 4.6.1, jika garis $AD$ diproyeksikan ke garis $CD$ maka berdasarkan Teorema 4.2.1 diperoleh

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2(CD)(DE). \qquad (4.6.2)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (4.6.1) dan (4.6.2) diperoleh bahwa

$$AB^2 + AC^2 = BD^2 + CD^2 + 2AD^2 - 2(BD)(DE) + 2(CD)(DE).$$

Berdasarkan karena $BD = CD = \frac{1}{2}BC$ sehingga diperoleh

$$AB^2 + AC^2 = 2CD^2 + 2AD^2,$$

$$2AD^2 = AB^2 + AC^2 - 2CD^2,$$

$$AD^2 = \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - CD^2,$$

$$= \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2,$$

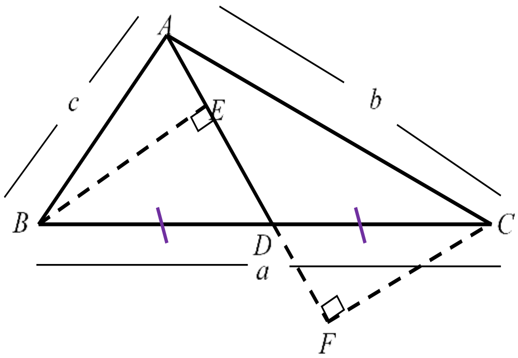
$$= \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}BC^2,$$

$$AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

## 4.7. Dengan Konsep Kongruensi

Pada konsep kongruensi masih menggunakan teorema Pythagoras, tetapi cara mengkonstruksi gambar yang berbeda. Dengan menggunakan konsep kongruensi dapat diturunkan rumus panjang garis berat suatu segitiga pada Teorema 4.2.1.

Perhatikan $\Delta ABC$ pada Gambar 4.7.1, kemudian ditarik suatu garis dari titik sudut $B$ tegak lurus ke sisi $AD$ dan sebut sebagai titik $E$. Selanjutnya ditarik lagi garis dari titik sudut $C$ tegak lurus perpanjangan sisi $AD$ dan sebut sebagai titik $F$.




Gambar 4.7.1

Selanjutnya perhatikan $\Delta BDE$ dan $\Delta CDF$ pada Gambar 4.7.1, $\angle BDE = \angle CDF$ , $\angle BED = \angle CFD$, dan $BD = CD$. Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa $\Delta BDE \cong \Delta CDF$, karena $\Delta BDE \cong \Delta CDF$ sehingga diperoleh sisi yang berkorespondensi kongruen yaitu $DF \cong DE$. Oleh karena $DF \cong DE$ sehingga

$$DF = DE. \qquad (4.7.1)$$

Perhatikan $\Delta ABD$ pada Gambar 4.7.1, diperoleh

$$BE^2 = AB^2 - AE^2, \qquad (4.7.2)$$

$$BE^2 = BD^2 - DE^2. \qquad (4.7.3)$$

Kemudian dari persamaan (4.7.2) dan (4.7.3) diperoleh

$$AB^2 - AE^2 = BD^2 - DE^2,$$

$$BD^2 = AB^2 - AE^2 + DE^2,$$

$$= AB^2 - (AD - DE)^2 + DE^2,$$

$$= AB^2 - AD^2 + 2(AD)(DE) - DE^2 + DE^2,$$

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 + 2(AD)(DE). \qquad (4.7.4)$$

Selanjutnya perhatikan $\Delta AFC$ pada Gambar 4.7.1, juga diperoleh

$$CF^2 = CD^2 - DF^2. \qquad (4.7.5)$$

$$CF^2 = AC^2 - AF^2. \qquad (4.7.6)$$

Kemudian dari persamaan (4.7.5) dan (4.7.6) diperoleh

$$CD^2 - DF^2 = AC^2 - AF^2,$$

$$CD^2 = AC^2 - AF^2 + DF^2,$$

$$= AC^2 - (AD + DF)^2 + DF^2,$$

$$= AC^2 - AD^2 - 2(AD)(DF) - DF^2 + DF^2,$$

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 - 2(AD)(DF). \qquad (4.7.7)$$

Apabila persamaan (4.7.4) dan (4.7.7) dijumlahkan maka diperoleh

$$BD^2 + CD^2 = AB^2 + AC^2 - 2AD^2 + 2(AD)(DE) - 2(AD)(DF).$$

Berdasarkan persamaan (4.7.1) diketahui bahwa $DE = DF$ sehingga diperoleh

$$BD^2 + CD^2 = AB^2 + AC^2 - 2AD^2,$$

$$2AD^2 = AB^2 + AC^2 - BD^2 - CD^2, \quad AD^2 = \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}BD^2 - \frac{1}{2}CD^2.$$

karena $BD = CD = \frac{1}{2}BC$ sehingga diperoleh

$$AD^2 = \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}CD^2 - \frac{1}{2}CD^2,$$

$$= \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - CD^2 = \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2,$$

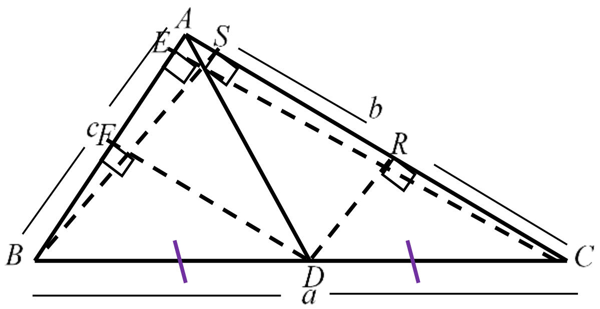
$$= \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}BC^2,$$

$$AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2,$$

## 4.8. Penurunan Dengan Konsep Kesebangunan

Pada konsep kesebangunan juga masih menggunakan teorema Pythagoras tetapi cara mengkonstruksi gambarnya berbeda. Dengan menggunakan konsep kesebangunan juga dapat diturunkan rumus panjang garis berat suatu segitiga pada Teorema 2.5.

***Cara* I.** Perhatikan $\Delta ABC$ pada Gambar 4.4, ditarik suatu garis dari titik sudut $B$ tegak lurus ke sisi $AC$, sebut sebagai titik $S$. Kemudian ditarik lagi garis dari titik sudut $C$ tegak lurus ke sisi $AB$, sebut sebagai titik $E$. Selanjutnya ditarik garis dari titik sudut $D$ tegak lurus ke sisi $AB$, sebut sebagai titik $F$ dan ditarik lagi garis dari titik sudut $D$ tegak lurus ke sisi $AC$, sebut sebagai titik $R$.




Gambar 4.8.1

Perhatikan $\Delta BFD$ dan $\Delta BEC$ pada Gambar 4.8.1, $\angle BFD = \angle BEC$ dan $\angle FBD = \angle EBC$. Berdasarkan Akibat Teorema 4.2.4 dapat ditunjukkan bahwa $\Delta BFD \sim \Delta BEC$, sehingga diperoleh

$$\frac{BF}{BE} = \frac{BD}{BC}. \tag{4.8.1}$$

Selanjutnya perhatikan $\Delta BFD$ dan $\Delta AFD$ pada Gambar 4.8.1, karena sejajar dan tegak lurus sehingga diperoleh

$$DF^2 = BD^2 - BF^2. \tag{4.8.2}$$

$$DF^2 = AD^2 - AF^2. \tag{4.8.3}$$

Kemudian dari persamaan (4.8.2) dan (4.8.3) diperoleh

$$BD^2 - BF^2 = AD^2 - AF^2,$$

$$BD^2 = AD^2 - AF^2 + BF^2,$$

$$= AD^2 - (AB - BF)^2 + BF^2,$$

$$= AD^2 - AB^2 + 2(AB)(BF) - BF^2 + BF^2,$$

$$BD^2 = AD^2 - AB^2 + 2(AB)(BF),$$

$$2(AB)(BF) = BD^2 - AD^2 + AB^2. \qquad (4.8.4)$$

Selanjutnya perhatikan $\Delta BEC$ dan $\Delta AEC$ pada Gambar 4.4, karena sejajar dan tegak lurus sehingga berdasarkan Teorema 4.2.6 juga diperoleh

$$EC^2 = BC^2 - BE^2. \qquad (4.8.5)$$

$$EC^2 = AC^2 - AE^2. \qquad (4.8.6)$$

Kemudian dari persamaan (4.8.5) dan (4.8.6) diperoleh

$$BC^2 - BE^2 = AC^2 - AE^2,$$

$$BC^2 = AC^2 - AE^2 + BE^2,$$

$$= AC^2 - (AB - BE)^2 + BE^2,$$

$$= AC^2 - AB^2 + 2(AB)(BE) - BE^2 + BE^2,$$

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 + 2(AB)(BE),$$

$$2(AB)(BE) = BC^2 - AC^2 + AB^2. \qquad (4.8.7)$$

Dari perbandingan persamaan (4.8.4) dan (4.8.7) diperoleh bahwa

$$\frac{2(AB)(BF) = BD^2 - AD^2 + AB^2}{2(AB)(BE) = BC^2 - AC^2 + AB^2},$$

$$\frac{BF}{BE} = \frac{BD^2 - AD^2 + AB^2}{BC^2 - AC^2 + AB^2}. \qquad (4.8.9)$$

Selanjutnya perhatikan $\Delta CRD$ dan $\Delta CSB$ pada Gambar 4.4, $\angle CRD = \angle CSB$ dan $\angle DRC = \angle BSC$. Berdasarkan Akibat Teorema 4.2.4 dapat ditunjukkan bahwa $\Delta CRD \sim \Delta CSB$, sehingga diperoleh

$$\frac{CR}{CS} = \frac{CD}{BC}. \qquad (4.8.10)$$

Perhatikan $\Delta CRD$ dan $\Delta ARD$ pada Gambar 4.4, karena sejajar dan tegak lurus sehingga berdasarkan Teorema 4.2.6 diperoleh

$$DR^2 = CD^2 - CR^2. \qquad (4.8.11)$$

$$DR^2 = AD^2 - AR^2. \qquad (4.8.12)$$

Dari persamaan (4.8.11) dan (4.8.12) diperoleh

$$\begin{aligned} CD^2 - CR^2 &= AD^2 - AR^2, \\ CD^2 &= AD^2 - AR^2 + CR^2, \\ &= AD^2 - (AC - CR)^2 + CR^2, \\ &= AD^2 - AC^2 + 2(AC)(CR) - CR^2 + CR^2, \\ 2(AC)(CR) &= CD^2 - AD^2 + AC^2. \qquad (4.8.13) \end{aligned}$$

Selanjutnya perhatikan $\Delta CSB$ dan $\Delta ASB$ pada Gambar 4.4, karena sejajar dan tegak lurus sehingga berdasarkan Teorema 4.2.6 juga diperoleh

$$BS^2 = BC^2 - CS^2. \qquad (4.8.14)$$

$$BS^2 = AB^2 - AS^2. \qquad (4.8.15)$$

Kemudian dari persamaan (4.8.14) dan (4.8.15) diperoleh

$$\begin{aligned} BC^2 - CS^2 &= AB^2 - AS^2, \\ BC^2 &= AB^2 - AS^2 + CS^2, \\ &= AB^2 - (AC - CS)^2 + CS^2, \\ BC^2 &= AB^2 - AC^2 + 2(AC)(CS) - CS^2 + CS^2, \\ 2(AC)(CS) &= BC^2 - AB^2 + AC^2. \qquad (4.8.16) \end{aligned}$$

Dari perbandingan persamaan (4.8.13) dan (4.8.16) diperoleh

$$\frac{2(AC)(CR) = CD^2 - AD^2 + AC^2}{2(AC)(CS) = BC^2 - AB^2 + AC^2},$$

$$\frac{CR}{CS} = \frac{CD^2 - AD^2 + AC^2}{BC^2 - AB^2 + AC^2}. \qquad (4.8.17)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.8.1) ke persamaan (4.8.10) diperoleh bahwa

$$\frac{BF}{BE}=\frac{CR}{CS}. \tag{4.8.18}$$

Kemudian apabila persamaan (4.8.9) dan (4.8.17) disubstitusikan ke persamaan (4.8.18) maka diperoleh

$$\frac{BD^2-AD^2+AB^2}{BC^2-AC^2+AB^2}=\frac{CD^2-AD^2+AC^2}{BC^2-AB^2+AC^2},$$

$$\left(BD^2-AD^2+AB^2\right)\left(BC^2-AB^2+AC^2\right)=\left(CD^2-AD^2+AC^2\right)\left(BC^2-AC^2+AB^2\right),$$

$$BD^2-BC^2-2AD^2+CD^2+AC^2+AB^2=0,$$

$$2AD^2=BD^2-BC^2+CD^2+AC^2+AB^2,$$

$$AD^2=\frac{1}{2}BD^2-\frac{1}{2}BC^2+\frac{1}{2}CD^2+\frac{1}{2}AC^2+\frac{1}{2}AB^2,$$

Karena $BD=CD=\frac{1}{2}BC$ diperoleh

$$AD^2=\frac{1}{2}CD^2-\frac{1}{2}BC^2+\frac{1}{2}CD^2+\frac{1}{2}AC^2+\frac{1}{2}AB^2,$$

$$=\frac{1}{2}AC^2+\frac{1}{2}AB^2-\frac{1}{2}BC^2+CD^2.$$

$$AD^2=\frac{1}{2}AC^2+\frac{1}{2}AB^2-\frac{1}{2}BC^2+\left(\frac{1}{2}BC\right)^2,$$

$$=\frac{1}{2}AC^2+\frac{1}{2}AB^2-\frac{1}{4}BC^2,$$

$$AD^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2.$$

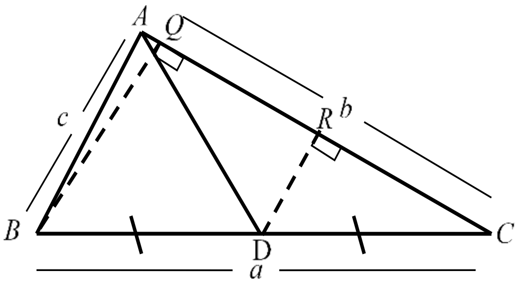
***Cara* II.**

Pada cara ini pembahasannya masih menggunakan konsep kesebangunan. Tetapi dengan mengkonstruksi gambar yang berbeda. Selain itu juga dibahas untuk kasus segitiga lancip dan segitiga tumpul.

**1) Kasus Segitiga Lancip**

Perhatikan $\Delta ABC$ pada Gambar 4.5, suatu garis ditarik dari titik sudut $B$ tegak lurus ke sisi $AC$, sebut sebagai titik $Q$ dan ditarik lagi garis dari titik sudut $D$ tegak lurus ke sisi $AC$, sebut sebagai titik $R$.

Perhatikan $\Delta CRD$ dan $\Delta CQB$ pada Gambar 4.8.2, $\angle CRD = \angle CQB$ dan $\angle DCR = \angle BCQ$. Berdasarkan Akibat Teorema 4.2.4 dapat ditunjukkan bahwa $\Delta CRD \sim \Delta CQB$, sehingga diperoleh




Gambar 4.8.2

$$\frac{CR}{CQ} = \frac{CD}{BC},$$

$$2CR = CQ. \qquad (4.8.19)$$

Selanjutnya perhatikan $\Delta CRD$ dan $\Delta ARD$ pada Gambar 4.5, karena sejajar dan tegak lurus maka

$$DR^2 = CD^2 - CR^2. \qquad (4.8.20)$$

$$DR^2 = AD^2 - AR^2. \qquad (4.8.21)$$

Kemudian dari persamaan (4.8.20) dan (4.8.21) diperoleh

$$CD^2 - CR^2 = AD^2 - AR^2,$$

$$CD^2 = AD^2 - AR^2 + CR^2,$$

$$= AD^2 - (AC - CR)^2 + CR^2,$$

$$CD^2 = AD^2 - AC^2 + 2(AC)(CR) - CR^2 + CR^2,$$

$$2(AC)(CR) = CD^2 - AD^2 + AC^2,$$

$$CR = \frac{CD^2 - AD^2 + AC^2}{2AC}. \tag{4.8.22}$$

Perhatikan $\Delta CQB$ dan $\Delta AQB$ pada Gambar 4.8.2, karena sejajar dan tegak lurus juga diperoleh

$$BQ^2 = BC^2 - CQ^2. \tag{4.8.23}$$

$$BQ^2 = AB^2 - AQ^2. \tag{4.8.24}$$

Dari persamaan (4.8.23) dan (4.8.24) diperoleh

$$BC^2 - CQ^2 = AB^2 - AQ^2,$$

$$BC^2 = AB^2 - AQ^2 + CQ^2,$$

$$= AB^2 - (AC - CQ)^2 + CQ^2,$$

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 + 2(AC)(CQ) - CQ^2 + CQ^2,$$

$$2(AC)(CQ) = BC^2 - AB^2 + AC^2,$$

$$CQ = \frac{BC^2 - AB^2 + AC^2}{2AC}. \tag{4.8.25}$$

Kemudian apabila persamaan (4.8.22) dan (4.8.25) disubstitusikan ke persamaan (4.8.19) maka diperoleh

$$2\left(\frac{CD^2 - AD^2 + AC^2}{2AC}\right) = \left(\frac{BC^2 - AB^2 + AC^2}{2AC}\right),$$

$$2CD^2 - 2AD^2 + 2AC^2 = BC^2 - AB^2 + AC^2,$$

$$2AD^2 = 2CD^2 + 2AC^2 - BC^2 + AB^2 - AC^2,$$

$$AD^2 = CD^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}AC^2.$$

Berdasarkan Definisi 2.4 dan karena $CD = \frac{1}{2}BC$ diperoleh

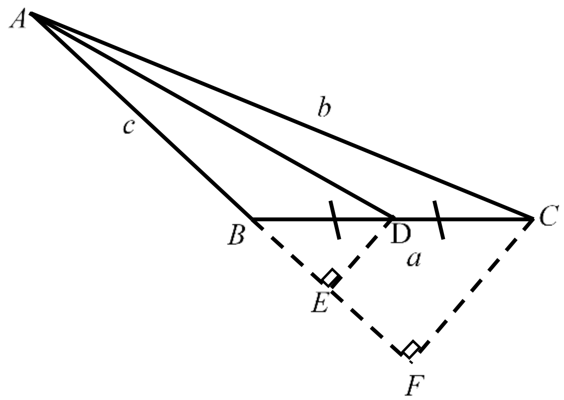
$$AD^2 = \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}AC^2,$$

$$= \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}BC^2,$$

$$AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

**2) Kasus Segitiga Tumpul**

Perhatikan $\Delta ABC$ pada Gambar 4.8.3, suatu garis ditarik dari titik sudut $D$ tegak lurus perpanjangan sisi $AB$ , sebut sebagai titik $E$. Kemudian ditarik lagi garis dari titik sudut $C$ tegak lurus perpanjangan sisi $AB$ sebut sebagai titik $F$.




Gambar 4.8.3:

Selanjutnya perhatikan $\Delta CFB$ dan $\Delta DEB$ pada Gambar 4.8.3, $\angle CFB = \angle DEB$ dan $\angle DBE = \angle CBF$ . karena $\Delta CFB \sim \Delta DEB$, sehingga diperoleh

$$\frac{BE}{BF} = \frac{BD}{BC},$$

$$2BE = BF. \qquad (4.8.26)$$

Perhatikan $\Delta AFC$ dan $\Delta BFC$ pada Gambar 4.8.3, karena sejajar dan tegak lurus sehingga berdasarkan Teorema 4.2.6 diperoleh

$$CF^2 = BC^2 - BF^2. \qquad (4.8.27)$$

$$CF^2 = AC^2 - AF^2. \qquad (4.8.28)$$

Dari persamaan (4.8.27) dan (4.8.28) diperoleh

$$BC^2 - BF^2 = AC^2 - AF^2,$$

$$BC^2 = AC^2 - AF^2 + BF^2,$$

$$= AC^2 - (AB^2 + BF)^2 + BF^2,$$

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 - 2(AB)(BF) - BF^2 + BF^2,$$

$$2(AB)(BF) = AC^2 - AB^2 - BC^2,$$

$$BF = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2AB}. \qquad (4.8.29)$$

Perhatikan $\Delta AED$ dan $\Delta BED$ pada Gambar 4.6, karena sejajar dan tegak lurus sehingga diperoleh

$$DE^2 = BD^2 - BE^2, \qquad (4.8.30)$$

$$DE^2 = AD^2 - AE^2, \qquad (4.8.31)$$

Kemudian dari persamaan (4.8.30) dan (4.8.31) diperoleh

$$BD^2 - BE^2 = AD^2 - AE^2,$$

$$BD^2 = AD^2 - AE^2 + BE^2,$$

$$= AD^2 - (AB + BE)^2 + BE^2,$$

$$BD^2 = AD^2 - AB^2 - 2(AB)(BE) - BE^2 + BE^2,$$

$$2(AB)(BE) = AD^2 - AB^2 - BD^2,$$

$$BE = \frac{AD^2 - BD^2 - AB^2}{2AB}. \qquad (4.8.32)$$

Apabila persamaan (4.8.29) dan (4.8.32) disubstitusikan ke persamaan (4.8.26) maka diperoleh

$$2\left(\frac{AD^2 - BD^2 - AB^2}{2AB}\right) = \left(\frac{AC^2 - BC^2 - AB^2}{2AB}\right),$$

$$2AD^2 - 2BD^2 - 2AB^2 = AC^2 - BC^2 - AB^2,$$

$$2AD^2 = 2BD^2 + 2AB^2 + AC^2 - BC^2 - AB^2,$$

$$AD^2 = BD^2 + AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 - \frac{1}{2}AB^2.$$

Karena $BD = \frac{1}{2}BC$ sehingga diperoleh

$$AD^2 = \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 + AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 - \frac{1}{2}AB^2,$$

$$= \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}BC^2,$$

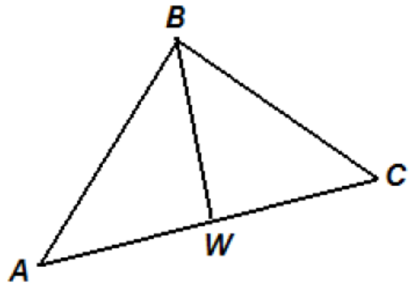
$$AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

**Soal Latihan 6**.

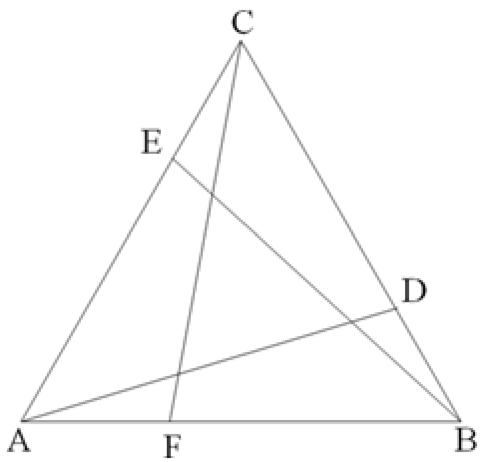
1. Kalau teorema sudut bisektor, adalah untuk bisektor dalam tunjukkan bahwa teorema sudut bisektor juga berlaku untuk sudut luar
2. Misalkan $\Delta AB$C dengan panjang sisi $a$ = 11, $b$ = $c$ , jika titik $D$ dan $E$ berada pada sisi $BC$ sehingga $AD$ dan $AE$ akan membagi $\angle A$ atas tiga bagian yang sama (trisect), tunjukkan bahwa $AD$ = $A$E dan berapakah panjangnya.
3. Buktikan teorema Stewart untuk $\angle A$ yang tumpul.
4. Coba buktikan Panjang garis bagi suatu sudut pada segitiba ABC dengan menggunakan konsep luas.
5. Bisakah anda buktikan panjang garis bagi suatu sudut pada segitiba ABC dengan menggunakan rumus trigonometri.
6. Gunakanlah pendekatan Proyeksi untuk menghitung panjang garis bagi pada suatu segitiga ABC.
7. Dengan mengikuti langkang bagian 4.6 dan 4.7 bisaka anda tentukan panjang garis bagi

8. Ini adalah bentuk lain dari teorema Stewart's. Diberikan sebarang $\Delta$ABC, dengan BW adalah bisektor $\angle$B, misalkan $\beta = \angle ABC$. Tunjukkan berlaku

$$BW = \frac{2\,AB.BC}{AB+BC}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$




9. Diberikan $\Delta ABC$ samasisi yang panjangnya 1 satuan, buat titik $D$, $E$ dan $F$ seperti gambar disebelah dengan $AF = BD = CE = r$, dengan $0 < r < 1$. Gunakan teorema Stewart's untuk menghitung panjang sisi $AD = BE = CF$




*10.* Jika pada $\Delta ABC$, $AC = 4$, $BC = 5$, bila $CD$ garis bagi, AE garis berat. Bila luas $ADEC$ = 6.5 satuan, hitunglah L$\Delta BDE$

11. *) Pada $\Delta ABC$, titik $E$ dan D masing-masing berada pada ruas garis $A$C dan $BC$. Jika pada $\angle CAD$ dibuat garis bagi $AF$ dan pada $\angle CBE$ dibuat garis bagi $BF$. Buktikan bahwa

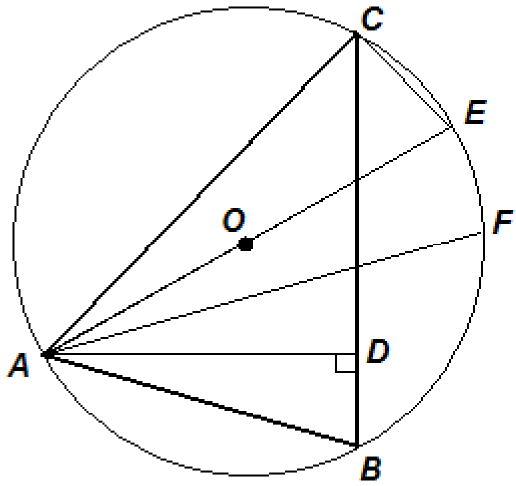
$$\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB$$

12. *) Gunakan teorema Stewart's untuk membuktikan bahwa panjang garis bagi dari titik $A$ pada $\Delta ABC$, dengan panjang sisi $a$, $b$ dan $c$ adalah

$$w_a^2 = bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$$

13. *). Tunjukkan juga bahwa $w_a^2 = \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}$ denan $s = ½\,(a + b + c)$

14. *). Perhatikan $\Delta ABC$ dengan $O$ adalah titik pusat lingkaran luarnya. Jika $AF$ adalah bisektor dari $\angle BAC$, dan $AE$ adalah diagonal, maka $AE$ adalah bisektor dari $\angle CAF$.

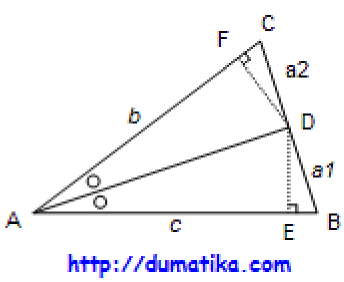


# BAB 5

# Garis Tinggi dan Berbagai Pembuktiannya

Perhatikanlah gambar di bawah ini, hal ini menunjukkan bagaimana banyaknya masalah dalam kehidupan nyata yang melibatkan segitiga, bukan hanya segitiga, akan tetapi adalah beberapa garis khusus yang terdapat dalam segitiga tersebut.





BAB
5

# Garis Tinggi dan Berbagai Pembuktiannya

Segitiga terbentuk oleh tiga ruas garis yang setiap ujungnya bersekutu dengan sebuah ujung ruas garis lainnya. Pesekutuan-persekutuan tersebut membentuk (tiga) buah titik sudut segitiga. Ruas garis semula membentuk sisi-sisi segitiga. Ketiga ruas garis melingkupi sebuah *daerah segitiga”*. Jumlah ketiga panjang ruas garis dinamakan keliling segitiga tersebut. Ukuran besar daerah segitiga merupakan ukuran luas daerah segitiga yang secara singkat dinamakan luas segitiga.

Sangat banyak garis-garis istimewa dalam sebuah segitiga, garis bagi, garis berat dan garis tinggi sebenarna juga garis-garis istimewa pada suatu segitiga. Akan tetapi karena garis bagi khususnya terkait terkait dengan lingkaran dalam, makanya dibahas pada bab terdahulu. Maka sebelum membahas garis-garis istimewa dalam segitiga tersebut terlebih dahulu sekedar remidial tentang sisi dan sudut yang pada dasarnya telah digunakan pada pembahasan yang ada pada bagian sebelum ini.

## 5.1. *Sisi dan Sudut*

Pada bagian ini akan dibahas beberapa pemahaman dasar tentang segitiga yang terkait dengan hubungan sudut dan panjang sisinya yang sering disebut dengan istilah ketidaksamaan pada sisi segitiga dan hubungannya dengan sisi dan sudut. masalah garis bagi, garis tinggi dan garis berat yang untuk selanjutnya pemahaman konsep ini sangat diperlukan untuk memahami konsep-konsep lainnya yang ada pada bagian lain.

Jika dua buah sisi segitiga tidak sama panjang, maka sudut terbesar pasti akan terletah pada dihadapan sisi terpanjang. Pernyataan tersebut dapat kita sederhanakan dalam bentuk teorema berikut ini

***Teorema* 5.1.1**: Pada $\Delta ABC$, jika $BC > AB$, maka $\angle BAC > \angle ACB$.

***Bukti*** : Bentuk garis $AD$ sehinga $BD = AB$, jadi $\Delta ABD$ merupakan segitiga sama kaki. Maka $\angle DAB = \angle ADB$

$\angle ADB = \angle DAC + \angle ACD$

$\angle DAB = \angle DAC + \angle ACD$

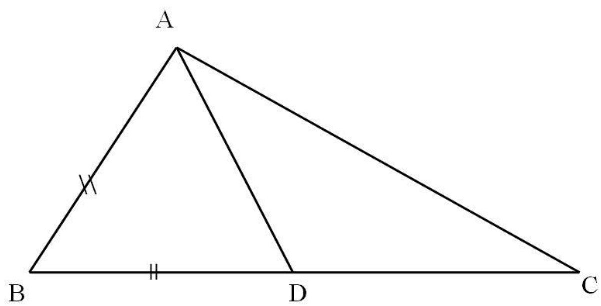
Sehingga

$\angle DAB + \angle DAC > \angle DAC + \angle ACD$

$\angle BAC > \angle ACD$

atau

$\angle BAC > \angle ACB$ ♥



Gambar 5.1.1

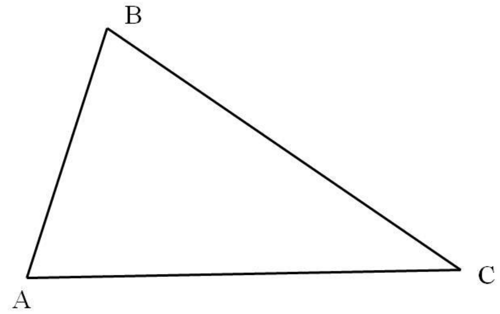
Kebalikan dari teorema di atas juga akan berlaku, maksudnya jika pada sebuah segitiga, dua buah sudut pada segitiga tersebut tidak sama, maka sisi terpanjang akan berada didepan sudut terbesar, yang dalam bentuk teorema dapat dituliskan sebagai berikut

***Teorema* 5.1.2** : Jika pada $\Delta ABC$, $\angle A > \angle C$, maka $BC > AB$

***Bukti*** : Perhatikan gambar 6.1 2. Misalkan $\angle A > \angle C$, maka hubungan antara $BC$ dengan $AB$ ada 3 kemungkinan yaitu

1. $BC < AB$
2. $B$C = $AB$
3. $BC > AB$

Bila $BC <$ $A$B maka menurut teorema 5.1.1 di atas, mestilah $\angle A < \angle$ C yang kontradiksi dengan premis.
Selanjutnya jika $BC = AB$ maka mestilah $\angle A = \angle C$, yang juga kontradisi dengan premis, maka yang berlaku adalah kemungkinan ke 3 yaitu $BC > AB$.



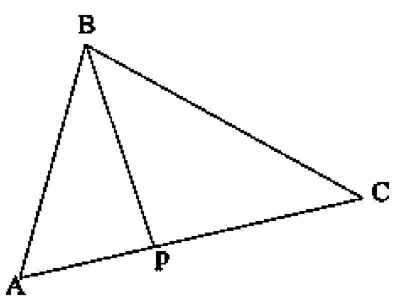
Gambar 5.1.2

***Teorema 5.1.3. (Teorema bisektor sudut)***.
Misalkan $ABC$ sebarang segitiga dengan $BP$ adalah bisektor $\angle B$, maka berlaku

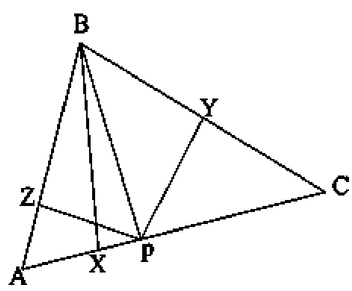
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PC} \Leftrightarrow \angle ABP = \angle PBC.$$

***Bukti*** : $\Leftarrow$ dari titik P buat garis yang tegak lurus ke sisi AB dan BC, katakan titik berpotongan di titik Y dan Z seperti pada gambar 5.1.3b kemudian dari titik B buat garis tegak lurus ke $AC$ dan katakana titik potongnya adalah $X$. maka jelas berlaku $PZ = PY$, kemudian dari kesebangunan $\Delta ABX$ dengan segitiga $APZ$, maka diperoleh

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BX}{PZ} = \frac{BX}{PY}$$



Gambar 5.1.3a



Gambar 6.1. b

Selanjutnya dari kesebangunan $\Delta$CBX dengan $\Delta$CPY maka diperoleh $\frac{CB}{CP} = \frac{BX}{PY}$ , sehingga diperoleh

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AP \cdot BX}{PY} \cdot \frac{PY}{CP \cdot BX} = \frac{AP}{CP}.$$

$\Rightarrow$ Misalkan $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{CP}$. misalkan $P'$ titik potong bisektor sudut $B$ ke $AC$, akan ditunjukkan $P = P'$. Karena P′ juga titik potong dari bisektor sudut B, maka berdasarkan premis berlaku $\frac{AB}{BC} = \frac{AP'}{CP'}$. yang menyebabkan $\frac{AP'}{CP'} = \frac{AP}{CP}$. kondisi ini menyebabkan $P = P'$ ♥

### 5.2. *Panjang Garis Tinggi*

Sebelum membuktikan panjang garis tinggi, berikut ini diberikan terlebih dahulu tentang perbandingan panjang dua buah garis tinggi dalam suatu segitiga.

***Teorema 5.2.1*** : Dua garis tinggi dalam segitiga berbanding terbalik dengan sisinya

***Bukti*** : Misalkan kita punya $\Delta ABC$, sebut $t_a$ dan $t_b$ masing-masing garis tinggi dari titik $A$ dan $B$. Akan dibuktikan berlaku

$$\frac{t_a}{t_b} = \frac{b}{a}$$

Perhatikan gambar disebelah, dari sisi garis tinggi $t_a$ dan $t_b$ maka luas $\Delta ABC$ dapat ditentukan dari dua sisi yaitu

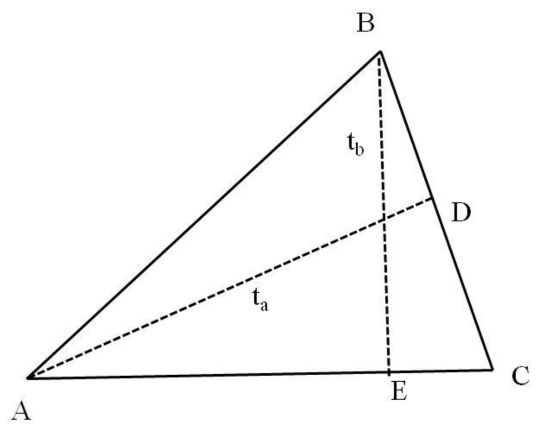
$$L\Delta ABC = ½\, AC.t_b = ½\, b.t_b$$

dan

$$L\Delta ABC = ½\, CB.t_a = ½\, a.t_a$$

Maka diperoleh

$$\frac{t_a}{t_b} = \frac{b}{a}$$



Gambar 5.2.1

Berikut ini akan diberikan cara standart yang digunakan dalam berbagai buku teks, yang selanjutnya nanti juga akan dibahas berbagai alternatif dalam membuktikan panjang garis tinggi tersebut.

***Teorem**a* 5.2.7 : Misalkan pada sebuah ΔABC, dengan panjang sisi masing-masing adalah $a$, $b$ dan $c$. bila $t_a$, $t_b$ dan $t_c$ masing-masing menyatakan panjang garis tinggi dari titik *A*, *B* dan *C*, maka

$$t_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a).(s-b).(s-c)}$$

$$t_b = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a).(s-b).(s-c)}$$

$$t_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a).(s-b).(s-c)}$$

***Bukti*** : karena $s = a + b + c$, maka

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2s - 2c = 2\ (s - c)$$

dengan cara yang sama akan dipreoleh

$$a - b + c = 2(s - b)$$

$$-a + b + c = 2(s - a)$$

Selanjutnya perhatikan gambar 5.2.2

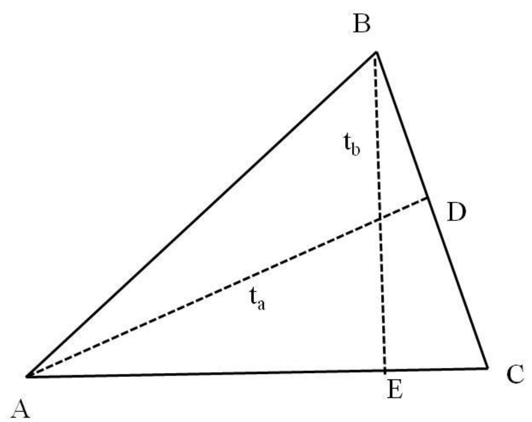
$$t_a^2 = c^2 - p^2$$

Dan dari teorema proyeksi pada segitiga lancip/tumpul diperoleh

$$p = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

Maka

$$t_a^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)^2$$




Gambar 5.2.2

$$t_a^2 = \left(c + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right).\left(c - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$t_a^2 = \left(\frac{2ac+c^2+a^2-b^2}{2a}\right).\left(\frac{2ac-c^2-a^2+b^2}{2a}\right)$$

$$t_a^2 = \left(\frac{(a+c)^2-b^2}{2a}\right).\left(\frac{b^2-(a-c)^2}{2a}\right)$$

$$t_a^2 = \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b-a+c)(b+a-c)}{4a^2}$$

$$t_a^2 = \frac{2s.2(s-b)(s-a)(s-c)}{4a^2}$$

$$t_a^2 = \frac{4}{a^2}(s.(s-b)(s-a)(s-c))$$

$$t_a = \frac{2}{a}\sqrt{s.(s-b)(s-a)(s-c)}$$

Untuk membuktikan $t_b$ dan $t_c$ dapat dilakukan dengan cara yang serupa sebagai latihan.

***Alternatif Bukti :***

Alternatif lain yang juga banyak digunakan dalam berbagai buku teks adalah dengan hanya menggunakan teorema Pythagoras, yaitu sebagai berikut :

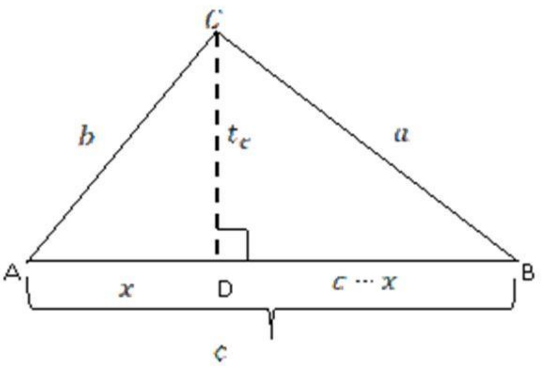
Perhatikan Gambar 5.2.3, pada $\Delta ABC$ ditarik garis tinggi dari titik $\angle C$ ke sisi hadapannya yaitu $AB$ sehingga titik $CD \perp AB$, garis $CD$ merupakan garis tinggi.

Dengan menggunakan Teorema Phytagoras pada segitiga $ACD$ berlaku

$$t_c^{\,2} = b^2 - x^2. \qquad (5.2.1)$$

Kemudian dengan konsep yang sama pada segitiga $BCD$ diperoleh

$$t_c^{\,2} = a^2 - (c-x)^2. \qquad (5.2.2)$$




Gambar 5.2.3

Bila persamaan (5.2.1) disubstitusikan ke persamaan (5.2.2) diperoleh

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2,$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2,$$

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}. \tag{5.2.3}$$

Lalu bila persamaan (5.2.3) disubstitusikan ke persamaan (5.2.1) maka diperoleh

$$t_c^{\ 2} = b^2 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)^2,$$

$$t_c^{\ 2} = \left( b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)\left( b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right),$$

$$t_c^{\ 2} = \left( \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)\left( \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} \right),$$

$$t_c^{\ 2} = \left( \frac{(b+c) - a^2}{2c} \right)\left( \frac{a^2 - (b+c)^2}{2c} \right),$$

$$t_c^{\ 2} = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)}{4c^2}. \tag{5.2.4}$$

Karena $s$ adalah setengah keliling segitiga maka $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ diperoleh

$$a + b + c = 2s, \tag{5.2.5}$$

$$b + c - a = 2(s-a), \tag{5.2.6}$$

$$a + b - c = 2(s-c), \tag{5.2.7}$$

$$a - b + c = 2(s-b). \tag{5.2.8}$$

Bila persamaan (5.2.5), (5.2.6), (5.2.8) dan (5.2.8) disubtitusikan ke (5.2.4) maka diperoleh rumus garis tinggi yaitu:

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}. \qquad \blacksquare$$

### 5.3. *Panjang Garis Tinggi dengan Aturan Kosinus*

Pada bagian ini akan dibahas bagaimana menurunkan rumus panjang garis tinggi suatu segitiga pada Teorema 5.2.1 dengan menggunakan aturan kosinus. Alternatif ini dilakukan dengan tiga cara. Selain itu, alternatif ini dibahas pula pada segitiga sembarang untuk kasus segitiga lancip dan segitiga tumpul.

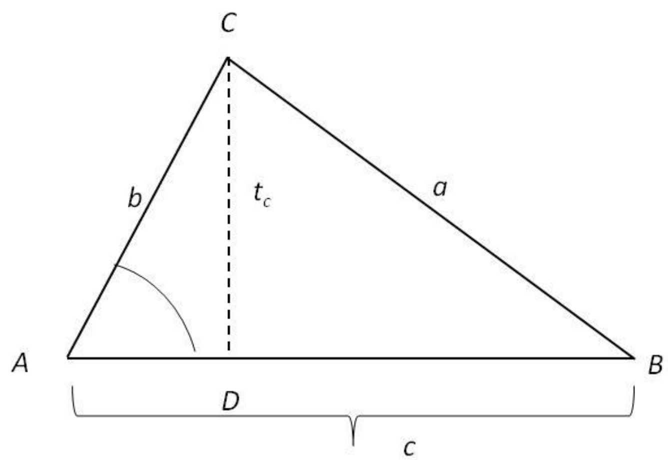
***Cara* I**

*Kasus segitiga lancip*

Perhatikan $\Delta ABC$ pada Gambar 5.3.1. Perhatikan $\Delta ACD$ dengan menggunakan konsep trigonometri pada segitiga siku-siku diperoleh

$$\cos\ \alpha = \frac{AD}{b}. \qquad (5.3.1)$$

Kemudian pada $\Delta ABC$ berdasarkan aturan kosinus berlaku




Gambar 5.3.1

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad (5.3.2)$$

Bila persamaan (5.3.2) disubstitusikan ke dalam persamaan (5.3.1) diperoleh

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{AD}{b},$$

$$AD = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}. \qquad (5.3.3)$$

Perhatikan kembali $\Delta ACD$ berdasarkan Teorema Phytagoras diketahui bahwa

$$t_c^{\ 2} = b^2 - AD^{2.},$$

$$= b^2 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)^2 ,$$

$$= \left( b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)\left( b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right),$$

$$= \left( \frac{(b+c) - a^2}{2c} \right)\left( \frac{a^2 - (b+c)^2}{2c} \right),$$

$$t_c^{\ 2} = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)}{4c^2} . \qquad (5.3.4)$$

Bila persamaan (5.2.5), (5.2.6), (5.2.7) dan (5.2.8) disubstitusikan ke persamaan (5.3.4) maka diperoleh rumus garis tinggi seperti yang dinyatakan dalam Teorema 2.9

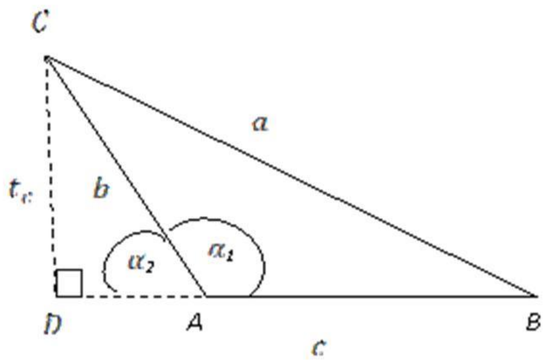
$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c} . \qquad \blacksquare$$

***Kasus segitiga tumpul***

Perhatikan $\Delta ABC$ tumpul di $\angle A$ pada Gambar 3.2. Perhatikan $\Delta ACD$ dengan menggunakan konsep trigonometri pada segitiga siku-siku diketahui bahwa

$$\cos \alpha_2 = \frac{AD}{b} . \qquad (5.3.5)$$

Kemudian pada $\Delta ABC$ berdasarkan Aturan Kosinus berlaku




Gambar 3.2

$$\cos \alpha_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} . \qquad (5.3.6)$$

Dengan menggunakan konsep sudut berelasi pada trigonometri diketahui bahwa

$$\cos \alpha_2 = \cos(180 - \alpha_1) ,$$

$$\cos \alpha_2 = -(\cos \alpha_1)\,. \tag{5.3.7}$$

Bila persamaan (5.3.6) disubstitusikan ke persamaan (5.3.7) diperoleh

$$\cos \alpha_2 = -\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right),$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}\,. \tag{5.3.8}$$

Bila persamaan (5.3.8) disubstitusikan ke persamaan (5.3.5) diperoleh

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc} = \frac{AD}{b}\,,$$

$$AD = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}\,. \tag{5.3.9}$$

Perhatikan $\Delta ACD$ berdasarkan Teorema Phytagoras diketahui bahwa

$$t_c{}^2 = b^2 - AD^2 \tag{5.3.10}$$

Bila persaman (5.3.9) disubstitusikan ke persamaan (5.3.10) diperoleh

$$t_c{}^2 = b^2 - AD^2\,,$$

$$= b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}\right)^2,$$

$$= \left(b + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}\right)\left(b - \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}\right),$$

$$= \left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c}\right)\left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right),$$

$$= \left(\frac{a^2 - (b+c)^2}{2c}\right)\left(\frac{(b+c) - a^2}{2c}\right),$$

$$t_c{}^2 = \frac{(a+c+b)(a+c-b(b-a+c)(b+a-c)}{4c^2}\,. \tag{5.3.11}$$

Bila persamaan (5.2.5), (5.2.6), (5.2.7) dan (5.2.8) disubtitusikan ke persamaan (5.3.11) maka diperoleh rumus garis tinggi seperti yang dinyatakan dalam Teorema 2.9.

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}. \qquad \blacksquare$$

Cara yang serupa juga bisa dilakukan untuk menurunkan rumus panjang garis tinggi dari titik $\angle A$ yaitu $t_a$ dan panjang garis tinggi dari titik $\angle B$ yaitu $t_b$.

***Cara* II**

*Kasus segitiga lancip*

Perhatikan kembali Gambar 5.3.1, pandang $\Delta ACD$ dengan menggunakan konsep trigonometri pada segitiga siku-siku berlaku

$$t_c^{\,2} = b^2 \sin^2 \alpha. \tag{5.3.12}$$

Dengan menggunakan konsep identitas trigonometri berlaku

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha,$$

$$\sin^2 \alpha = (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha). \tag{5.3.13}$$

Bila persamaan (5.3.13) disubstitusikan ke persamaan (5.3.12) diperoleh

$$t_c^{\,2} = b^2 (1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha). \tag{5.3.14}$$

Bila persamaan (5.3.2) disubstitusikan ke dalam persamaan (5.3.14) maka diperoleh

$$t_c^{\,2} = b^2\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right),$$

$$= b^2\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\right),$$

$$= \left(\frac{(b+c)-a^2}{2c}\right)\left(\frac{a^2-(b+c)^2}{2c}\right),$$

$$t_c^{\,2} = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)}{4c^2}. \tag{5.3.15}$$

Bila persamaan (5.2.5), (5.2.6), (5.2.7) dan (5.2.8) disubtitusikan ke persamaan (5.3.15) maka diperoleh rumus garis tinggi seperti yang dinyatakan dalam Teorema 2.9.

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}. \qquad \blacksquare$$

Cara yang serupa juga bisa dilakukan untuk menurunkan rumus panjang garis tinggi dari titik $\angle A$ yaitu $t_a$ dan panjang garis tinggi dari titik $\angle B$ yaitu $t_b$.

*Kasus Segitiga Tumpul*

Perhatikan kembali Gambar 3.2, pandang $\Delta ACD$ dengan menggunakan konsep trigonometri pada segitiga siku-siku diperoleh

$$t_c^{\,2} = b^2 \sin^2 \alpha_2 . \tag{5.3.16}$$

Dengan menggunakan konsep identitas trigonometri diketahui bahwa

$$\sin^2 \alpha_2 = 1 - \cos^2 \alpha_2 ,$$

$$\sin^2 \alpha_2 = (1-\cos\alpha_2)(1+\cos\alpha_2) . \tag{5.3.17}$$

Bila persamaan (5.3.17) disubstitusikan ke persamaan (5.3.16) diperoleh

$$t_c^{\,2} = b^2(1-\cos\alpha_2)(1+\cos\alpha_2) . \tag{5.3.18}$$

Kemudian bila persamaan (5.3.8) pada cara 1 disubstitusikan ke dalam persamaan (5.3.18) diperoleh

$$\begin{aligned}
t_c^{\,2} &= b^2\left(1-\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)\left(1+\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right),\\
&= b^2\left(\frac{2bc-a^2+b^2+c^2}{2bc}\right)\left(\frac{2bc+a^2-b^2-c^2}{2bc}\right),\\
&= \left(\frac{(b+c)-a^2}{2c}\right)\left(\frac{a^2-(b+c)^2}{2c}\right),
\end{aligned}$$

$$t_c^{\,2} = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)}{4c^2} . \tag{5.3.19}$$

Bila persamaan (5.2.5), (5.2.6), (5.2.7) dan (5.2.8) disubtitusikan ke persamaan (5.3.19) maka diperoleh rumus garis tinggi seperti yang dinyatakan dalam Teorema 2.9.

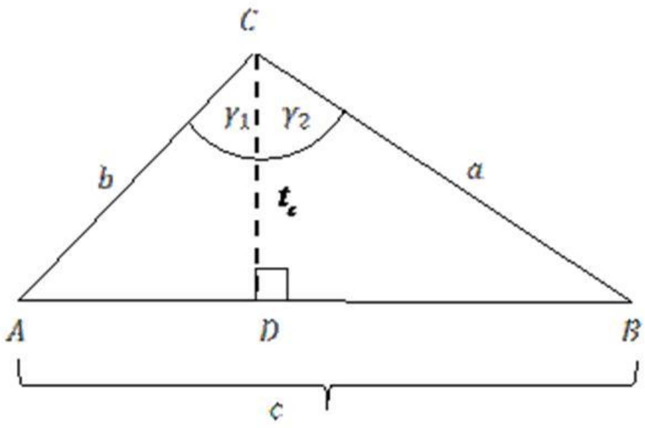
$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}. \qquad \blacksquare$$

Cara yang serupa juga bisa dilakukan untuk menurunkan rumus panjang garis tinggi dari titik $\angle A$ yaitu $t_a$ dan panjang garis tinggi dari titik $\angle B$ yaitu $t_b$.

***Cara* III**

*Kasus segitiga lancip*

Perhatikan $\Delta ABC$ lancip pada Gambar 5.3.3.




Gambar 5.3.3

Perhatikan $\Delta ACD$ dengan menggunakan konsep trigonometri diketahui bahwa

$$\sin\gamma_1 = \frac{AD}{b} \quad \text{dan}$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{t_c}{b} \qquad (5.3.20)$$

Kemudian dengan menggunakan konsep yang sama pada $\Delta BCD$ diketahui bahwa

$$\sin\gamma_2 = \frac{BD}{a} \text{ dan } \cos\gamma_2 = \frac{t_c}{a} \qquad (5.3.21)$$

Perhatikan $\Delta ABC$ berdasarkan Aturan Kosinus pada Teorema 2.15 diperoleh

$$\cos(\gamma_1+\gamma_2) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \qquad (5.3.22)$$

Dengan menggunakan konsep penjumlahan sudut pada trigonometri berlaku

$$\cos(\gamma_1+\gamma_2) = \cos\gamma_1.\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1.\sin\gamma_2$$

$$\cos(\gamma_1+\gamma_2) = \frac{t_c}{b}.\frac{t_c}{a} - \frac{AD}{b}.\frac{BD}{a},$$

$$= \frac{t_c^{\,2} - AD(c-AD)}{ab},$$

$$\cos(\gamma_1+\gamma_2) = \frac{t_c^{\,2} + AD^2 - cAD}{ab}. \qquad (5.3.23)$$

Perhatikan kembali $\Delta ACD$ berdasarkan Teorema Phytagoras berlaku

$$b^2 = t_c{}^2 + AD^2. \tag{5.3.24}$$

Lalu bila persamaan (5.3.24) disubstitusikan ke dalam persamaan (5.3.23) maka diperoleh

$$\cos(\gamma_1 + \gamma_2) = \frac{b^2 - cAD}{ab}. \tag{5.3.25}$$

Bila persamaan (5.3.22) disubstitusikan ke dalam persamaan (5.3.25) maka diperoleh

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{b^2 - cAD}{ab},$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2(b^2 - cAD),$$

$$2cAD = b^2 + c^2 - a^2,$$

$$AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}. \tag{5.3.26}$$

Kemudian bila persamaan (5.3.26) disubstitusikan ke persamaan (5.3.24) maka diperoleh

$$b^2 = t_c{}^2 + \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2,$$

$$t_c{}^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2,$$

$$t_c{}^2 = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right),$$

$$= \left(\frac{(b+c) - a^2}{2c}\right)\left(\frac{a^2 - (b+c)^2}{2c}\right),$$

$$t_c{}^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)}{4c^2}. \tag{5.3.27}$$

Bila persamaan (5.2.5), (5.2.6), (5.2.7) dan (5.2.8) disubtitusikan ke persamaan (5.3.27) maka diperoleh rumus garis tinggi seperti yang dinyatakan dalam Teorema 2.9.

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}. \qquad \blacksquare$$

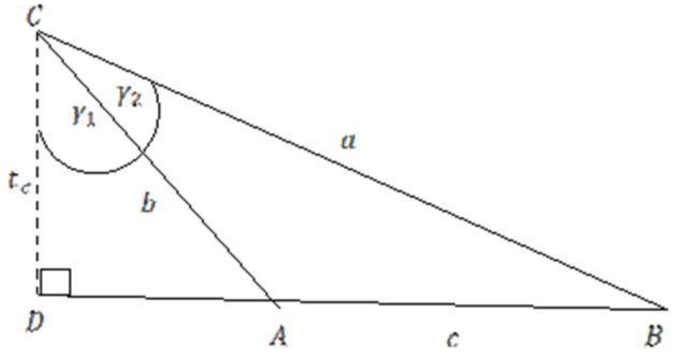
Cara yang serupa juga bisa dilakukan untuk menurunkan rumus panjang garis tinggi dari titik $\angle A$ yaitu $t_a$ dan panjang garis tinggi dari titik $\angle B$ yaitu $t_b$.

*Kasus segitiga tumpul*

Perhatikan Gambar 5.3.4. Perhatikan $\Delta ACD$ dengan menggunakan konsep trigonometri maka diperoleh

$$\sin\gamma_1 = \frac{AD}{b} \text{ dan}$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{t_c}{b}. \quad (5.3.28)$$




Gambar 5.3.4

Kemudian dengan konsep yang sama pada $\Delta BCD$ diperoleh

$$\sin(\gamma_1+\gamma_2) = \frac{BD}{a} \text{ dan } \quad \cos(\gamma_1+\gamma_2) = \frac{t_c}{a}. \quad (5.3.29)$$

Perhatikan $\Delta ABC$ berdasarkan Aturan Kosinus pada Teorema 2.15 diketahui bahwa

$$\cos\gamma_2 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \quad (5.3.30)$$

Lalu dengan menggunakan konsep penjumlahan sudut pada trigonometri sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\cos\gamma_2 &= \cos(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1),\\ &= \cos(\gamma_1+\gamma_2).\cos\gamma_1 - \sin(\gamma_1+\gamma_2).\sin\gamma_1,\\ &= \frac{t_c}{a}.\frac{t_c}{b} - \frac{BD}{a}.\frac{AD}{b},\\ &= \frac{t_c^{\,2} - BD(c-BD)}{ab},\end{aligned}$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{t_c^{\ 2} + BD^2 - cBD}{ab}. \tag{5.3.31}$$

Perhatikan $\Delta BCD$ berdasarkan Teorema Phytagoras berlaku

$$a^2 = t_c^{\ 2} + BD^2. \tag{5.3.32}$$

Bila persamaan (5.3.32) disubstitusikan ke dalam persamaan (5.3.31) diperoleh

$$\cos \gamma_2 = \frac{a^2 - cBD}{ab}. \tag{5.3.33}$$

Bila persamaan (5.3.30) disubstitusikan ke dalam persamaan (5.3.33) diperoleh

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{b^2 - cBD}{ab},$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2(b^2 - cBD),$$

$$2cBD = a^2 + c^2 - b^2,$$

$$BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}. \tag{5.3.34}$$

Bila persamaan (5.3.33) disubstitusikan ke persamaan (5.3.31) diperoleh

$$a^2 = t_c^{\ 2} + \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2,$$

$$t_c^{\ 2} = a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2,$$

$$= \left(a + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)\left(a - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right),$$

$$= \left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2c}\right)\left(\frac{2ac + a^2 + c^2 + b^2}{2c}\right),$$

$$= \left(\frac{b^2 - (a-c)^2}{2c}\right)\left(\frac{(a+c)^2 - b^2}{2c}\right),$$

$$t_c^{\ 2} = \frac{(b - a + c)(b + a - c)(a + c + b)(a + c - b)}{4c^2}. \tag{5.3.35}$$

Bila persamaan (5.2.5), (5.2.6), (5.2.7) dan (5.2.8) disubtitusikan ke persamaan (5.3.35) maka diperoleh rumus garis tinggi seperti yang dinyatakan dalam Teorema 2.9.

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}. \qquad \blacksquare$$

Cara yang serupa juga bisa dilakukan untuk menurunkan rumus panjang garis tinggi dari titik $\angle A$ yaitu $t_a$ dan panjang garis tinggi dari titik $\angle B$ yaitu $t_b$.

Selain tiga cara yang digunakan dengan aturan kosinus terdapat pula cara lain untuk menentukan panjang garis tinggi yaitu dengan konsep luas segitiga apabila satu sudut diketahui .

## 5.4. Garis Tinggi dengan Formula Heron

Luas dari segitiga secara umum adalah setengah dari perkalian sisi alas dengan garis tingginya. Dengan demikian terdapat hubungan antara garis tinggi dengan luas segitiga. Oleh karena itu, dengan konsep luas akan diperoleh panjang garis tinggi secara mudah.

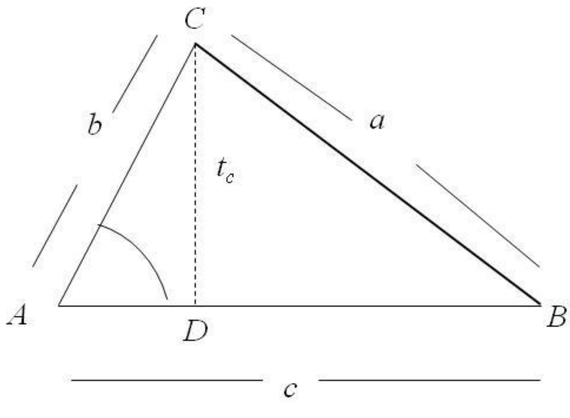
*Kasus segitiga lancip*

Perhatikan Gambar 5.3.5. Perhatikan $\Delta ACD$ dengan konsep trigonometri pada segitiga siku-siku diperoleh

$$t_c = b \sin \angle A. \qquad (5.3.36)$$

Dari rumus luas segitiga $L\,\Delta ABC = \frac{1}{2} bc \sin \angle A$ maka diperoleh

$$\sin \angle A = \frac{2L}{bc}. \qquad (5.3.37)$$




Gambar 5.3.5

Dengan mensubstitusikan rumus luas segitiga pada Formula Heron maka diperoleh

$$\sin \angle A = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}. \quad (5.3.38)$$

Bila persamaan (5.3.38) disubstitusikan ke dalam persamaan (5.3.36) maka diperoleh maka diperoleh rumus garis tinggi seperti yang dinyatakan dalam Teorema 2.9

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}. \qquad \blacksquare$$

Cara yang serupa juga bisa dilakukan untuk menurunkan rumus panjang garis tinggi dari titik $\angle A$ yaitu $t_a$ dan panjang garis tinggi dari titik $\angle B$ yaitu $t_b$.

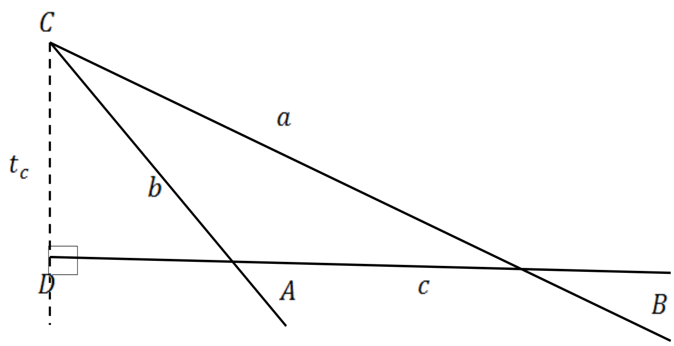
*Kasus segitiga tumpul*

Perhatikan $\Delta ABC$ pada Gambar 5.3.6. Dengan menggunakan konsep trigonometri pada segitiga siku-siku pada $\Delta CBD$ diperoleh

$$t_c = a \sin \angle CBD. \quad (5.3.39)$$

Dari rumus luas segitiga $L\Delta ABC = \frac{1}{2} ac \sin \angle BCD$ maka diperoleh

$$\sin \angle CBD = \frac{2L\,\Delta ABC}{ac}. \quad (5.3.40)$$




Gambar 5.3.6:

Dengan mensubstitusikan Formula Heron ke persamaan (5.3.40) diperoleh

$$\sin \angle CBD = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{ac}. \quad (5.3.41)$$

Bila persamaan (5.3.41) disubstitusikan ke dalam persamaan (5.4.39) maka diperoleh rumus garis tinggi seperti yang dinyatakan dalam Teorema 2.9

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}. \qquad \blacksquare$$

Cara yang serupa juga bisa dilakukan untuk menurunkan rumus panjang garis tinggi dari titik $\angle A$ yaitu $t_a$ dan panjang garis tinggi dari titik $\angle B$ yaitu $t_b$.

## 5.5. *Panjang Garis Tinggi dengan Menarik Garis Bagi*

Pada bagian ini akan dibahas bagaimana menurunkan rumus panjang garis tinggi suatu segitiga pada Teorema 5.1.1. dengan konsep dasar kesebangunan dengan menarik garis bagi dari salah satu titik sudut pada segitiga.

***Kasus segitiga lancip***

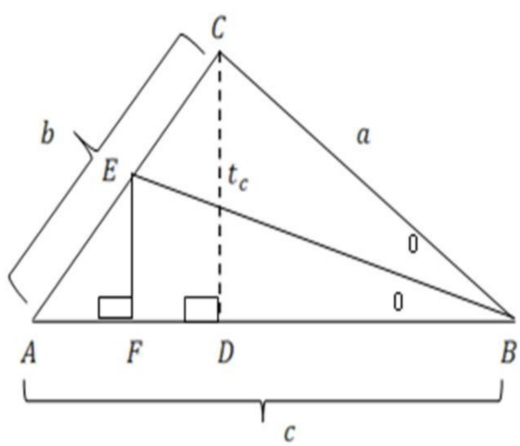
Perhatikan Gambar 5.5.1, pada $\triangle ABC$ lancip ditarik garis bagi dari titik $B$ ke sisi hadapannya $AC$ yaitu $BE$, sehingga sisi $BE$ terbagi menjadi dua bagian yaitu $AE$ dan $EC$. Kemudian dari titik $E$ ditarik garis tegak lurus alas $AB$ yaitu $EF$. Sehingga $AB \perp EF$. Lalu dari titik $C$ ditarik pula garis tinggi ke sisi hadapannya $AB$ sehingga $CD \perp AB$ dan $CD$ merupakan garis tinggi dari titik $C$.

Karena $BE$ adalah garis bagi maka berdasarkan persamaan (2.20) berlaku

$$BE^2 = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right).$$

Kemudian perhatikan $AE$ adalah sisi yang terletak dihadapan garis bagi maka

$$AE = \frac{bc}{a+c}. \qquad (5.5.1)$$




Gambar 5.5.1

Pandang $\Delta ADC$ dan $\Delta AFE$ karena $\angle DAC = \angle EAF$ (sudut yang sama) dan $\angle ADC = \angle AFE$ (sudut siku-siku), berdasarkan kesebangunan dua segitiga maka $\Delta ADC \sim \Delta AFE$, sehingga diperoleh perbandingan sisi-sisinyanya

$$\frac{AC}{DC} = \frac{AE}{FE}. \tag{5.5.2}$$

Bila persamaan (5.4.1) disubstitusikan ke persamaan (5.5.2) diperoleh

$$t_c^{\ 2} = \frac{b^2.EF^2}{\left(\frac{bc}{(a+c)}\right)^2},$$

$$t_c^{\ 2} = \frac{(a+c)^2.EF^2}{c^2}. \tag{5.5.3}$$

Pandang $\Delta BFE$ maka dengan konsep trigonometri berlaku

$$EF^2 = \sin^2\frac{\angle ABC}{2}.BE^2. \tag{5.5.4}$$

Dari konsep setengah sudut dan aturan kosinus maka berlaku

$$\sin^2\frac{\angle ABC}{2} = \frac{1-\cos\angle ABC}{2},$$

$$= \frac{1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)}{2},$$

$$\sin^2\frac{\angle ABC}{2} = \frac{b^2-(a-c)^2}{4ac}. \tag{5.5.5}$$

Bila panjang garis BE dan persamaan (5.5.5) disubstitusikan ke persamaan (5.5.4) diperoleh

$$EF^2 = \frac{b^2-(a-c)^2}{4ac}.ac\left(1-\frac{b^2}{(a+c)^2}\right),$$

$$EF^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)}{4(a+c)^2}. \tag{5.5.6}$$

Bila persamaan (5.5.6) disubstitusikan ke dalam persamaan (5.5.3) diperoleh

$$t_c^{\ 2} = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)}{c^2} \qquad (5.5.7)$$

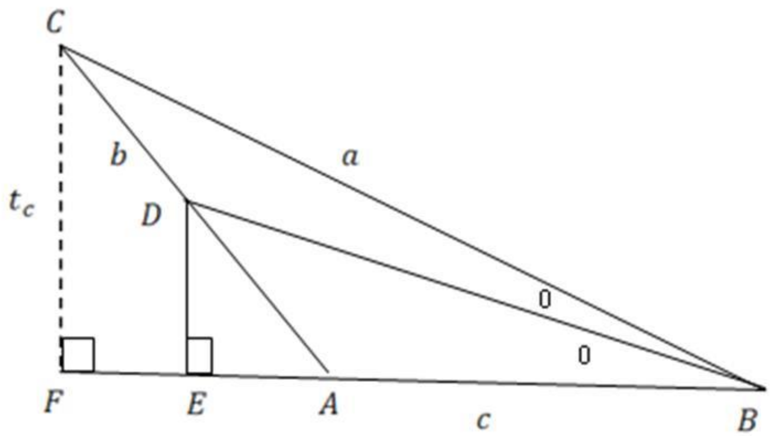
Yang akhirnya menghaqsilkan :

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}. \qquad \blacksquare$$

Cara yang serupa juga bisa dilakukan untuk menurunkan rumus panjang garis tinggi dari titik $\angle A$ yaitu $t_a$ dan panjang garis tinggi dari titik $\angle B$ yaitu $t_b$.

*Kasus Segitiga Tumpul*

Perhatikan Gambar 5.4.2. Pada segitiga $ABC$ tumpul di $\angle A$, ditarik garis bagi dari titik $B$ ke sisi hadapannya $AC$ yaitu $BD$, sehingga sisi $AC$ terbagi menjadi dua bagian yaitu $AD$ dan $DC$. Kemudian dari titik $D$ ditarik garis tegak lurus alas $AB$ yaitu $DE$ sehingga $AB \perp DE$. Lalu dari titik $C$ ditarik pula garis tinggi ke sisi hadapannya $AB$ yaitu $CF$ sehingga $AB \perp CF$ dan $CF$ merupakan garis tinggi.




Gambar 5.5.2

Karena $BD$ adalah garis bagi maka

$$BD^2 = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right) \qquad (5.5.8)$$

Lalu $AD$ adalah sisi yang terletak dihadapan garis bagi maka diperoleh

$$AD = \frac{bc}{a+c} \tag{5.5.9}$$

Pandang $\Delta AFC$ dan $\Delta AED$ karena $\angle CAF = \angle EAD$ (sudut yang sama) dan $\angle ACF = \angle ADE$, berdasarkan, maka $\Delta AFC \sim \Delta AED$ sehingga diperoleh perbandingan sisi-sisinya

$$\frac{FC}{ED} = \frac{AC}{AD}. \tag{5.5.10}$$

Bila persamaan (5.4.9) disubstitusikan ke persamaan (5.5.10) diperoleh

$$t_c^{\;2} = \frac{b^2.DE^2}{\left(\frac{bc}{(a+c)}\right)^2},$$

$$t_c^{\;2} = \frac{(a+c)^2.DE^2}{c^2}. \tag{5.5.11}$$

Lalu pandang $\Delta BDE$ dengan menggunakan konsep trigonometri maka berlaku

$$DE^2 = \sin^2\frac{\angle ABC}{2}.BD^2. \tag{5.5.12}$$

Bila nilai sin setengah sudut $B$ pada persamaan (5.5.5) disubstitusikan ke persamaan (5.5.12) maka diperoleh

$$DE^2 = \frac{b^2-(a-c)^2}{4ac}.ac\left(1-\frac{b^2}{(a+c)^2}\right),$$

$$DE^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)}{4(a+c)^2}. \tag{5.5.13}$$

Bila persamaan (5.5.13) disubstitusikan ke dalam persamaan (5.5.11) diperoleh

$$t_c^{\;2} = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)}{c^2}. \tag{5.5.14}$$

Yang akhirnya menghasilkan.

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}. \qquad \blacksquare$$

Cara yang serupa juga bisa dilakukan untuk menurunkan rumus panjang garis tinggi dari titik $\angle A$ yaitu $t_a$ dan panjang garis tinggi dari titik $\angle B$ yaitu $t_b$.

## 5.6. *Panjang Garis Tinggi dengan Jari-Jari Lingkaran Luar dan Belah Ketupat.*

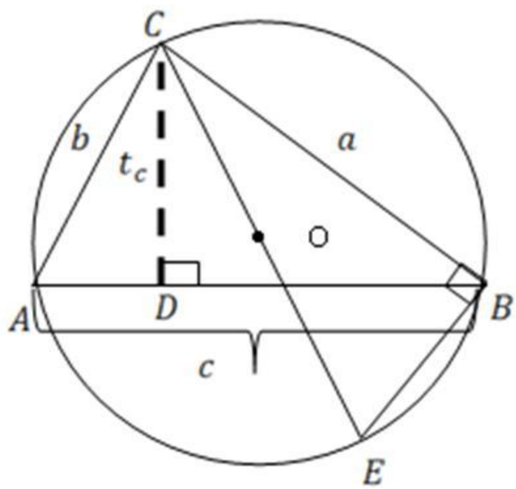
Pada bagian ini dibahas bagaimana menurunkan rumus panjang garis tinggi suatu segitiga pada Teorema 5.1.1 dengan konsep kesebangunan menggunakan jari-jari lingkaran luar.

*Kasus segitiga lancip*

Perhatikan Gambar 5.6.1, pada $\Delta ABC$ ketiga titik sudut dihubungkan sehingga terbentuk lingkaran luar, dan dari titik sudut $C$ ditarik garis tinggi kesisi hadapannya yaitu $CD$, selain itu pada titik $C$ juga ditarik garis tengah atau diameter lingkaran. Misalkan $CD = t_C$ dan $CE = 2R$, sisi-sisi $a, b$ dan $c$ merupakan panjang sisi-sisi $\Delta ABC$ .

Perhatikan $\Delta BEC$ dan $\Delta DCA$ pada Gambar 5.6.1 karena $\angle CAD = \angle CEB$ (menghadap busur yang sama), $\angle CDA = \angle CBE$ ( siku-siku = $90^\circ$), berdasarkan teorema kesebangunan pada Akibat 2.7 maka dapat ditunjukkan $\Delta BEC \sim \Delta DAC$ sehingga diperoleh perbandingan sisi-sisinya

$$\frac{BC}{DC} = \frac{EC}{AC}. \qquad (5.6.1)$$




Gambar 5.6.1

Karena $CD = t_C$ dan $CE = 2R$, bila disubstitusikan ke persamaan (5.6.1) maka diperoleh

$$t_c = \frac{a.b}{2R}. \qquad (5.6.2)$$

Lalu bila nilai $R$ pada Teorema 2.19 disubstitusikan ke persamaan (5.6.2) diperoleh :

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}. \qquad \blacksquare$$

Cara yang serupa juga bisa dilakukan untuk menurunkan rumus panjang garis tinggi dari titik $\angle A$ yaitu $t_a$ dan panjang garis tinggi dari titik $\angle B$ yaitu $t_b$.

***Kasus segitiga tumpul***

Pada $\Delta ABC$ tumpul $\angle A > 90^\circ$, ketiga titik sudut dihubungkan sehingga terbentuk lingkaran luar, dan dari titik sudut $C$ ditarik garis tinggi kesisi hadapannya yaitu $CD$, selain itu pada titik $C$ juga ditarik garis tengah atau diameter lingkaran. Jika Misalkan $CD = t_C$ dan $CE = 2R$, sisi-sisi $a, b$ dan $c$ merupakan panjang sisi-sisi $\Delta ABC$ perhatikan Gambar 5.6.2. Perhatikan $\Delta BEC$ dan $\Delta DCA$ pada Gambar 5.6.2 karena $\angle CAD = \angle CEB$ (menghadap busur yang sama), $\angle CDA = \angle CBE$ ( siku-siku = $90^\circ$), berdasarkan kesebangunan maka dapat ditunjukkan $\Delta BEC \sim \Delta DAC$, Karena $\Delta BEC \sim \Delta DAC$ sehingga diperoleh

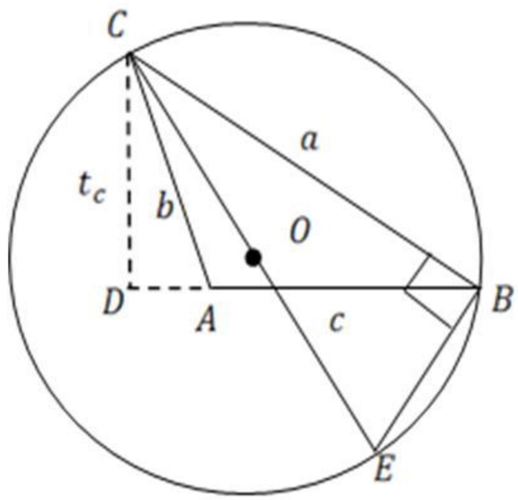
$$\frac{BC}{DC} = \frac{EC}{AC}. \qquad (5.6.3)$$

Jika $CD = t_C$ dan $CE = 2R$, disubstitusikan ke persamaan (5.6.3) maka diperoleh,

$$t_c = \frac{a.b}{2R}. \qquad (5.5.4)$$

Bila nilai $R$ disubstitusikan ke persamaan (5.6.4) maka diperoleh rumus garis tinggi sebagai berikut :

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}$$




Gambar 5.6.2

Cara yang serupa juga bisa dilakukan untuk menurunkan rumus panjang g[redacted]is tinggi dari titik $\angle A$ yaitu $t_a$ dan panjang garis tinggi dari titik $\angle B$ yaitu $t_b$.

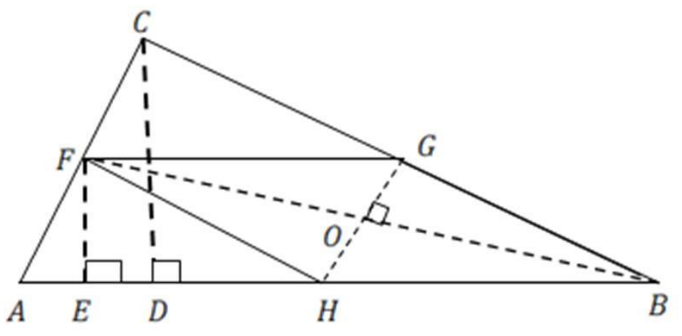
Selain dengan cara menarik garis bagi dan mengkonstruksi lingkaran luar segitiga terdapat pula cara lain untuk menurunkan rumus panjang garis pada suatu segitiga dengan konsep kesebangunan yaitu dengan mengkonstruksi segitiga.

***Dengan Belah Ketupat***

Pada bagian ini akan dibahas alternatif menurunkan rumus panjang garis tinggi pada segitiga dengan mengkonstruksi belah ketupat di dalam segitiga. Lalu melalui belah ketupat tersebut diturunkan rumus panjang garis tinggi melalui konsep kesebangunan.

*Kasus segitiga lancip*

Perhatikan Gambar 5.5.3, pada $\Delta ABC$, akan dikontruksikan belah ketupat yaitu dengan cara menarik garis bagi dari titik $B$ yaitu $BD$ ke sisi hadapannya , lalu pada $AB$ dikonstruksi $HB$ dan pada $BC$ dikonstruksi $BG$ sehingga $HB = BG$, hubungkan titik $F$ ke titik $H$ sehingga $FH$ sejajar $BG$, selanjutnya hubungkan titik $F$ ke $G$ sehingga $FG$ sejajar $HB$. Menggunakan konstruksi garis-garis sejajar tersebut maka terbentuk bangun datar belah ketupat $BHFG$ di dalam $\Delta ABC$. Kemudian tarik garis tinggi dari titik $\angle C$ ke sisi hadapannya yaitu $AB$ sehingga titik $CD \perp AB$, garis $CD$ merupakan garis tinggi dan misalkan $CD = t_c$. Selain itu dari titik $F$ ditarik pula garis tegak lurus ke $AB$ sehingga $EF \perp AB$. Misalkan pada $\Delta ABC$, panjang sisi masing-masing adalah $a, b$, dan $c$ .




Gambar 5.6.3

Menggunakan Gambar 5.6.3 akan dibuktikan rumus panjang garis tinggi dengan dua cara yang berbeda namun tetap menggunakan konsep dasar kesebangunan.

***Cara* 1**

**Bukti.** Perhatikan Gambar 5.6.3, misalkan $CD = t_c$ dan $a, b$ dan $c$ menyatakan panjang sisi $BC, AC$ dan $AB$. $BF$ adalah garis bagi, berdasarkan persamaan di atas diperoleh

$$BF^2 = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right). \quad (5.6.5)$$

Jika $BF$ adalah garis bagi maka berdasarkan persamaan di atas diperoleh

$$AF = \frac{bc}{a+c}. \quad (5.6.6)$$

Pandang $\Delta HFA \sim \Delta BCA$ karena $\angle CBA = \angle FHE$ (sudut sehadap) dan $\angle FAH = \angle CAB$, berdasarkan kesebangunan maka $\Delta HFA \sim \Delta BCA$ sehingga diperoleh

$$\frac{HF}{a} = \frac{AF}{b}. \quad (5.6.7)$$

Bila persamaan (5.5.6) disubstitusikan ke persamaan (5.6.7) diperoleh

$$FH = \frac{ac}{a+c}. \quad (5.6.8)$$

Karena $BHFG$ adalah belah ketupat maka diperoleh

$$FH = HB = BG = GH = \frac{ac}{a+c}. \quad (5.6.9)$$

Pandang $\Delta BEF$ dan $\Delta BOH$ karena $\angle FBE = \angle HBO$ (sudut yang sama) dan $\angle FEH = \angle HOB = 90^0$, maka juga akan diperoleh $\Delta BEF \sim \Delta BOH$ diperoleh perbandingan sisi-sisinya

$$\frac{BF}{BH} = \frac{BE}{BO}, \quad (5.6.10)$$

Kemudian dengan mensubtitusikan $BO = BF/2$ Berdasarkan persamaan (5.6.5) dan (5.6.9) ke persamaan (5.6.10) diperoleh

$$BE = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2(a+c)}. \quad (5.6.11)$$

Pandang $\Delta EHF$ dan $\Delta DBC$ karena $\angle FEH = \angle CDB = 90^0$ dan $\angle CBA = \angle FHE$ (sudut sehadap), maka $\Delta EHF \sim \Delta DBC$ diperoleh perbandingan sisi-sisinya

$$\frac{EH}{BD} = \frac{HF}{a}, \tag{5.6.12}$$

Bila persamaan (5.5.8) disubstitusikan ke dalam persamaan (5.6.12) sehingga diperoleh

$$BD = \frac{EH(a+c)}{c}, \tag{5.6.13}$$

Perhatikan segmen garis $AB$ maka diperoleh $EH = BE - BH$ bila disubstitusikan (5.6.9) dan (5.6.11) diperoleh

$$EH = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2(a+c)}. \tag{5.6.14}$$

Bila persamaan (5.6.14) disubstitusikan ke persamaan (5.4.13) diperoleh

$$BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}. \tag{5.6.15}$$

Dengan menggunakan Teorema Phytagoras pada segitiga $ABC$ diketahui bahwa

$$t_c{}^2 = (a - BD)(a + BD). \tag{5.6.16}$$

Bila persamaan (5.6.15) disubstitusikan ke persamaan (5.6.16) diperoleh

$$t_c{}^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)}{4c^2}. \tag{5.6.17}$$

Bila persamaan (5.6.13), (5.6.14), 5.6.15) dan (5.6.16) disubtitusikan ke persamaan (5.6.17) maka diperoleh rumus garis tinggi seperti yang dinyatakan dalam sebagai berikut.

$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}. \qquad \blacksquare$$

Cara yang serupa juga bisa dilakukan untuk menurunkan rumus panjang garis tinggi dari titik $\angle A$ yaitu $t_a$ dan panjang garis tinggi dari titik $\angle B$ yaitu $t_b$.

***Cara* II**

**Bukti.** Perhatikan kembali Gambar 5.6.3, misalkan $CD = t_c$ dan $a, b$ dan $c$ menyatakan panjang sisi $BC, AC$ dan $AB$.

Pandang $\Delta BEF$ dan $\Delta BOH$ karena $\angle FBE = \angle HBO$ (sudut yang sama) dan diperoleh $\angle FEH = \angle HOB = 90^0$ maka berdasarkan kesebangunan $\Delta BEF \sim \Delta BOH$ diperoleh perbandingan sisi-sisinya

$$\frac{BF}{BH} = \frac{EF}{OH}$$

$$EF^2 = \frac{BF^2.OH^2}{BH^2}. \tag{5.6.18}$$

Dengan menggunakan konsep trigonometri pada $\Delta BOH$ diperoleh

$$OH = \sin\frac{\angle FBE}{2}.BH\ ,$$

$$OH^2 = \sin^2\frac{\angle FBE}{2}.BH^2. \tag{5.6.19}$$

Bila persamaan (5.6.19) disubstitusikan ke persamaan (5.6.18) diperoleh

$$EF^2 = \sin^2\frac{\angle FBE}{2}.BF^2. \tag{5.5.20}$$

Lalu dengan konsep setengah sudut pada trigonometri dan Aturan Kosinus diperoleh

$$\sin^2\frac{FBE}{2} = \frac{1-(a^2+c^2-b^2/2ac)}{2},$$

$$\sin^2\frac{FBE}{2} = \frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{4ac},$$

$$\sin^2\frac{FBE}{2} = \frac{b^2-(a-c)^2}{4ac}. \tag{5.6.21}$$

Pandang $\Delta EHF$ dan $\Delta DBC$ karena $\angle FEH = \angle CDB = 90^0$ dan $\angle CBA = \angle FHE$ (sudut sehadap), berdasarkan kesebangunan maka $\Delta EHF \sim \Delta DBC$ sehingga diperoleh perbandingan sisi-sisinya

$$\frac{EF}{DC} = \frac{HF}{a},$$

$$t_c{}^2 = \frac{EF^2 . a^2}{FH^2} . \qquad (5.6.22)$$

Bila persamaan (5.6.5) pada cara I dan persamaan (5.6.21) disubstitusikan ke dalam persamaan (5.6.20) diperoleh

$$EF^2 = \frac{b^2 - (a-c)^2}{4ac} .ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right),$$

$$EF^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)}{4(a+c)^2} . \qquad (5.6.23)$$

Bila persamaan (5.6.8) pada cara I  dan persamaan (5.6.23) disubstitusikan ke dalam persamaan (5.6.22) diperoleh

$$t_c{}^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)}{c^2} . \qquad (5.6.24)$$

Yang akhirnya menghasilkan

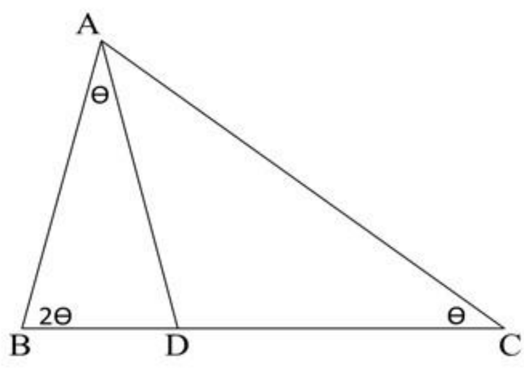
$$t_c = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c} . \qquad \blacksquare$$

Cara yang serupa juga bisa dilakukan untuk menurunkan rumus panjang garis tinggi dari titik $\angle A$ yaitu $t_a$ dan panjang garis tinggi dari titik $\angle B$ yaitu $t_b$.

***Soal Latihan* 7.**

1. (segitiga emas). Diberikan sebuah $\Delta ABC$ dengan ukuran sudutnya seperti gambar disebelah, tunjukkan bahwa berlaku :

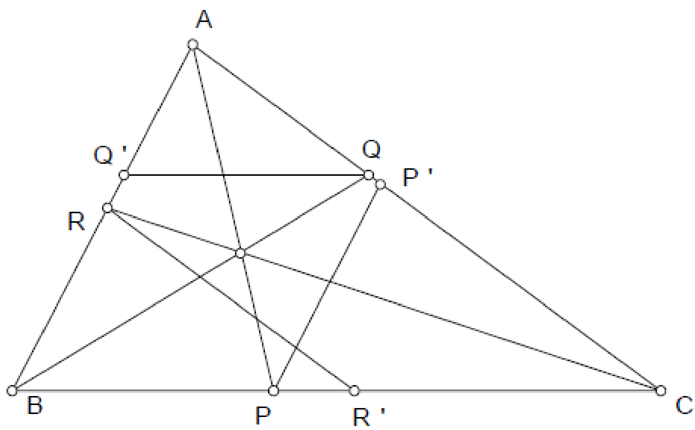
$$\frac{DC}{AD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$



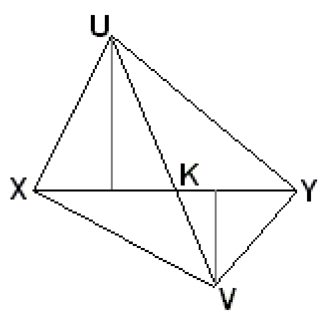

Catatan : perbandingan DC/AD ini

disebut dengan perbadingan emas
(golden ratio).

2. Buktikan bahwa teorema proyeksi pada segitiga lancip/ tumpul juga berlaku jika $\angle C$ adalah tumpul.
3. Pada $\Delta ABC$, buat titik D pada sisi $AB$ sehingga $AD$ = ½ $DB$, Kemudian buat titik $E$ pada $AC$ sehingga $A$E = 3$E$C. Bila kedua garis $BE$ dan $CD$ berpotongan dititik $F$, hitunglah $CF$ : $FD$ dan $BF$ : $FE$.
4. Pada $\Delta ABC$, bisektor dari masing-masing titik sudut memotong sisi $BC$, $CA$ dan $AB$ di titik $P$, $Q$ dan $R$. Jika $P'$, $Q'$ dan $R'$ titik pada sisi $CA$, $AB$ dan $BC$ sehingga $PP'$ / /$BC$, $QQ'$ // $CA$ dan $RR'$ // $AB$, seperti gambar di bawah, tunjukkan
$\frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'} + \frac{1}{RR'} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$




5. Jika $K$ adalah titik potong dari $XY$ dengan $UV$, tunjukkan bahwa
$$\frac{L\Delta UXY}{L\Delta VXY} = \frac{UK}{VK}$$

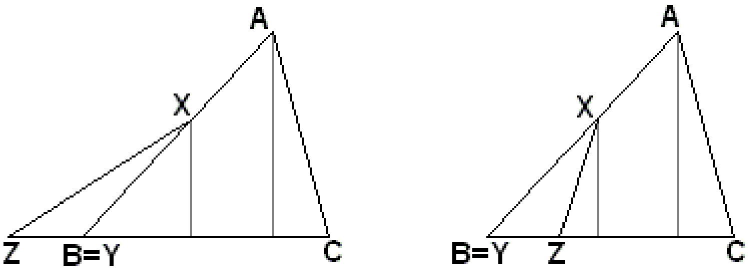



6. Detilkan bukti teladan 5.3.1.

7. Buktikan nilai $t_b$ dan $t_c$ pada teorema 5.2.2
8. *) Diketahui $\Delta ABC$ dengan titik $O$ terletak di dalam segitiga, Jika $K$ merupakan keliling legitiga, tunjukkan ½ $K < OA + OB + OC < K$
9. Perhatikan gambar di bawah ini. Diberikan $\Delta ABC$ dan $\Delta XYZ$, sehingga $\angle ABC = \angle BYZ$ atau $\angle ABC + \angle XYZ = 180^0$.

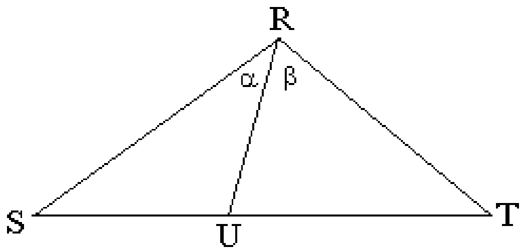
   Tunjukkan bahwa

$$\frac{L\Delta ABC}{L\Delta XYZ} = \frac{AB}{BY} \cdot \frac{BC}{YZ}$$




10. Perhatikan gambar disebelah dan tunjukkan bahwa :

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{RU} = \frac{\sin \alpha}{RT} + \frac{\sin \beta}{RS}$$




11. Sudut $A$ merupakan sudut tumpul pada $\Delta ABC$, bila dibuat garis tinggi $AD$ dan $BE$. Buktikan bahwa

   $AC = \frac{DC \times BC}{EC}$ dan tunjukkan pula $\angle DEC = \angle B$

12. Pada $\Delta ABC$, $AD$ dan $BC$ merupakan garis tinggi yang berpotongan dititik $T$. gunakan teorema Stewart untuk menunjukkan $AD \times AT + BT \times BE = AB^2$.
13. jika $\Delta ABC$ tumpul dan titik $D$ titik tengah $BC$,
    a. Buktikan bahwa salah satu keduanya dari ketaksamaan berikut ini benar

       $\angle BAD > \angle B$ atau $\angle DAC > \angle C$

    b. Buktikan $AD <$ ½ $BC$

14. *) Pada $\Delta ABC$ titik $D$, $E$ dan $F$ masing-masing titik tengah sisi $BC$, $AC$ dan $AB$, Jika $K$ menyatakan keliling segitiga, buktikan bahwa

    $\frac{1}{2} K < AD + BE + CF < K$

15. *) Jika diketahui $\Delta ABC$ dengan sisi-sisi $a$, $b$ dan $c$. Selidikilah apakah mungkin membuat segitiga yang panjang sisinya adalah
    a. $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, dan $\sqrt{c}$,
    b. $a^2$ , $b^2$ dan $c^2$.

16. *) Diketahui $\Delta ABC$ dan titik $D$ terletak pada $AC$ sehingga $AB = AD$. Jika diketahui pula $\angle ABC - \angle ACB = 30^0$. Berapakah $\angle BCD$

17. *)Diketahui trapezium $ABCD$ dengan $AB$ = 44 cm, $BC$ = 25 cm, $CD$ = 16 cm dan $AD$ = 17 cm. hitunglah
    a. Panjang diagonal $AC$
    b. Panjang diagonal $BD$
    c. Hitunglah Luas trapezium tersebut

18. **) diketahui sebuah segitiga lancip dan dan misalkan $A'B'C'$ ditentukan dengan cara berikut : Titik $A'$ adalah titik ptotong antara garis tinggi dari $A$ terhadap sisi $BC$ dengan setengah lingkaran kea rah luar segitiga yang digambarkan dengan sisi $BC$ sebagai garis tengah. Titik $B'$ dan $C'$ ditentukan dengan cara yang serupa. Buktikan bahwa

    $$(L\Delta BCA')^2 + (L\Delta CAB')^2 + (L\Delta ABC')^2 = (L\Delta BCA)^2$$

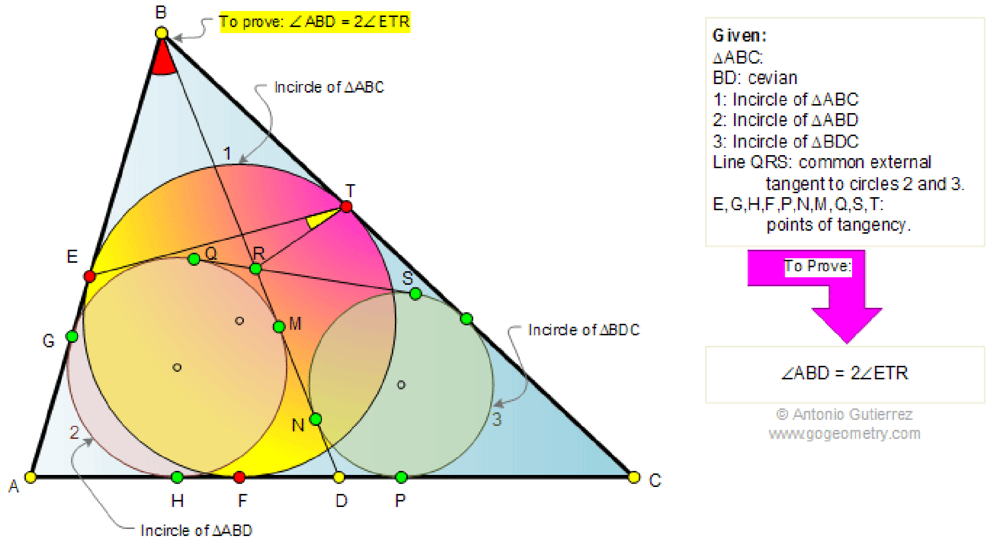
19. **) Diketahui segiempat $ABCD$ dan $P$, $Q$ masing-masing adalah titik tengah $CD$ dan $AB$. Garis $AP$ berptongan dengan $DQ$ di $X$. Garis $BP$ berpotongan dengan $CQ$ di $Y$. Buktikan bahwa

    $L\Delta\ ADX + L\Delta BCY$ = Luas $PXQY$

# BAB 6

# Kongkurensi dan Kelinearan

Berbagai persoalan dalam berbagai disiplin ilmu yang memerlukan eksistensi (kewujudan) dari perpotongan beberapa buah garis, yang di dalam geometri geometri dikenal dengan nama kongkurensi beberapa buah garis lurus. Secara aljabar, kadang kala eksistensinya ini sulit kita tunjukkan, akan tetapi dengan menggunakan berbagai konsep geometri hal ini bisa dengan mudah kita tunjukkan.



# BAB VIII

# Kongkurensi dan Kelinearan

## 6.1. *Teorema Ceva*

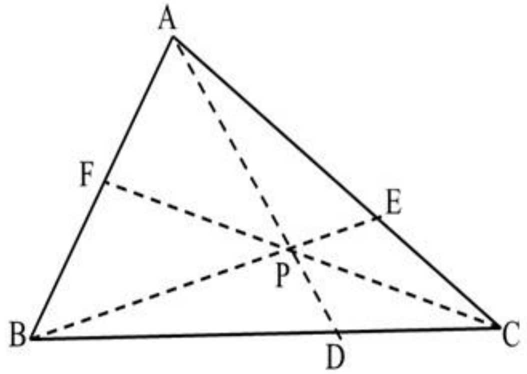
Memang ada cara lain yang dapat digunakan untuk menunjukkan beberapa garis berpotongan pada satu titik. Akan tetapi teorema Ceva dan teorema merupakan cara terbaik untuk menunjukkan eksistensi kolinearitas (tiga garis yang berpotongan di satu titik) dari bebarapa buah garis lurus. Karena kemudahannya ini maka teorema Ceva banyak digunakan termasuk untuk membuktikan kolilnearitas dari segienam talibusur serta berbagai penggunaan lainnya.

***Teorema* 6.1.1a. (*Teorema Ceva* kasus 1.).**

JIka $D$, $E$ dan $F$ masing-masing adalah titik pada sisi $BC$, $CA$ dan $AB$ pada segitiga $ABC$. Maka garis $AD$, $BE$ dan $CF$ adalah kongkuren (bertemu di satu titik) jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1 \qquad (6.1.1a)$$

***Bukti*** : ⇒. Misalkan ketiga garis $AD$, $BE$ dan $CF$ kongkuren (bertemu disatu titi), katakan titik $P$. Misalkan pula $L\Delta AB$C menyatakan luas segitiga **ABC**, maka berlaku :




$$\frac{AF}{FB}=\frac{L\Delta ACF}{L\Delta FCB}=\frac{L\Delta APF}{L\Delta FPB}$$
$$=\frac{L\Delta ACF - L\Delta APF}{L\Delta FCB - L\Delta FPB}$$
$$=\frac{L\Delta APC}{L\Delta BPC}$$

Gambar 6.1.1a

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\frac{BD}{DC}=\frac{L\Delta BPA}{L\Delta CPA} \text{ dan}$$
$$\frac{CE}{EA}=\frac{L\Delta CPB}{L\Delta APB}$$

Jadi

$$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{PCE}{EA}=\frac{L\Delta APC}{L\Delta BPC}.\frac{L\Delta BPA}{L\Delta CPA}.\frac{L\Delta CPB}{L\Delta APB}=1$$

$\Leftarrow$ Untuk membuktikan sebaliknya misalkan hasil kali perbandingan ketiga garis bernilai 1, akan ditunjukkan bahwa ketiga garis bertemu di suatu titik. Untuk itu misalkan *AD* dan *BE* berpotongan di titik *P*, selanjutnya buat garis *CP* dan perpanjang sehingga memotong garis *AB*, katakan titik potongnya adalah *F*′, berdasarkan hipotesis maka berlaku

$$\frac{AF'}{F'B}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=1$$

Jadi

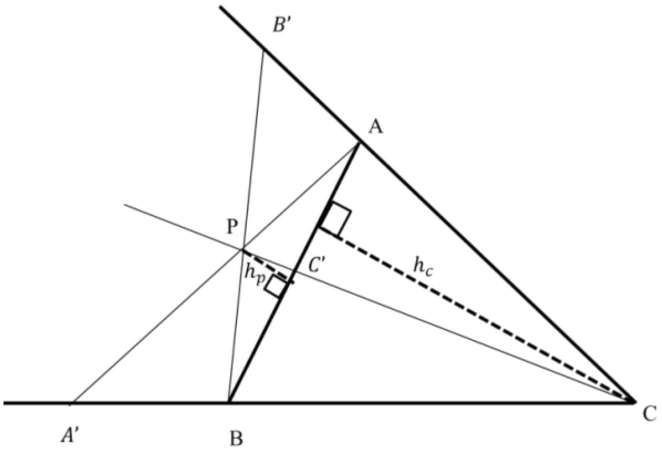
$$\frac{AF'}{F'B}=\frac{DC}{BD}.\frac{EA}{CE}=\frac{AF}{FB}$$

Kesamaan di atas mengatakan *F* = *F*′. Jadi ketiga garis tersebut bertemu pada satu titik.♥

**Teorema 6.1.1b. (Teorema Ceva untuk kasus 2: konkurensi titik berada di luar segitiga).** Jika titik $A', B'$, dan $C'$ masing-masing adalah titik pada perpanjangan sisi $BC, CA$, dan $AB$ maka garis $AA', BB'$ dan $CC'$ berpotongan di satu titik jika dan hanya jika:

$$\frac{AC'}{BC'}.\frac{BA'}{CA'}.\frac{CB'}{AB'}=1. \qquad (6.1.1b)$$

**Bukti:** Perhatikan Gambar 2.8 berikut




**Gambar 6.1.1b**

($\Rightarrow$)Misalkan ketiga garis $AA', BB'$ dan $CC'$ konkuren di titik $P$, akan ditunjukkan persamaan (6.1.1b) berlaku, dengan menggunakan perbandingan luas segitiga. Perhatikan $\Delta ACC'$ dan $\Delta C'CB$ dengan masing-masing alasnya $AC'$ dan $C'B$.

Misalkan $h_c$ merupakan tinggi dari kedua segitiga tersebut, sehingga diperoleh

$$L\Delta ACC' = \frac{1}{2}.AC'.h_c$$

$$L\Delta C'CB = \frac{1}{2}.BC'.h_c$$

Kemudian perhatikan $\Delta C'PA$ dan $\Delta C'PB$ dengan masing-masing alasnya $AC'$ dan $C'B$. Misalkan $h_p$ merupakan tinggi dari kedua segitiga tersebut, sehingga diperoleh

$$L\Delta C'PA = \frac{1}{2}.AC'.h_p$$

$$L\Delta C'PB = \frac{1}{2}.BC'.h_p$$

Perhatikan $\Delta PAC$ dan $\Delta PBC$,

$$L\Delta PAC = L\Delta ACC' + L\Delta C'PA$$

dan

$$L\Delta PBC = L\Delta C'CB + L\Delta C'PB$$

maka diperoleh perbandingan

$$\frac{L\Delta PAC}{L\Delta PBC} = \frac{L\Delta ACC' + L\Delta C'PA}{L\Delta C'CB + L\Delta C'PB}$$

Jadi

$$\frac{L\Delta PAC}{L\Delta PBC} = \frac{\frac{1}{2}.AC'.h_C + \frac{1}{2}.AC'.h_P}{\frac{1}{2}.BC'.h_C + \frac{1}{2}.BC'.h_P}$$

$$\frac{L\Delta PAC}{L\Delta PBC} = \frac{\frac{1}{2}.AC'\left(h_C + h_P\right)}{\frac{1}{2}.BC'\left(h_C + h_P\right)}$$

$$\frac{L\Delta PAC}{L\Delta PBC} = \frac{AC'}{BC'}$$

dengan cara yang sama untuk $\Delta A'AC$ dan $\Delta A'AB$ diperoleh

$$\frac{L\Delta PAB}{L\Delta PAC} = \frac{BA'}{CA'}$$

dan pada $\Delta CBB'$ dan $\Delta ABB'$ juga diperoleh

$$\frac{L\Delta PBC}{L\Delta PAB} = \frac{CB'}{AB'}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{AC'}{BC'}.\frac{BA'}{CA'}.\frac{CB'}{AB'} = \frac{L\Delta PAC}{L\Delta PBC}.\frac{L\Delta PAB}{L\Delta PAC}.\frac{L\Delta PBC}{L\Delta PAB}$$

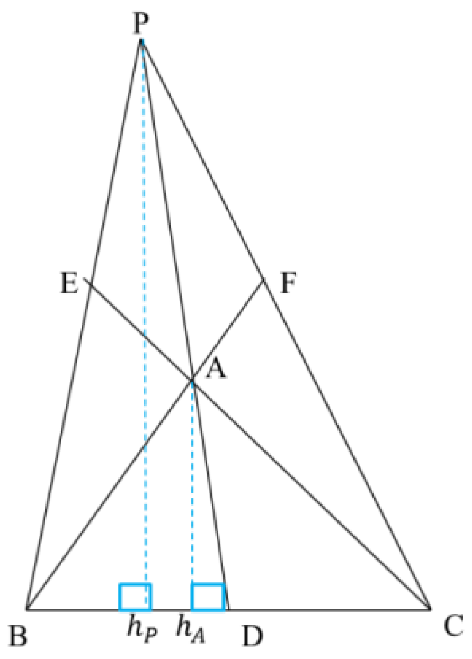
$$\frac{AC'}{BC'}.\frac{BA'}{CA'}.\frac{CB'}{AB'} = 1. \qquad \blacksquare$$

($\Leftarrow$) Untuk membuktikan sebaliknya, dengan menggunakan cara yang sama pada pembuktian Teorema Ceva Kasus 1.

**Teorema 6.1.1c. (Teorema Ceva untuk kasus 3: konkurensi titik berada di luar segitiga).** Jika titik $D, E$, dan $F$ masing-masing adalah titik pada perpanjangan sisi $BC, CA$, dan $AB$ maka garis $AD, BE$ dan $CF$ berpotongan di satu titik jika dan hanya jika:

$$\frac{BD}{DC}.\frac{CF}{FP}.\frac{PE}{EB}=1. \qquad (6.1.1c)$$

**Bukti:** Perhatikan Gambar 6.1.1c berikut.




Gambar 6.1.1c.

($\Rightarrow$)Misalkan ketiga garis $BE, DA$ dan $CF$ konkuren di titik $P$, akan ditunjukkan persamaan (6.1.1c) berlaku, dengan menggunakan perbandingan luas segitiga. Perhatikan $\Delta BPD$ dan $\Delta DPC$ dengan masing-masing alasnya $BD$ dan $DC$. Misalkan $h_p$ merupakan tinggi dari kedua segitiga tersebut, sehingga diperoleh

$$L\Delta BPD = \frac{1}{2}.BD.h_p$$

$$L\Delta DPC = \frac{1}{2}.DC.h_p$$

Kemudian perhatikan $\Delta BAD$ dan$\Delta DAC$ dengan masing-masing alasnya $BD$ dan $DC$. Misalkan $h_A$ merupakan tinggi dari kedua segitiga tersebut, sehingga diperoleh

$$L\Delta BAD = \frac{1}{2}.BD.h_A$$

$$L\Delta DAC = \frac{1}{2}.DC.h_A$$

Perhatikan $\Delta BAP$dan $\Delta CAP$,

$$L\Delta PBD = L\Delta BAD + L\Delta BAP$$

maka

$$L\Delta BAP = L\Delta PBD - L\Delta BAD$$

dan

$$L\Delta DPC = L\Delta CAP + L\Delta DAC$$

maka

$$L\Delta CAP = L\Delta DPC - L\Delta DAC$$

Dari persamaan (2.45) dan (2.46) diperoleh perbandingan luas

$$\frac{L\Delta BAP}{L\Delta CAP} = \frac{L\Delta PBD - L\Delta BAD}{L\Delta DPC - L\Delta DAC}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{L\Delta BAP}{L\Delta CAP} = \frac{\frac{1}{2}.BD.h_P + \frac{1}{2}.BD.h_A}{\frac{1}{2}.DC.h_P + \frac{1}{2}.DC.h_A}$$

$$\frac{L\Delta BAP}{L\Delta CAP} = \frac{\frac{1}{2}.BD\left(h_P + h_A\right)}{\frac{1}{2}.DC\left(h_P + h_A\right)}$$

$$\frac{L\Delta BAP}{L\Delta CAP} = \frac{BD}{DC}$$

dengan cara yang sama untuk $\Delta CAB$ dan $\Delta BAP$ diperoleh

$$\frac{L\Delta CAB}{L\Delta BAP} = \frac{CF}{FP}$$

dan pada $\Delta PAC$ dan $\Delta CAB$ juga diperoleh

$$\frac{L\Delta PAC}{L\Delta CAB} = \frac{PE}{EB}$$

Jadi

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FP}\cdot\frac{PE}{EB} = \frac{L\Delta BAP}{L\Delta CAP}\cdot\frac{L\Delta CAB}{L\Delta BAP}\cdot\frac{L\Delta PAC}{L\Delta CAB}$$

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FP}\cdot\frac{PE}{EB} = 1. \blacksquare$$

($\Leftarrow$) Untuk membuktikan sebaliknya, dengan menggunakan cara yang sama pada pembuktian Teorema Ceva Kasus 1.

Salah satu persoalan yang sering mengganjal dalam garis bagi atau bisektor sudut-sudut pada suatu segitiga adalah, bagaimana menunjukkan bahwa ketiga bisektor perpotongan pada suatu titik. Dengan menggunakan teorema Ceva hal itu dapat ditunjukkan dengan mudah.

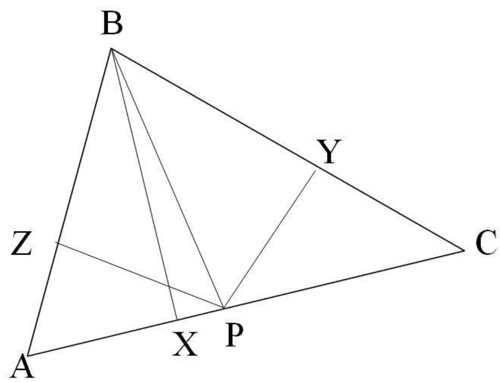
Pada segitiga *AB*C misalkan *AX*, *BY* dan *CY* masing-masing adalah bisektor dari $\angle$CAB, $\angle AB$C dan $\angle BCA$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *AX*, *BY* dan *CZ* adalah kongkuren dan titik konkurensinya ini disebut dengan incenter. Ingat bahwa incenter ini merupakan titik pusat jari-jari lingkaran dalam. Sebelum membuktikan konkurensi di atas, terlebih dahulu dibuktikan teorema bisektor sudut.

***Teorema* 6.1.2. *Teorema bisektor sudut*.**

Diberikan segitiga *AB*C , jika *BP* adalah bisektor sudut *B*, maka berlaku

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PC} \Leftrightarrow \angle ABP = \angle PBC.$$

Bukti : $\Rightarrow$ Buat garis tinggi dari titik *P* ke sisi *AB* dan *BC* katakan titik *Z* dan *Y*. seperti pada gambar 6.1.2 kemudian buat garis tinggi dari titik *B* ke sisi *AC* dan katakan titik *X*. selanjutnya dari $\Delta PZB \cong \Delta PYB$ diperoleh $PZ = PY$ (mengapa ?). kemudian dari $\Delta ABX \cong \Delta APZ$ diperoleh




Gambar 6.1.2

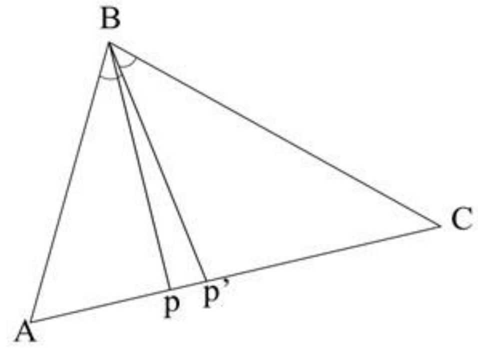
$$\frac{AB}{AP} = \frac{BX}{PZ} = \frac{BX}{PY}$$

Juga $\Delta CBX \cong \Delta CPY$, maka $\frac{CB}{CP} = \frac{BX}{PY}$. Selanjutnya

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AP \cdot BX}{PY} \cdot \frac{PY}{CP \cdot BX} = \frac{AP}{CP}.$$

$\Leftarrow$ Misalkan $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PC}$ , Misalkan P′ bisektor dari $\angle B$, dari premis maka haruslah berlaku

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AP'}{P'C} \Rightarrow P = P'.$$




gambar 6.1.3

***Teorema* 6.1.3.**: Ketiga bisektor sudut pada $\Delta$ *ABC* berpotongan pada satu titik.

***Bukti*** : Dengan menggunakan teorema bisektor sudut (teorema 6.1.2) maka diperoleh

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AY}{YC}, \frac{BC}{CA} = \frac{BZ}{ZA}, \frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC};$$

Selanjutnya

$$\frac{AZ}{BZ} \times \frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} = \frac{CA}{BC} \times \frac{AB}{AC} \times \frac{BC}{AB} = 1.$$

Kemudian oleh teoreme Ceva ini bermakna ketiga garis tersebut berpotongan pada satu titik. ♥

Untuk segitiga *AB*C, bila *AX* menjadi bisektor *B*C (garis di sekolah menengah mungkin dikenal dengan istilah garis berat), maka *BX* = *XC*, sehingga bila *AX*, *BY* dan *CZ* masing-masing adalah garis berat pada segitiga *ABC*, maka jelas berlaku

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

Selanjutnya misalkan *P* adalah titik pusat lingkaran dalamnya, perhatikan segitiga *ACX* dengan titik *B*, *P* dan *Y*, maka berlaku

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YZ} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

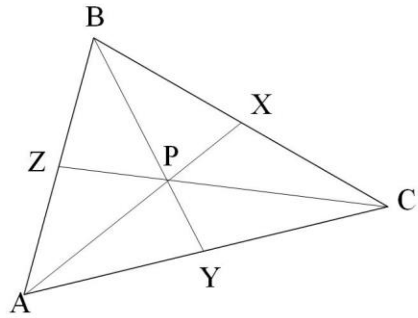
Maka

$$1 = \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CB}{BX} \cdot \frac{XP}{PA} \Rightarrow$$

$$1 = 1 \cdot 2 \cdot \frac{XP}{PA} \Rightarrow \frac{XP}{PA} = \frac{1}{2}$$

*Jadi bila* P titik pusat lingkaran dalam, maka berlaku

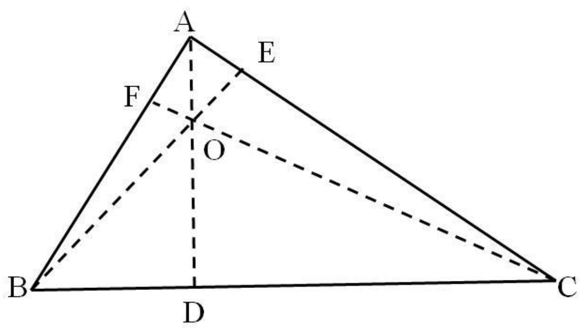
$$\frac{AP}{PX} = \frac{BP}{PY} = \frac{CP}{PZ} = \frac{1}{2}$$




Gambar 6.1.4

Berikut ini, juga dengan menggunakan teorema Ceva akan titunjukkan bahwa garis tinggi (yang melahirkan orthocenter) juga berpotongan pada satu titik.

***Corollary* 6.1.1**. Dalam sebarang segitiga, maka garis tinggi berpotongan pada satu titik




Gambar 6.1.5

***Bukti*** : Perhatikan bahwa $\Delta ACD \sim \Delta BCE$, sehingga diperoleh

$$\frac{CE}{DC} = \frac{BE}{AD}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\frac{AF}{EA} = \frac{CF}{BE}$$

dan

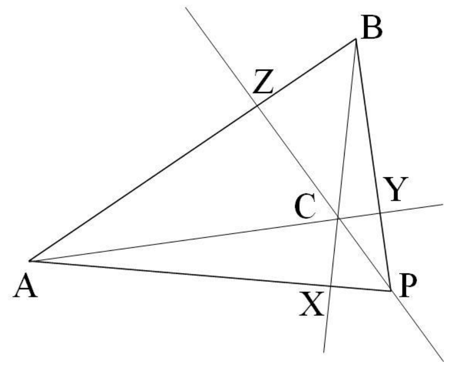
$$\frac{BD}{FB} = \frac{AD}{CF}$$

Sehingga

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{EA} \cdot \frac{BD}{FB} \cdot \frac{CE}{DC} = \frac{CF}{BE} \cdot \frac{AD}{CF} \cdot \frac{BE}{AD} = 1$$

Karena persamaan bernilai satu, maka menurut teorema Ceva ketiga garis tinggi juga bertemu pada satu titik. Kita tau bahwa tidak selalu titik orthocenter ini berada di dalam segitiga, perhatikan gambar 6.1.6, sebagai latihan penulis dapat membuktikan bahwa ketiga garis tingginya juga berpotongan disatu titik.

Bukti teorema ceva ini sangat banyak, cara di atas dengan menggunakan konsep luas daerah hanyalah salah saatu cara pembuktiannya. Berikut ini akan diberikan cara pembuktian lain yaitu dengan menggunakan konsep trigonometri.



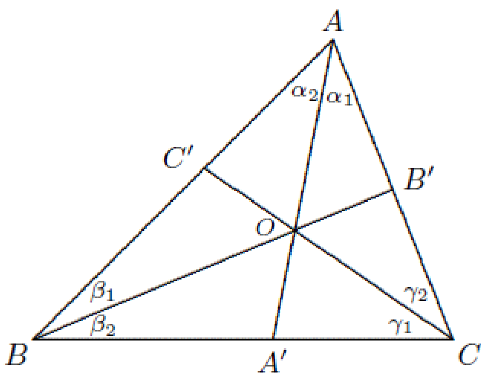

Gambar 6.1.6

Misalkan

$\angle CAA' = \alpha_1$, $\angle A'AB = \alpha_2$,

$\angle ABB' = \beta_1$, $\angle B'BC = \beta_2$,

$\angle BCC' = \gamma_1$ dan $\angle C'CA = \gamma_2$.




Gambar 6.1.7

Maka

$$\sin\alpha_1 = A'C.\frac{\sin C}{AA'}$$

$$\sin\alpha_2 = BA'.\frac{\sin B}{AA'}$$

Jadi

$$\frac{\sin\ \alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{BA'\sin B}{A'C\sin C}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\frac{\sin\ \beta_2}{\sin\beta_1} = \frac{CB'\sin C}{B'A\sin A}$$

$$\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = \frac{AC'\sin C}{C'B\sin B}$$

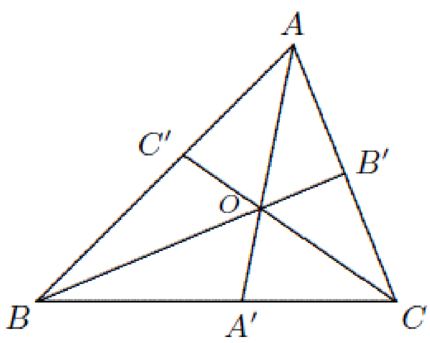
Maka berdasarkan teorema Ceva $AA'$, $BB'$ dan $CC'$ berpotongan disatu titik jika dan hanya jika

$$\frac{\sin\ \alpha_2}{\sin\alpha_1}.\frac{\sin\ \beta_2}{\sin\beta_1}.\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = 1.$$

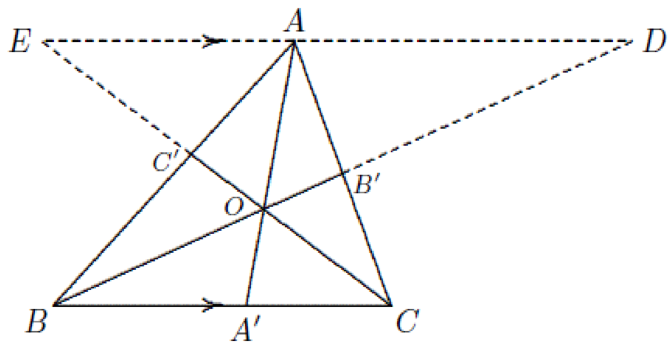
Jika anda sangat memahami konsep kesebangunan dalam segitiga, maka konsep kesebangunan ini juga dapat anda gunakan untuk membuktikan teorema Ceva tersebut. Coba perhatikan gambar 6.1.8a. jika pada gambar 6.1.8a tersebut buat garis melalui titik

$A$ yang sejajar dengan $BC$, Kemudian perpanjang sisi BB′ dan $CC'$ sehingga memotong garis yang melalui $A$ tadi ti titik $D$ dan $E$ seperti pada gambar 6.1.8b

.




gambar 6.1.8a




gambar 6.1.8b

Maka dapat ditunjukkan bahwa

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{BC'}{AD}, \qquad \frac{AC'}{C'B} = \frac{EA}{BC}$$

Karena

$$\frac{BA'}{AD} = \frac{A'O}{OA} = \frac{A'C}{EA}$$

diperoleh

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AD}{EA}$$

Maka

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = \frac{AD}{EA} \cdot \frac{BC}{AD} \cdot \frac{EA}{BC} = 1$$

Sebaliknya misalkan berlaku

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1 \qquad (6.1.2)$$

Misalkan pula $A', B'\ dan\ C'$ masing-masing berada pada sisi BC, $AC$ dan $AB$ (untuk kasus lain dapat dibuktikan dengan cara yang sama), selanjutnya misalkan

$BB', CC'$ berptongan di titik *O*, hubungkan *AO*, katakan bertemu dititik $A''$ , akan ditunjukkan $A' = A''$ , dari premis tentunya berlaku

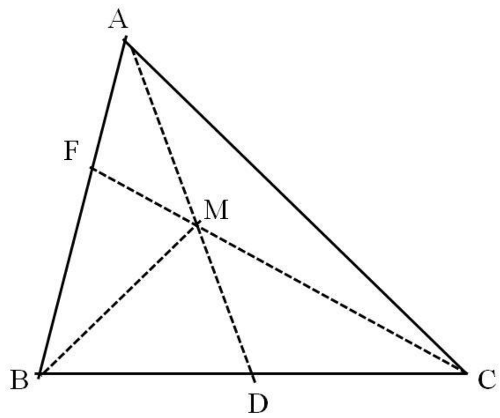
$$\frac{BA''}{A''C}.\frac{CB'}{B'A}.\frac{AC'}{C'B} = 1 \qquad (6.1.3)$$

Maka dari persamaan (6.1.2) dan (6.1.3) akan diperoleh $A' = A''$ .

Berikut ini akan diberikan bentuk lain dari akibat teorema ceva. Akan tetapi dalam hal ini pembuktiannya akan diberikan dengan menggunakan konsep luas, diharapkan kepada pembaca untuk membuktikannya dengan menggunakan teorema Ceva (sebagai latihan).

***Teorema* 6.1.4:** Suatu garis dari titik *C* pada Δ*ABC* memotong garis berat dari titik *A* dengan sama panjang. Buktikan garis tersebut membagi *ABF* dengan perbandingan 1 : 2.

***Bukti*** : Perhatikan gambar 6.1.9, misalkan *AD* garis berat dan *CF* memotong *AD* menjadi dua bagian garis yang sama panjang.



gambar 6.1.9

*L*Δ*AB*D = *L*Δ*ADC*

= ½ *L*Δ*ABC*

Kemudian, karena *M* adalah titik tengah garis *AD*, maka

*L*Δ*AMC* = *L*Δ*CND*

= ½ *L*Δ*ADC*

= ¼ *L*Δ*ABC*

Sekali lagi, karena *M* titik tengah garis *AD*, maka

*L*Δ*BMD* = *L*Δ*BMA*

= ½ *L*Δ*BDA*

= ¼ *L*Δ*ABC*

Karena

*L*Δ*BCM* = *L*Δ*BDM* + *L*Δ*CMO*

= ¼ *L*∆*ABC* + ¼ *L*∆*ABC*

= ½ *L*∆*ABC*

Tetapi

$$\frac{AF}{BF} = \frac{L\Delta ACF}{L\Delta BCF} = \frac{L\Delta AMF}{L\Delta BMF}$$

Oleh karena itu

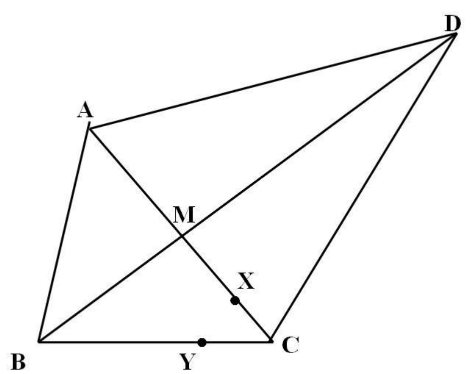
$$\frac{AF}{BF} = \frac{L\Delta ACF - L\Delta AMF}{L\Delta BCF - L\Delta BMF}$$

$$\frac{AF}{BF} = \frac{L\Delta ACM}{L\Delta BCM}$$

$$\frac{AF}{BF} = \frac{\frac{1}{4}L\Delta ABC}{\frac{1}{2}L\Delta ABC} = \frac{1}{2}$$

Jadi *AF* : *BF* = 1 : 2

***Teladan* 6.1.2** : Pada segiempat *ABCD*, diagonal *AC* dan *BD* berpotongan di titik *M*, sehingga *AM* = *MC* dan *DM* = 2*MB*, misalkan titik *X* dan *Y* pada sisi *MC* dan *BC* sehingga *D*, *X* dan *Y* segaris



gambar 6.1.10

***Penyelesaian*** : karena DM = 2 MB maka diperoleh

$$\frac{DM}{BD} = \frac{DM}{BM+MD} = \frac{2MB}{3MB} = \frac{2}{3}$$

Karena AM = MC, maka

$$\frac{CX}{MX} = \frac{CM-XM}{XM} = \frac{CM}{XM} - \frac{XM}{XM} = \frac{1}{2}\left(\frac{AC}{XM}\right) - 1 = \frac{1}{2}.3 - 1 = \frac{1}{3}$$

Selanjutnya perhatikan segitiga *MB*C dengan titik *D*, *X* dan *Y*. maka diperoleh

$$\frac{BY}{YC}.\frac{CX}{XM}.\frac{MD}{DB} = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 1$$

Ini bermakna bahwa ketiga titik D, X dan Y adalah segaris

***Teladan 6.1.3*** : Perhatikan segiempat *ACGE* dengan *H* adalah titik potong *AC* dan *GE*, garis *AE* dan *CG* bertemu di *I* sedangkan garis *AC* dan *EG* bertemu di *D*. Misalkan *B* titik potong *IH* dan *AC* seperti pada gambar disebelah. Buktikan bahwa

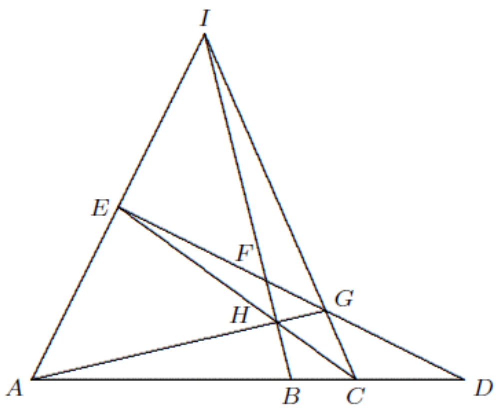
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

***Penyelesaian*** : ***Cara I***. Perhatikan Δ *ACI*, Δ*AE*C dan Δ*CEI*, maka dengan menggunakan teorema Menelaus akan diperoleh

$$\frac{CD}{DA} \cdot \frac{AE}{EI} \cdot \frac{IG}{GC} = 1,$$

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CH}{HE} \cdot \frac{EI}{IA} = 1,$$

$$\frac{CG}{GI} \cdot \frac{IA}{AE} \cdot \frac{EH}{HC} = 1,$$




gambar 6.1.11

Bila ketiga persamaan di atas dikalikan maka akan diperoleh

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

***Cara II***. Gunakan teorema Ceva pada Δ*AC*I, maka diperoleh

$$\frac{IE}{EA} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CG}{GI} = 1$$

Kemudian pada Δ*ACI* gunakan teorema Menelaus, dengan garis transversalnya adalah *EGD*, maka diperoleh.

$$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CG}{GI} \cdot \frac{IE}{EA} = 1$$

Maka dapat ditunjukkan

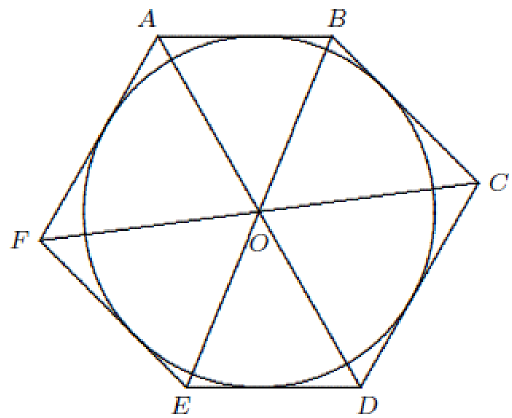
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}.$$

## 6.2. *Teorema Brianchon*

Kalau teorema Pascal merupakan eksistensi kolinearitas dari titik potong enam titik pada lingkaran, maka berikut ini sebagai perluasan dari teorema pascal yang berupa eksistensi kongkurensi dari diagonal segienam yang berada pada suatu lingkaran yang dikenal dengan teorema Brianchon berikut ini.

***Teorema* 6.2.1 *(Teorema Brianchon)*** : Jika semua sisi dari suatu segienam menyinggung sebuat lingkaran, maka ketiga diagonalnya adalah kongkuren (atau mungkin juga sejajar).

***Bukti*** : Perhatikan gambar 6.2.1. Misalkan $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ dan $F$ adalah titik sudut dari segienam tersebut dan misalkan pula $R$, $Q$, $T$, $S$, $P$ dan $U$ masing-masing adalah titik singgung dari sisi $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EF$ dan $FA$ terhadap lingkaran tersebut (perhatikan gambar 6.2.2). tanpa mengurangi perumuman kita misalkan segienam tersebut konvek. Dengan diagonal $AD$, $BE$ dan $CF$ yang kesemuanya tidak sejajar.




Gambar 6.2.1

Perpanjang garis $FE$, $BC$, $BA$, $DE$, $DC$ dan $FA$ dan membentuk titik $P'$, $Q'$, $R'$, $S'$, $T'$ dan $U'$ sehingga

$$PP' = QQ' = RR' = SS' = TT' = UU'$$

Selanjutnya bentuk lingkaran I yang menyinggung $PP'$ dan $QQ'$ di titik $P'$ dan $Q'$, lingkaran II yang menyinggung $RR'$ dan $SS'$ dititik $R'$ dan $S'$, lingkaran III yang menyinggung $TT'$ dan $UU'$ dititik $T'$ dan $U'$ seperti pada gambaru 6.2.2

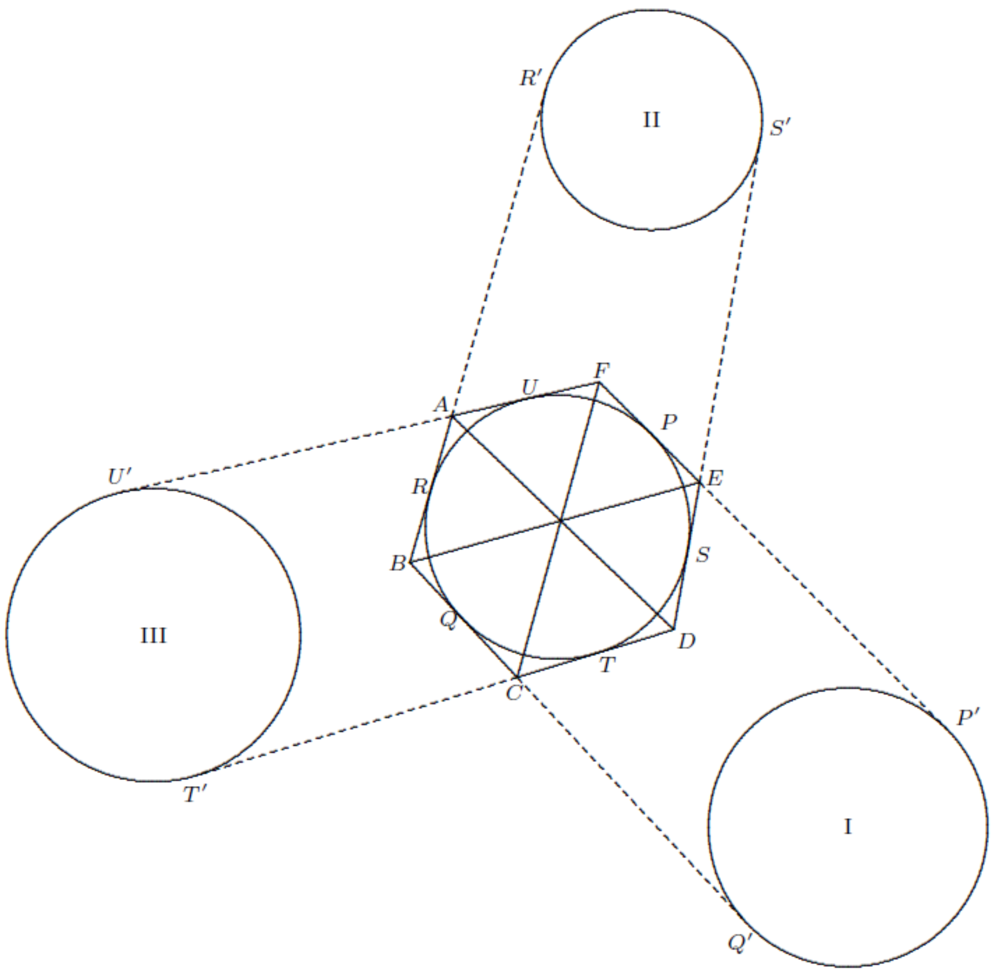
Perhatikan bahwa

$$AU' = UU' - AU = RR' - AR = AR'$$

dan

$$DT' = DT -+ TT' = DS + SS' = DS'$$

Yang mana *A* dan *D* menpunyai kuasa yang sama terhadap lingkaran ke II dank e III, jadi *AD* merupakan sumbu radikal dari lingkaran I dan III, akibatnya *A*D, *BE* dan *CF* kongkuren.

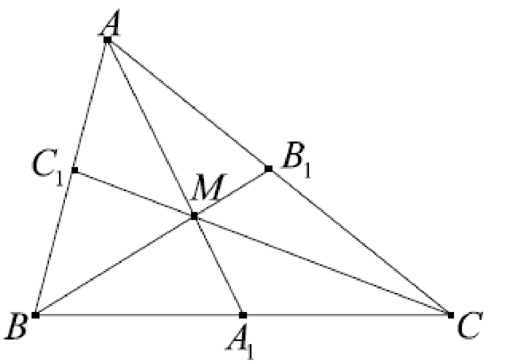



Gambar 6.2.2

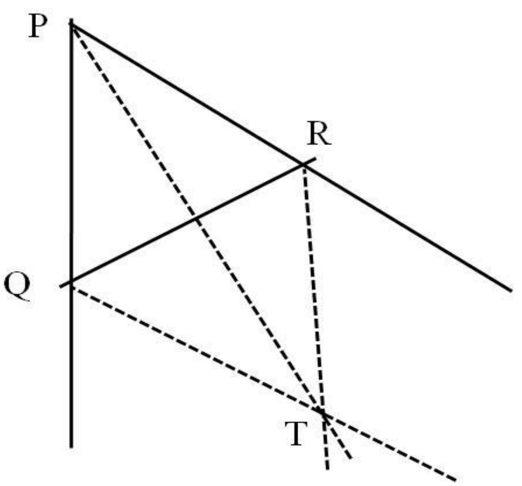
***Soal Latihan* 8**.

1. Buktikan teorema 6.1.4 dengan menggunakan teorema Ceva
2. Gunakan Rumus Trigonometri untuk membuktikan teorema Ceva
3. Dengan menggunakan bukti teorema Ceva versi trigonometri, buktikan bahwa garis tinggi suatu segitiga berpotongan disatu titik.
4. Hal yang sama seperti soal nomor 3 akan tetapi untuk garis berat.
5. Tunjukkan bahwa circumcenter berpotongan disatu titik.
6. Misal pada $\Delta ABC$ panjang sisinya adalah $a$, $b$ dan $c$. $I$ adalah incenter, jika D, $E$, $F$ masing-masing titik potong dari titik sudut ke sisi dihadapannya yang melalui incenter. Tunjukan berlaku $\frac{b+c}{a} = \frac{IA}{ID}$
7. Dalam sebuah $\Delta ABC$, buat titik $A_1$, $B_1$ dan $C_1$ masing-masing pada sisi $BC$, $AV$ dan $AB$ sehinga $AA_1$, $BB_1$ dan $CC_1$ kongkuren. Tunjukkan bahwa berlaku

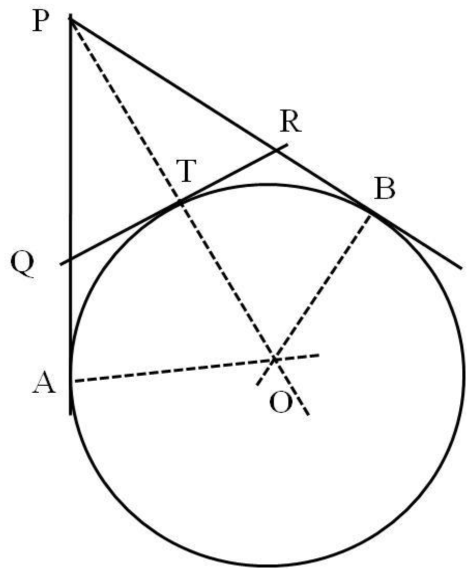
$$\left|\frac{MA}{MA_1}\right| = \left|\frac{C_1A}{C_1B} + \left|\frac{B_1A}{B_1C}\right|\right|$$



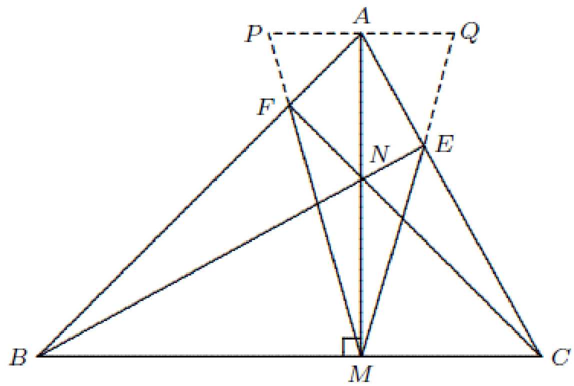

8. Perhatikan gambar disebelah, P$T$ adalah bisektor $\angle P$ sedangkan $QT$ dan $RT$ adalah bisektor sudut luar dari $Q$ dan R. tunjukkan bahwa $PT$, $QT$ dan $RT$ berpotongan disatu titik



9. Pada gambar disebelah, lingkarannya adalah lingkaran luar dari $\Delta PQR$, gunakan teorema ceva untuk menunjukkan bahwa $PO$, $AO$ dan $BO$ berpotongan di satu titik.

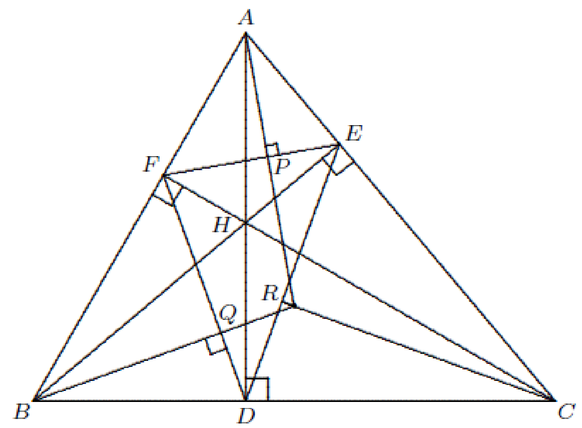



10. Pada $\Delta ABC$, jika $AX$, $BY$ dan $CZ$ berpotongan di titip $P$, Jika $AX$ adalah garis bagi $\angle A$ dan $BX. CY = XC. BZ$. Tunjukkan bahwa $\Delta ABC$ sama kaki.
11. Pada $\Delta ABC$, jika $AX$, $BY$ dan $CZ$ masing-masing adalah garis bagi dari segitiga tersebut yang berpotongan di titik $P$. Jika $BP . ZP = BZ. AP$. Tunjukkan bahwa $ABC$ adalah segitiga siku-siku.
12. Perhatikan gambar di bawah ini, $AM$ adalah garis tinggi dari titik $A$, dan $N$ adalah sebarang titik pada $AN$, kemudian buat garis $BN$ memotong $AC$ di $E$ dan $CN$ yang memotong $AB$ di F, Tunjukkan bahwa $\angle EMN = \angle FMN$




***Petunjuk*** : perpanjan garis $ME$ dan $MF$ dan buat garis dari titik $A$ yang sejajar dengan $BC$ sehingga memotong perpanjangan garis $ME$ dan $MF$ tadi.

13. *). Perhatikan gambar disebelah, *AD*, *BE* dan *CF* adalah garis tinggi. Buktikan bahwa garis yang tegak lurus dari *A* ke *EF*, garis yang tegak lurus dari *B* ke DF dan garis yang tegak lurus dari *C* ke *DE*, ketiganya berpotongan di satu titik. ***Petunjuk*** : gunakan bukti Ceva secara trigonometri



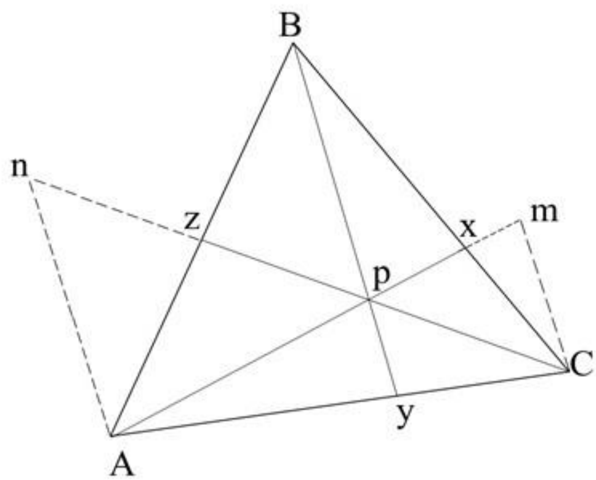

14. Misalkan *ABCD* adalah suatu trapezium yang *AB* // *CD*, jika *M* dan *N* adalah titik tengah dari *AB* dan *CD*, buktikan bahwa *MN*, *AC* dan *BD* adalah kongkuren.

15. *) Ini merupakan bentuk lain dari teorema Ceva. Perhatikan gambar disebelah, *AX*, *BY* dan *CZ* berpotongan di titik *P*, buat garis *AN* dan *CN* yang sejajar dengan *YB*, tunjukkan bahwa berlaku

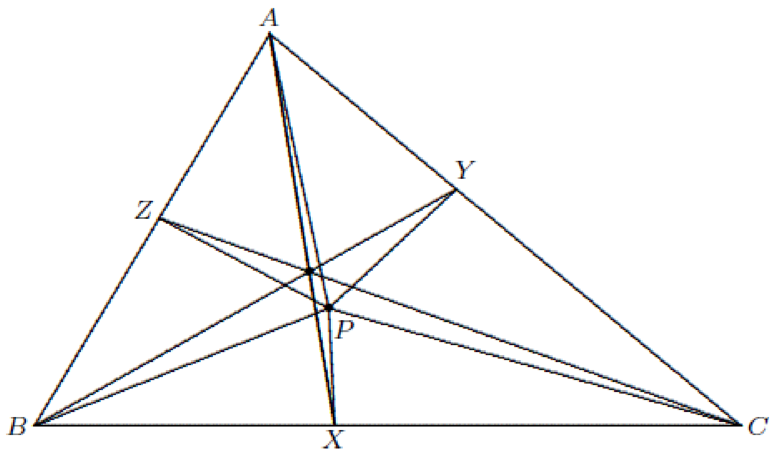
$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$

Pentunjuk : gunakan

$$\frac{AY}{YC}=\frac{AN}{CM},\frac{CX}{XB}=\frac{CM}{BP},\frac{BZ}{ZA}=\frac{BP}{AN}$$




16. Perhatikan gambar di bawah ini, misalkan titik *P* berada dalam $\Delta ABC$, kemudian bisektor dari $\angle BP$C, $\angle CP$A dan $\angle APB$ memotong sisi *BC*, *CA* dan *AB* masing-masing di titik *X*, *Y* dan Z, tunjukkan bahwa *AX*, *BY* dan *CY* adalah kongkuren

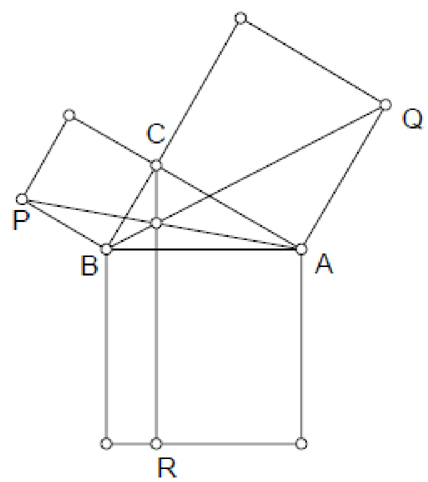



17. Gunakan teorema ceva untuk membuktikan perpendicular bisektor adalah konkuren
18. Bisakah anda justifikasi, apakah bisa digunakan teorema Ceva untuk menunjukkan eksistensi titik pusat lingkaran singgung luar.
19. Misalkan $A_1$. $B_1$ dan $C_2$ sebarang titik pada sisi $BC$, $CA$ dan $AB$ pada $\Delta ABC$, tunjukkan bahwa garis yang tegak lurus dari $A_1$, $B_1$ dan $C_1$ akan berpotongan di satu titik jika dan hanya jika

$$(BA_1)^2 - (A_1C)^2 + (CB_1)^2 - (B_1A)^2 + (AC_1)^2 - (C_1B)^2 = 0$$

***Catatan*** : Kondisi ini di sebut dengan teorema Carnot. Dengan cara lain sudah dibuktikan pada bab 6.

20. Perhatikan gambar disebelah yaitu gambar yang sama seperti pembuktian teorema Pythagoras. $\Delta ABC$ sikut-siku di $C$. Tunjukkan bahwa garis $AP$, $BQ$ dan $CR$ berpotongan di satu titik.



21. Pada sebuah $\Delta ABC$, misalkan $AP$ adalah garis bagi $\angle A$, BQ adalah garis berat sisi $AC$ dan $CR$ adalah garis tinggi dari titik $C$ ke garis $AB$. Periksalah apakah ketiga garis tersebut berpotongan disatu titik.

22. **). Hal yang sama seperti soal no 16, tunjukkan bahwa $cos\ \angle A = \frac{c}{b+c}$.

23. Diberikan ΔABC, kontruksilah titik $A'$, $B'$ dan $C'$ sehingga $\Delta ABC'$, $\Delta BCA'$ dan $\Delta CAB'$ adalah segitiga sama-kaki yang memenuhi $\angle BCA' = \angle CBA' = \angle A$, $\angle CAB' = \angle ACB' = \angle B$, $\angle ABC' = \angle BAC' = \angle C$, kemudian tunjukkan bahwa $AA'$, $BB'$ dan $CC'$ adalah kongkuren.

## 6.3. *Teorema Menelaus*

Kalau teorema Ceva memberikan syarat untuk tiga buah garis dari masing-masing titik sudut suatu segitiga bertemu pada suatu titik (konkuren), maka berikut ini akan diberikan syarat agar tiga buah titik yang berada pada sisi-sisi atau pada perpanjangan sisi-sisi suatu segitiga yang adalah segaris (colinear).

***Teorem*a 6.3.1. (*Teorema Menelaus*).**

Jika titik $D$, $E$ dan $F$ masing-masing terletak ada sisi $BC$, $CA$ dan $AB$ pada $\Delta ABC$, Maka titik $D$, $E$ dan $F$ adalah segaris jika dan hanya jika

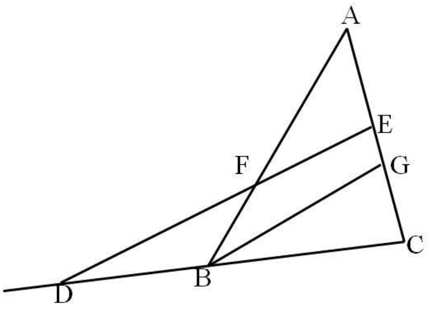
$$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA} = -1$$

**Bukti :** $\Rightarrow$ Misalkan ketiga titik $D$, $E$ dan $F$ adalah segaris, dan misalkan pula titik $G$ pada $AC$ sehingga $DE$ sejajar dengan $BG$, maka diperoleh $\Delta AFE \sim \Delta\ ABG$ yang mengakibatkan

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EG}$$

dan dari $\Delta BCG \sim \Delta\ DCE$, menghasilkan

$$\frac{BD}{DC} = \frac{GE}{EC}$$




Gambar 6.3.1

Sehingga diperoleh

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AE}{EG}\cdot\frac{GE}{EC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1$$

$\Leftarrow$ Misalkan perbandingan hasilkali ketiganya bernilai -1, Misalkan pula perpotongan *DE* dengan *AB* adalah *F′*, maka berdasarkan hipotesis diperoleh

$$\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1$$

Yang mengakibatkan

$$\frac{AF'}{F'B}=-\frac{DC}{BD}\cdot\frac{EA}{CE}=\frac{AF}{FB}$$

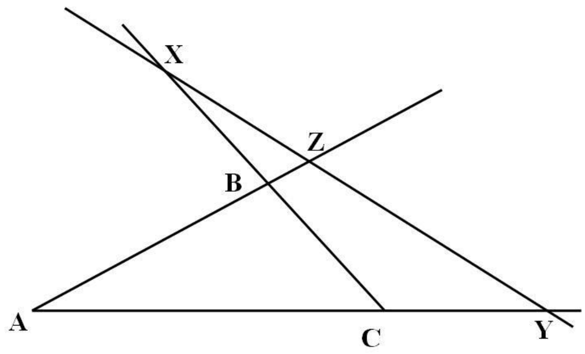
Ini mengatakan bahwa *F* = *F′*, jadi ketiga titik adalah segaris. ▼

Kalau teorema Menelaus adalah untuk menunjukkan kolinearitas dari dua titik yang berada pada penggal garis (sisi-sisi segitiga) dan satu titik lagi berada pada perpanjangan pengal garis dari sisi lainnya. Berikut ini akan ditunjukkan kewujudan kolinearitas dari tiga buah titik yang kesemuanya tidak berada pada penggal garis dari sisi-sisi segitiga tersebut, akan tetapi berada pada perpanjangan penggal garis tersebut. Teorema tentang ini sering juga disebut dengan teorema transversal Menelaus. Kondisi seperti ini yang nantinya juga dikembangkan pada kolinearitas pada lingkaran, elips dan lain sebagainya.

***Teorema* 6.3.2. *Teorema Transversal Menelaus***

Jika titik *X*, *Y* dan *Z* masing masing berada pada perpanjangan sisi *CB*, *AC* dan *AB*, maka *X*, *Y* dan Z adalah segari jika dan hanya jika

$$\frac{AZ}{ZB}.\frac{BX}{XC}.\frac{CY}{YA} = -1$$




gambar 6.3.2a

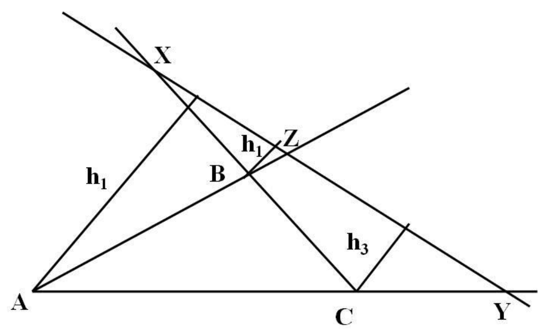
***Bukti*** **:** Buat masing-masing garis tegak lurus dari titik *A*, *B* dan *C* ke sisi *XZ* (perhatikan gambar 6.3.2a dan 6.3.2b) dan misalkan panjangnya berturut-turut adalah $h_1$, $h_2$ dan $h_3$. Maka dengan mudah anda akan dapat Menunjukkan bahwah

$$\frac{AZ}{ZB} = -\frac{h_1}{h_2}, \quad \frac{BX}{XC} = -\frac{h_2}{h_3} \quad \text{dan} \quad \frac{AY}{YC} = -\frac{h_1}{h_3}$$

Selanjutnya akan anda peroleh

$$\frac{AZ}{ZB} \times \frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} = -1$$

Untuk membuktikan sebaliknya persis sama dengan pembuktian teorema Menelaus.



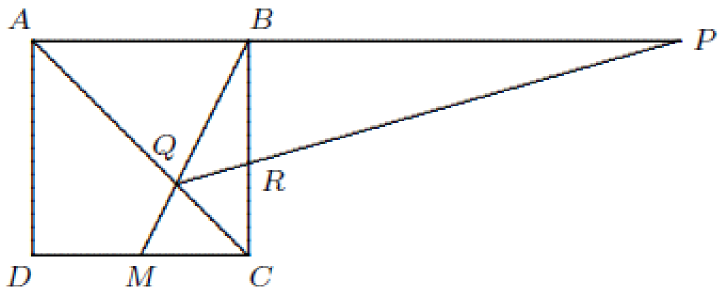

gambar 6.3.2b

***Teladan*** **6.3.2**: Jika *ABCD* suatu persegi, perpanjang *AB* sampai di *P* sehingga *BP* = 2*AB*. Misalkan M titik tengah dari *CD* dan *Q* titik perpotongan antara *AC* dan *BM*. Tentukan posisi dari *R* pada *BC* sehingga *P*, *Q* dan *R* segaris.

***Penyelesaian*** : dari $BP = 2AB$, maka $AP : PB = 3 : -2$, selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa $\Delta ABQ \sim \Delta CMQ$, sehingga $CQ : QA = CM : AB = 1 : 2$, maka berdasarkan teorema Menelaus terhadap segitiga $ABC$

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

Jadi $BR : RC = 4 : 3$

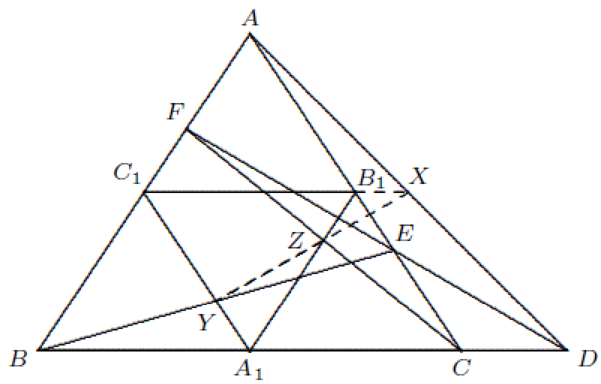



Gambar 6.3.3

## 6.4. *Konsekuensi Dari Teorema Ceva Dan Menelaus*

Penggunaan teorema ceva telah dibahas dalam subbab 6.1 dan 6.2, yang diantaranya untuk menunjukkan kongkurensi dari ketiga garis bagi, garis berat dan garis tinggi dari suatu segitiga. Sebenarnya sangat banyak sekali penggunaan teorema Ceva dan Menelaus ini. Berikut ini akan diberikan beberapa konsekuensi dari teorema Ceva dan Menelaus.

***Teorema* 6.4.1**..Jika $D$, $E$ dan $F$ masing-masing titik potong garis dari $A$, $B$ dan $C$ terhadap sisi-sisi $\Delta ABC$ seperti pada gambar 6.4.1 di bawah. Jika $X$, $Y$ dan $Z$ masing-masing merupakan titik tengah dari sisi $AD$, $BE$ dan $CF$, tunjukkan bahwa $X$, $Y$ dan $Z$ adalah segaris.




Gambar 6.4.1

***Bukti*** : Misalkan $A_1$, $B_1$ dan $C_1$ masing-masing adalah titik tengah dari sisi *BC*. *AC* dan *AB*. Maka $B_1C_1$ sejajar dengan *BC*, dengan $B_1$. $C_1$ dan *X* adalah segaris, sehingga

$$\frac{BD}{DC} = \frac{C_1X}{XB_1}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\frac{CE}{EA} = \frac{A_1Y}{YC_1} \text{ dan } \frac{AF}{FB} = \frac{B_1Z}{ZA_1}$$

Selanjutnya berdasarkan teorema Menelaus terhadap $\Delta ABC$ dengan garis *DEF* diperoleh

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$$

Lalu

$$\frac{C_1X}{XB_1} \cdot \frac{B_1Z}{ZA_1} \cdot \frac{A_1Y}{YC_1} = -1$$

Ini bermakna bahwa *X*, *Y* dan *Z* adalah segaris.

***Teorema* 6.4.2** : Misalkan *G* centroid dari $\Delta ABC$, Melalui *G* dibuat garis lurus yang memotong *AB* di *B* dan memotong *AC* di *N*. Tunjukkan bahwa

*AM* . *NC* + *AN* .*MB* = *AM* . *AN*

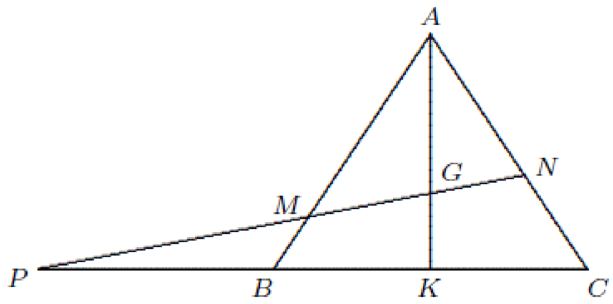
***Bukti*** : Kita tau bahwa

$$\frac{NC}{AN} + \frac{MB}{AM} = 1$$

Jika seandainya MN sejajar dengan BC maka

$$\frac{NC}{AN} = \frac{MB}{AM} = \frac{GK}{AK} = \frac{1}{2}$$

Maka hasil lansung benar.




gambar 6.4.2

Selanjutnya misalkan *MN* dan *BC* berpotongan di titik *P*. maka dengan teorema Menelaus untuk Δ*AK*B dengan garis *PMG* diperoleh

$$\frac{BP}{PK} \cdot \frac{KG}{GA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1 \quad \text{(dalam nilai mutlak)}$$

Apabila $\frac{KG}{GA} = \frac{1}{2}$, diperoleh

$$BP = \frac{2.MB.PK}{AM}$$

Dengan cara yang sama kita gunakan teorema Menelaus untuk Δ*ACK* dengan garis *PGN*, maka akan diperoleh persamaaan

$$PC = \frac{2.CN.KP}{NA}$$

Karena *PC* - *P*K = *KC* = *BK* = *PK* – *PB*, jika disubsitusikan kedalam persamaan di atas, maka akan diperoleh *AM* . *NC* + *AN* .*M*B = *AM* . *AN*.

Suatu bangun bidang dikatakan konvek jika setiap dua titik dalam bidang tersebut dihubungkan, maka garis penghubunga kedua titik tersebut semuanya berada dalam bangun tersebut. Berikut ini diberikan penggunaan secara bersama teorema Ceva dan Menelaus untuk segi-empat konvek, yang mana hasilnya adalah dalam bentuk perbandingan sisi-sisinya.

***Teorema* 6.4.3** : Dalam segiempat konvek *ACG*E, Sisi *AG* berpotongan dengan *CE* di *H*, perpanjangan AE berpotongan dengan perpanjangan CG di I. Perpanjangan EG berpotongan dengan perpanjangan AC di D. dan garis IH berpotongan dengan EG di F dan dengan AD di B. Maka

i. $\frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC}$

ii. $\frac{EF}{FG} = -\frac{ED}{DG}$

Dalam hal ini arah segmen garis digunakan

***Bukt***i : (i). perhatikan gambar disebelah dan gunakan teorema Ceva untuk $\Delta ACI$, maka diperoleh

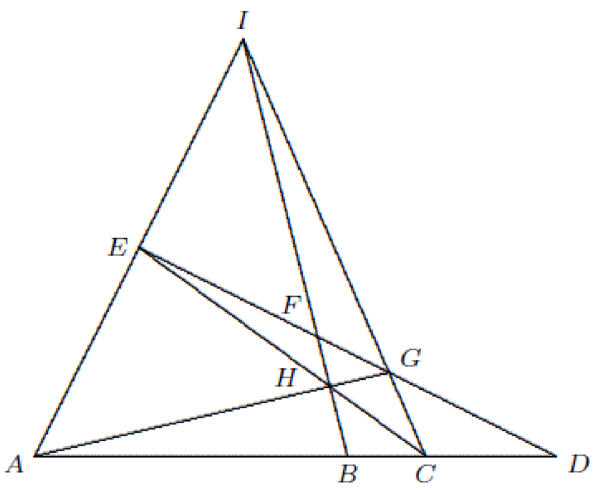
$$\frac{IE}{EA}.\frac{AB}{BC}.\frac{CG}{GI} = 1$$

Sedangkan kalau digunakan teorema Menelaus untuk $\Delta ACI$ tersebut dengan garis $EGD$ akan diperoleh

$$\frac{AD}{DC}.\frac{CG}{GI}.\frac{IE}{EA} = -1$$

Maka

$$\frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC}$$



Gambar 6.4.3

(ii). Gunakan teoema Ceva untuk $\Delta IEG$, maka dipeoleh

$$\frac{IA}{AE}.\frac{EF}{FG}.\frac{GC}{CI} = 1$$

Kemudian gunakan teorema Menelaus untuk $\Delta IEG$ tersebut, maka diperoleh

$$\frac{ED}{DG}.\frac{GC}{CI}.\frac{IA}{AE} = -1$$

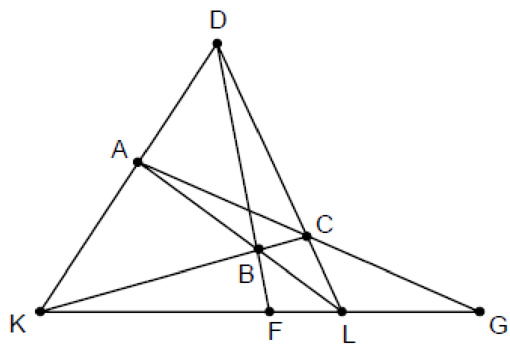
Maka

$$\frac{EF}{FG} = -\frac{ED}{DG}$$

Berikut ini diberikan bukti lain dari contoh di atas, akan tetapi arah segmen garis tidak digunakan (tentunya tanda pada kesamaan akan berobah). Pembuktian cukup digunakan hanya dengan menggunakan konsep luas saja. Hal ini sengaja diberikan dengan tunjuan untuk menunjukkan yang menjadi konten utama dalam buku ini yaitu menunjukkan bahwa banyak teorema dan persoalan dalam goemeti bisa diselesaikan dengan konsep yang cukup sederhana, seperti konsep luas, teorema Pythagoras dan lain konsep geoemetri sederhana lainnya yang sudah dikenal pada tingkat sekolah menengah.

***Teladan* 6.4.1** : Perhatikan gambar berikut, pada segiempat convek *ABCD*, garis *D*A dan *CB* berpotongan di *K*, garis *AB* dan *DC* berpotongan di *L*, garis *AC* dan *KL* berpotongan di *G*, garis *DB* dan *KL* berpotongan di *F*. buktikan

$$\frac{KF}{FL} = \frac{KG}{GL}$$



gambar 6.4.4

***Penyelesaian*** : perhatikan bahwa

$$\frac{KF}{FL} = \frac{L\Delta KBD}{L\Delta LBD} = \frac{L\Delta KBD}{L\Delta KBL} \times \frac{L\Delta KBL}{L\Delta LBD}$$

$$= \frac{CD}{CL} \times \frac{AK}{AD}$$

$$= \frac{L\Delta ACD}{L\Delta ACL} \times \frac{L\Delta ACK}{L\Delta ACD} = \frac{L\Delta ACK}{L\Delta ACL} = \frac{KG}{LG}$$

***Teladan* 6.4.2** : Pada Δ*AB*C disebelah, buat *AX* dan *BY* yang berpotongan di titik *R*, jika $\frac{AY}{YC} = p$ dan $\frac{AR}{RX} = q$ tentukanlah perbandingan $\frac{BX}{XC}$ dalam bentuk p dan q.

***Penyelesian*** : Perhadikan ΔAXC dan sisi BRY sebagai transversalnya, maka dengan menggunakan teorema Menelaus akan diperoleh :

$$\frac{AR}{RX} \cdot \frac{XB}{BC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

Maka

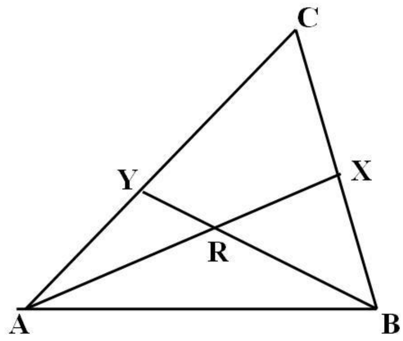
$$\frac{BC}{XB} = \frac{AR}{RX} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{q}{p}$$

Jadi

$$\frac{BX+XC}{BX} = \frac{q}{p}$$

$$1 + \frac{XC}{BX} = \frac{q}{p}$$

$$\frac{XC}{BX} = \frac{q}{p} - 1 = \frac{q-p}{p}$$



gambar 2.6.5

Jadi

$$\frac{BX}{XC} = \frac{p}{q-p}$$

*Teladan* 6.4.3 *:* Pada $\Delta ABC$, titik *D*, *E* dan *F* berturut-turut merupakan titik potong garis tinggi dari titik *A*, *B* dan *C* terhadap sisi *BC*, *CA* dan *AB*. Bila *P*, *Q* dan *R* adalah titik potong garis tinggi dari titik *A*, *B* dan *C* pada *EF*, *FD* dan *DE*. Tunjukkan *P*, Q dan *R* adalah segaris.

***Penyelesaian*** : Pertama-tama tunjukkan secara trigonometri bahwa

$\sin \angle FAP = \cos \angle AFP = \cos C.$

Dengan cara yang sama anda dapat menunjukkan

$\sin\angle PAE = \cos B = \sin\angle ECR$

$\sin\angle RCD = \cos A, \sin\angle DBQ = \cos A$

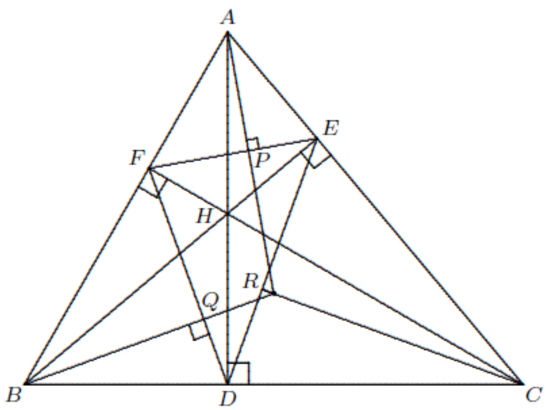
dan

$\sin\angle QBF = \cos C.$

Maka

$$\frac{\sin\angle FAP}{\sin\angle PAE}\cdot\frac{\sin\angle ECR}{\sin\angle RCD}\cdot\frac{\sin\angle DBQ}{\sin\angle RBF} = 1$$

Ini bermakna bahwa titik *P*, *Q* dan *R* adalah segaris

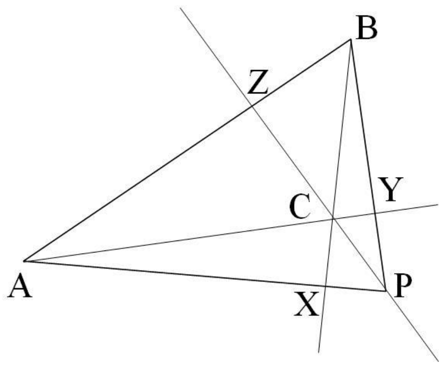


Gambar 6.2.6

.

***Soal Latihan*** **9**.

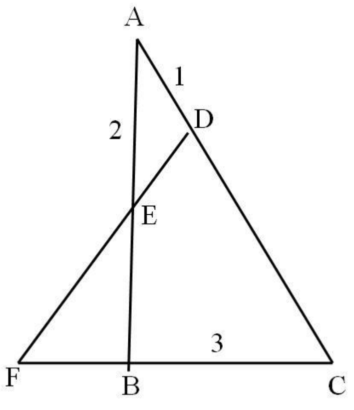
1. Perhatikan gambar disebelah, dimana $P$ adalah orthocenter dari $\Delta ABC$. Tunjukkan bahwa ketiga garis tinggi berpotongan disatu titik.




2. Buktikan teorema Menelauos dengan menggunakan luas daerah.
3. Dalam $\Delta ABC$, $D$ dan E masing-masing berada pada garis $BC$ dan $CA$, jika $AD$ dan $BE$ berpotongan di titik $S$. kemudian $CP$ dan $AB$ berpotongan dititik $P$, Jika $DE$ dan $AB$ berpotongan dititik $Q$, tunjukkan

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$$

4. Jika G centroid dari $\Delta$ $ABC$ dan $\Delta$ $ABC$ sebangun dengan $\Delta$ $A'B'C'$ dengan perbandingan 1 : 2, maka G juga centroid dari $\Delta$ $A'B'C'$..
5. Jika pada gambar disebelah $\angle B = 90^0$, $BC = 3$ cm, $AB = 4$ cm , AD = 1 cm. Tentukan panjang sisi $BF$.




6. Misalkan P titik di dalam $\Delta ABC$, $AP$, $BP$ dan $CP$ masing-masing memotong sisi $BC$, $CA$ dan AB di titik $D$, $E$ dan $F$, tunjukkan bahwa $\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1$

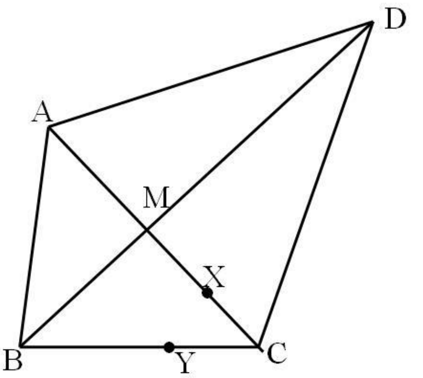
7. Jika pada suatu $\Delta$ *ABC*, *AP*, *BQ* dan *CR* bertemu di suatu titik, tunjukkan bahwa :

$$\frac{TP}{AP}+\frac{TQ}{BQ}+\frac{TR}{CR}=1$$

8. Jika pada gambar disebelah $AM = MC$ dan $DM = 2MB$, buat titik *X* dan *Y* masing-masing pada sisi *CM* dan *BC* sehingga

$$\frac{AC}{MX}=\frac{BY}{YC}=3$$

tunjukkan bahwa *D*, *X* dan *Y* segaris.




9. Buktikan teorema 6.4.6 pada bab 6 dengan menggunakan teorema Menelaus.
10. Diberikan $\Delta ABC$, misalkan *D* dan *E* sebarang titik pada *BC*, Sebuah lingkaran memotong segment garis *AB*, *AC*, *AD* dan *AE* masing-masing adalah di titik *P*, *Q*, *R* dan *S*. Buktikan

$$\frac{AP.AB - AR.AD}{AS.AE - AQ.AC}.=\frac{BD}{CE}$$

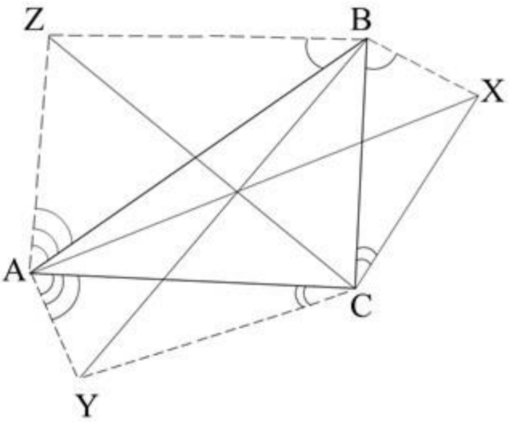
11. *) Perhatikan gambar disebelah dan *X*, *Y* dan Z seperti dalam gambar. Dengan

$\angle ABZ = \angle CBX$

$\angle BCX = \angle ABY$

$\angle BAZ = \angle CAY$

Tunjukkan *AX*, *BY* dan *CZ* adalah kongkuren



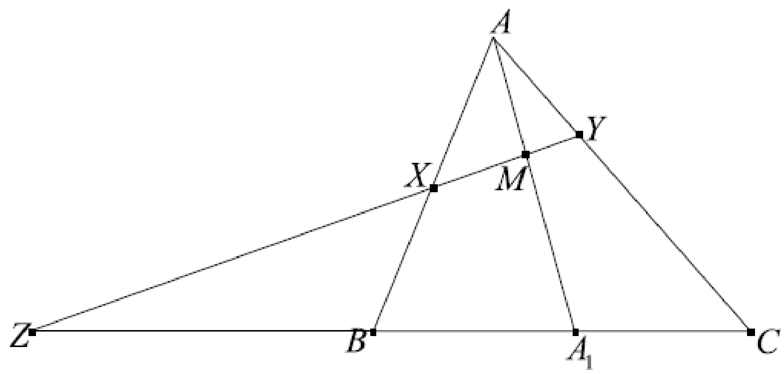

12. Diberikan suatu $\Delta ABC$, misalkan *X* adalah titik potong bisector sudut *A* ke sisi *BC*, dan *Y* titik potongn bisector dari sudut *A* ke sisi *BC*, sedangkan *Z* adalah titik potong bisector sudut luar *C*, tunjukkan bahwa *X*, *Y* dan *Z* segaris.

13. Tunjukkan dengan menggunakan teorema Menelaus bahwa jika *H* orthocenter dari $\Delta ABC$, tunjukkan bahwa garis euler dari $\Delta ABC$, $\Delta HBC$, $\Delta HCA$ dan $\Delta HAB$ adalah segaris.
14. *). Diketahui segitiga sebarang (tidak samakaki). Pada setiap sudut luar segitiga dibuat garis bagi dan diperpanjang hingga memotong sisi lain di segitiga. Buktikan bahwa ketiga titik potong tersebut kolinear.
15. Pada $\Delta$ABC misalkan $A_1$ pada sisi BC, sedangkan X dan Y berada pada sisi AB dan AC. Jika garis YX memotong $AA_1$ di titik M dan memotong perpanjangan CB di titik Z (seperti pada gambar di bawah , jika

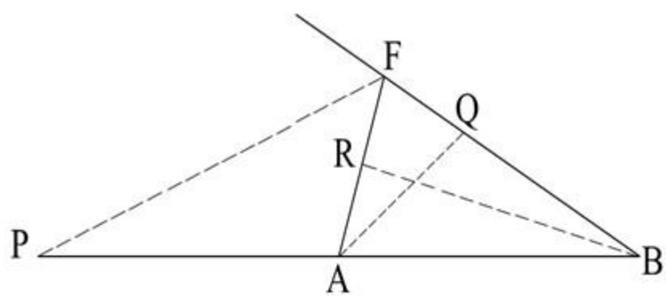
$$\left|\frac{A_1B}{A_1C}\right| = \frac{\angle C}{\angle B}$$

Tunjukkan bahwa

$$\angle B.\frac{|XB|}{|XA|} + \angle C.\frac{|YC|}{|YA|} = (\angle B + \angle C).\frac{|A_1M|}{MA}$$




16. *) Perhatikan gambar disebelah, dengan *AQ* bisector $\angle A$, *BR* bisector $\angle B$ dan FP bisector sudut luar $\angle F$. tunukkan *P*, *Q* dan *R* segaris.

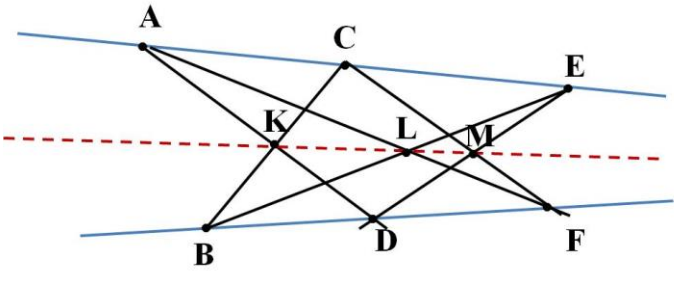


## 6.5. *Teorema Pappus*

Kalau teorema Ceva menunjukkan kewujudan tiga buah garis yang kongkuren dan Menelaus menyatakan kewujudan tiga buah titik yang kolinear, maka berikut ini akan dibahas kewujudan kolinearitas dari titik perpotongan 6 buah titik pada lingkaran.

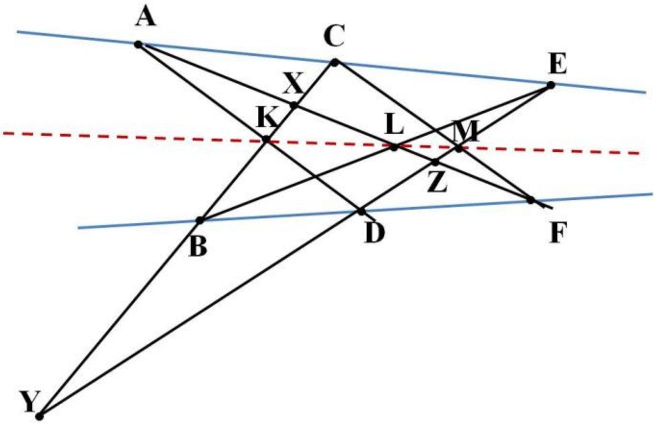
***Teorema 6.5.1.(Teorema Pappus)*** : Jika titik *A*, *C* dan *E* berada pada suatu garis dan titik *B*, *D* dan *F* berapa pada garis lainnya, dan jika terdapat garis *AD*, *AF* dan *CF* masing-masing berpotongan dengan *BC*, *BE* dan DE. Maka ketiga titik potongnya yaitu *K*, *L* dan *M* adalah segaris.

***Bukti*** : perhatikan gambar di bawah ini




Gambar 5.6.1

Pada gambar 6.5..1 perpanjang sisi *ED* dan *CB* sehingga berpotongan dititik *Y* dan sebut perpotongan *AF* dengan *CB* adalah *X* dan perpotongan *AF* dengan *ED* adalah *Z*, seperti pada gambar 6.5.2




Gambar 6.5.2

Pandang segitiga *XYZ* dengan garis transpersal adalah *BDF*, maka dengan menggunakan teorema Menelaus akan diperoleh

$$\frac{XB}{BY}.\frac{YD}{DZ}.\frac{ZF}{FX} = -1 \text{ dan}$$

$$\frac{XC}{CY}.\frac{YE}{EZ}.\frac{ZA}{AX} = -1$$

Kemudian dengan memandang *AD* sebagai garis transpersalnya akan diperoleh pula

$$\frac{XK}{KY}.\frac{YD}{DZ}.\frac{ZA}{AX} = -1$$

Untuk BE sebagai garis transpersal diperoleh

$$\frac{XB}{BY}.\frac{YE}{EZ}.\frac{ZL}{LX} = -1$$

Dan *CF* sebagai garis transpersalnya akan diperoleh

$$\frac{XC}{CY}.\frac{YM}{MZ}.\frac{ZF}{FX} = -1$$

Maka dari kelima persamaan di atas akan mengakibatkan

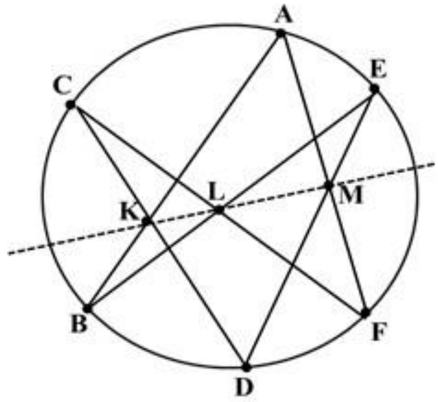
$$\frac{XK}{KY}.\frac{YM}{MZ}.\frac{ZL}{LX} = -1$$

Dan ini bermakna bahwa ketiga titik *X*, *Y* dan *Z* adalah segaris.

Berikut ini perhatikan kalau teorema Pappus itu kita berlakukan untuk lingkaran dengan 2 kasus, kasus pertama persis sama seperti lingkaran akan tetapi kedua garisnya dalam bentuk sebuah lingkaran yang posisi ke enam titiknya saling bersebelahan. Pada teorema ini bentuk perpotongan dua buah garis dilambangkan dengan $\cap$, dengan $K = AB \cap CD$ bermakna titik *K* merupakan titik potong dari garis *AB* dengan *CD*. Banyak sekali cara yang dapat ditempuh untuk membuktikan teorema di bawah, akan tetapi disini hanya akan diberikan salah satu cara pembuktian dengan menggunakan teorema Menelaus.

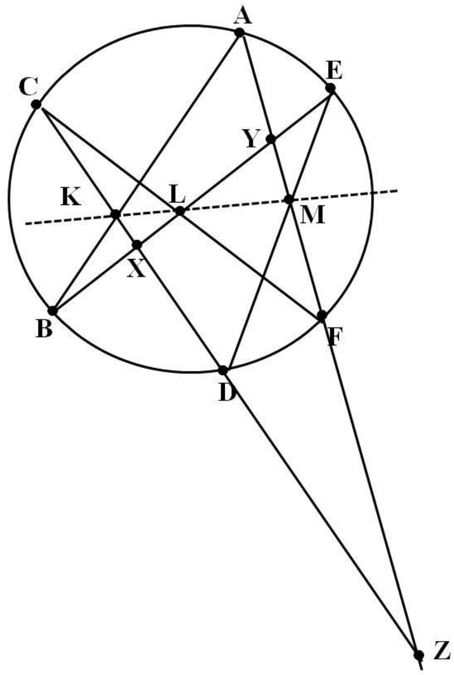
***Teorema 6.5.2*** : Misalkan *A*, *B*, *C*, *D*, *E* dan *F* adalah 6 buah titik pada lingkaran (tidak perlu berurutan. Misalkan $K = AB \cap CD$, $L = CF \cap BE$ dan $M = DE \cap AF$. Maka *K*, *L* dan *M* adalah segaris :

***Bukti*** : Perhatikan gambaru 6.5.3




Gambar 6.5.3

kemudian perpanjang *CD* dan *AF* sehingga bertemu di titik *Z*, sebut X = *CD* ∩ *BE* dan *Y* = BE ∩AF. Cara pemiliha titik *X, Y, Z* untuk membuktikan teorema berikut tidaklah tunggal. Banyak cara yang dapat ditempuh. Misalkan titik *X, Y* dan *Z* seperti pada gambar 6.5.3 .Kemudian terapkan teorema Menelaus pada ∆*XYZ* dengan berturut-turut sisi *CF*, *AB* dan DE sebagai garis transversalnya,




Gambar 6.5.4

Maka akan diperoleh tiga buah persamaan berikut ini

$$\frac{XL}{LY}.\frac{YF}{FZ}.\frac{ZC}{CX} = -1$$

$$\frac{XB}{BY}.\frac{YA}{AZ}.\frac{ZK}{KX} = -1$$

$$\frac{XE}{EY}.\frac{YM}{MZ}.\frac{ZD}{DX} = -1$$

Kemudian karena

*XB. XE* = *XC. XD*

*YA. YF* = *YB. YE*

*ZD. ZC* = *ZF. ZA*

Maka dari ketiga persamaan Menelaus di atas akan mengakibatkan

$$\frac{XL}{LY}.\frac{YM}{MZ}.\frac{ZK}{KX} = -1$$

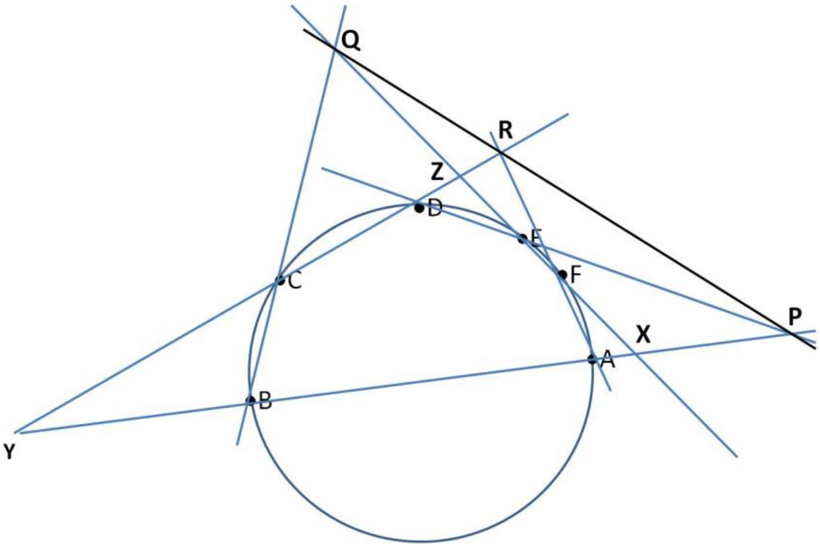
Dengan persamaan yang terakhir ini bermakna bahwa ketiga titik *K*, *L* dan *M* adalah segaris.

## 6.6. Teorema Pascal

Berikut ini juga bentuk lain dari teorema Pappus, akan tetapi titik-titik yang dihubungkan berbeda dengan yang diteorema 6.6.1, teorema ini lebih dikenal dengan teorema Pascal, akan tetapi pembuktiannya juga tetap menggunakan teorema Menelaus.,

***Teorema 6.6.1 (Teorema Pascal)*** : Misalkan *A*, *B*, *C*, *D*, *E* dan *F* adalah 6 buah titik pada lingkaran (tidak perlu berurutan. Misalkan $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$ dan $R = CD \cap FA$. Maka *P*, *Q* dan *R* adalah segaris

***Bukti*** : perhatikan gambar dibawah ini




Gambar 6.6.1

Misalkan $X = EF \cap AB$, $Y = AB \cap CD$ dan $Z = CD \cap EF$, perhatikan $\Delta XYZ$ dengan *BC* sebagai sumbu transversal, maka akan diperoleh

$$\frac{ZQ}{QX} \cdot \frac{XB}{BY} \cdot \frac{YC}{CZ} = -1$$

Kemudian secara berturut-turut juga untuk $\Delta XYZ$ dengan garis transversal *DE* dan *FA*, masing-masing akan diperoleh :

$$\frac{XP}{PY} \cdot \frac{YD}{DZ} \frac{ZE}{EX} = -1 \quad \text{dan}$$

$$\frac{YR}{RZ} \cdot \frac{ZF}{FX} \cdot \frac{XA}{AY} = -1$$

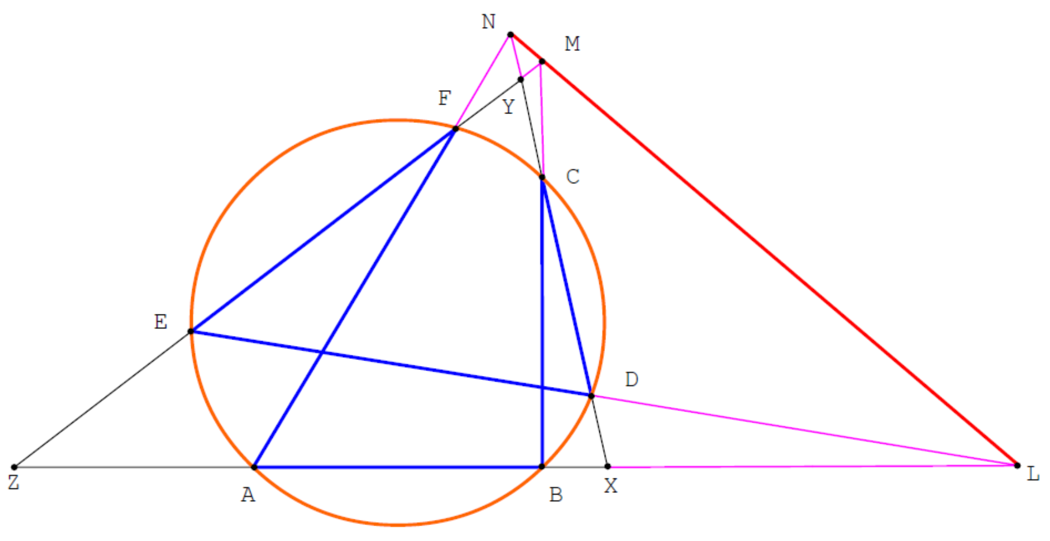
Jika dikalikan ketiga persamaan di atas, maka akan diperoleh

$$\frac{ZQ}{QX}\cdot\frac{XB}{BY}\cdot\frac{YC}{CZ}\cdot\frac{XP}{PY}\cdot\frac{YD}{DZ}\cdot\frac{ZE}{EX}\cdot\frac{YR}{RZ}\cdot\frac{ZF}{FX}\cdot\frac{XA}{AY}=\frac{ZQ}{QY}\cdot\frac{XP}{PY}\cdot\frac{YR}{RZ}=\ -1 \qquad (6.6.1\ )$$

Hal ini disebabkan karena *XA*. *XB* = *XE XF*, *YC*. *YD* = *YA*. *YA* dan *ZE*. *ZF* = *ZC*. *ZD*. Berdasarkan teorema Menelaus, maka persamaan 6.6.1 di atas bermakna bahwa *P*, *Q* dan *R* adalah segaris (kolinear)

Sekali lagi cara pemilihan titik *X*, *Y* dan *Z* dalam proses pembuktian teorema di atas tidak tunggal, Pembaca dapat memilih posisi lain dari *X*, *Y* dan *Z* sehingga teorema Menelaus masih dapat diterapkan dalam proses pembuktiannya. Selain cara pemilihat titik *X*, *Y* dan *Z*, titik pada lingkaran yang dihubungkan, juga boleh berbeda dari gambar di atas (perhatikan soal latihan no 3).

Kalau di atas posisi titik yang dihubungkan adalah setiap dua titik yang berdekatan, tapi berikut ini juga dapat kita tunjukkan sifat segaris dari ketiga titik potong bila yang dihubungkan adalah salahsatunya dua titik yang berdekatan dan yang lainnya adalah dengan titik yang berlawanan posisinya dengan titik tersebut. Perhatikan gambar 5.6.2




Gambar 6.6.2.

Gunakan teorema Menelaus untuk $\Delta LDE$, maka akan diperoleh

$$\frac{XD}{DY} \cdot \frac{YE}{EZ} \cdot \frac{ZL}{LX} = -1$$

Kemudian untuk $\Delta MCB$, maka akan diperoleh

$$\frac{XC}{CY} \cdot \frac{YM}{MZ} \cdot \frac{ZB}{BX} = -1$$

Selanjutnya untuk $\Delta NFA$, maka akan diperoleh

$$\frac{XN}{NY} \cdot \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{AL}{AX} = -1$$

Maka dari ketiga persamaan di atas akan diperoleh

$$\frac{XD}{DY} \cdot \frac{YE}{EZ} \cdot \frac{ZL}{LX} \cdot \frac{XC}{CY} \cdot \frac{YM}{MZ} \cdot \frac{ZB}{BX} \cdot \frac{XN}{NY} \cdot \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{AL}{AX} = -1$$

Akan tetapi karena

$$XD \,.\, XC = XB \,.\, XA;$$

$$YD \,.\, YC = YF \,.\, YE$$

dan

$$ZF \,.\, ZE = ZB \,.\, ZA$$

Dengan $XA = -AX$, $XB = -BX$, dan lain sebagainya, maka akhirnya akan diperoleh

$$\frac{XL}{LX} \cdot \frac{XN}{NY} \cdot \frac{YM}{MZ} = -1$$

Yang bermakna bahwa ketiga titik $X$, $Y$ dan $Z$ adalah segaris.

Diberikan sebarang $\Delta ABC$, kemudian dikontruksi lingkaran luar padanya, misalkan sebarang titik $P$ berada pada lingkaran luar tersebut, dari titik $P$ dibuat garis yang tegak lurus ke sisi $BC$, $AC$ dan $AB$ masing-masing adalah titik $X$, $Y$ dan $Z$ seperti gambar di bawah ini.

***Teorema* 6.6.2** : Ttitik $X$, $Y$ dan $Z$ seperti yang dikontruksi di atas adalah segaris. Garisnya itu disebut dengan ***garis Simson's*** (atau ***garis Wallace's***).

***Bukti*** : Perhatikan bahwa $\angle PZB$ dan $\angle PXB$ adalah sudut siku-siku, sehingga diperoleh

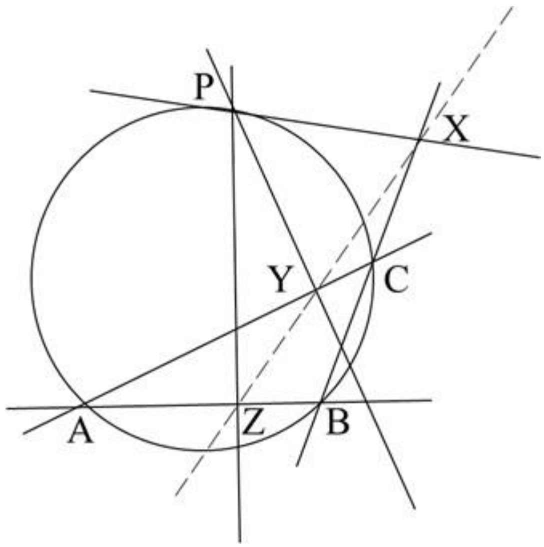
$$\angle XPZ + \angle ZBX = 180^0.$$

Yang mengakibatkan segiempat $PXBZ$ adalah segiempat siklik. Jadi $\angle PXZ = \angle PBZ$.

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa segiempat *PXCY* juga segiempat siklik dan juga $\angle PCA = \angle PCY = \angle PXY$.

Selanjutnya $\angle PXZ = \angle PBZ = \angle PBA = \angle PCA = \angle PCY = \angle PXY$

Maka jelas dari sini *C*, *Y* dan *Z* adalah segaris.

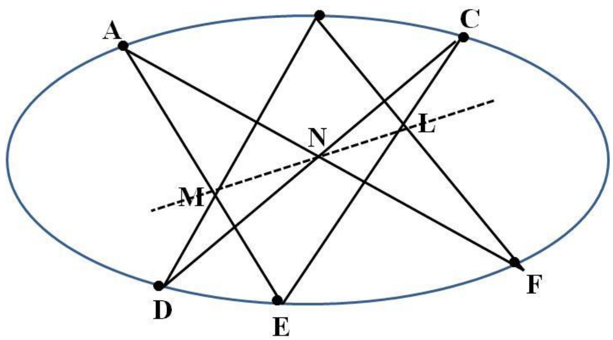



gambar 5.6.3

Kalau di atas menyatakan bagaimana perluasan teorema Pappus pada lingkaran, maka berikut ini akan dibahas teorema Pappus pada Ellips, yaitu sebagai berikut :

***Teorema 5.6.3*** : Misalkan 6 buah titik berada pada ellips (positinya tidak perlu berurutan) misalkan $N = AE \cap BD$ dan $M = AF \cap CD$ serta $L = BF \cap CE$, maka *L*, *M* dan *N* adalah segaris.

***Bukti*** : Proses pembuktian ini sebenarnya hampir sama dengan pembuktian teorema pappus untuk lingkaran, jadi disini hanya sekedar untuk menunjukkan bahwa teorema pappus juga berlaku pada ellips.  Untuk proses pembuktian selanjutnya dalam sebagai latihan bagi pembaca

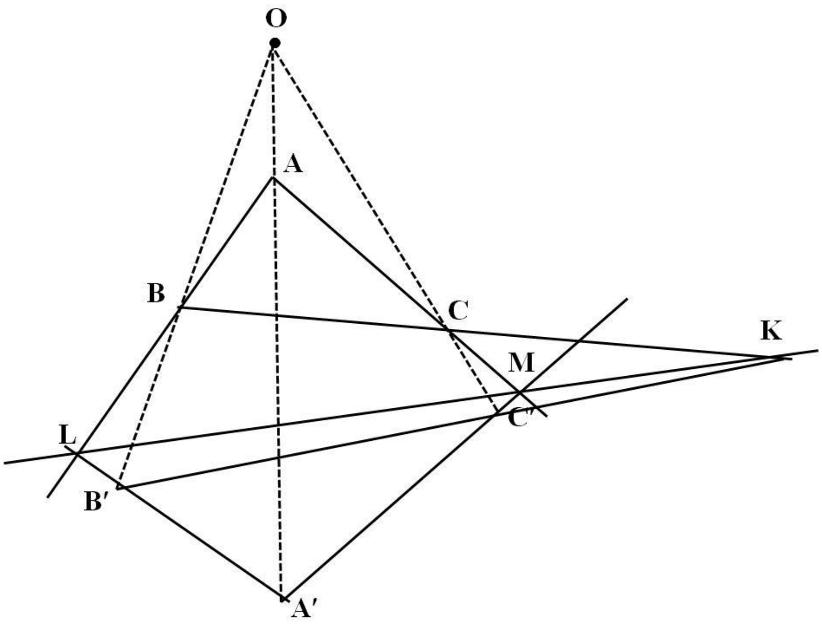



Gambar 5.6.4

### 6.7. Teorema Desargues's

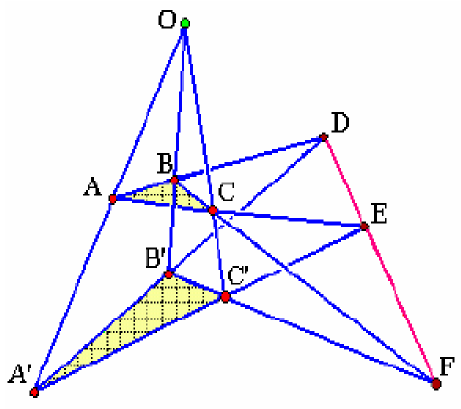
Salah satu istilah lain yang sering muncul dalam eksistensi titik yang segaris adalah istilah persepktif (perspective), dalam berbagai buku juga sering disebut dengan istilah Homologic. Dua buah $\Delta ABC$ dan $\Delta A'B'C'$ dikatakan perspektif bila ketiga titik potong sisi yang berpasangan adalah segaris. Jadi bila $K$ adalah titik potong $BC$ dengan $B'C'$ dan $L$ adalah titik potong $AC$ dengan $A'C'$ serta $M$ adalah titik potong sisi $AB$ dengan $A'B'$, maka $K$, $L$ dn $M$ segaris. Dan garis yang menghubungkan $KLM$ tersebut dikatakan sumbu perspektif (seperti gambar di bawah ini). Sedangkan titik $O$ disebut pusat perspektif. Dan sering ditulis dalam bentuk teorema berikut, yang lebih dikenal dengan teorema Desargues's berikut ini.

***Teorema 6.7.1 (Teorema Desargues's)*** : Jika dua buah segitiga adalah perspektif dari suatu titik, dan jika pasangan yang berhubungan adalah berpotongan, maka ketiga titik perpotongannya adalah segaris.



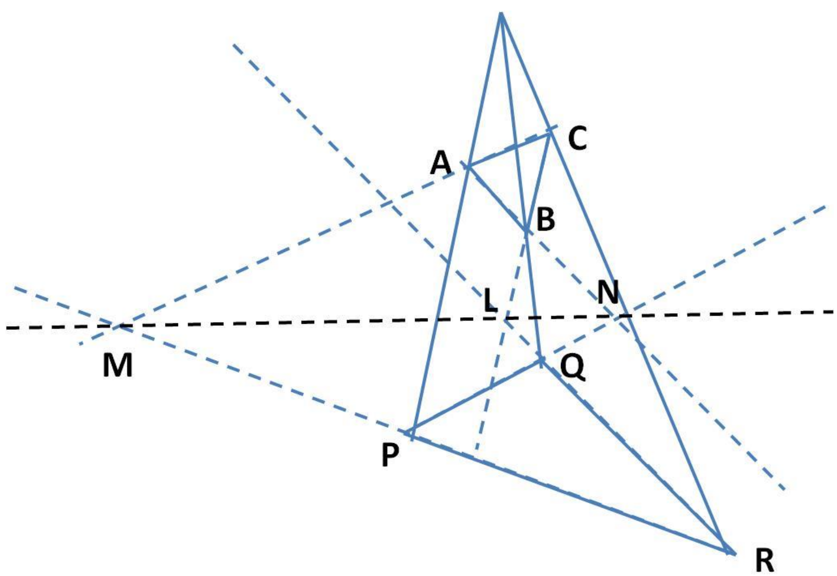

Gambar 6.7.1

Bentuk ilustrasi dari teorema di atas dapat dalam bermacam-macam bentuk, misalnya seperti gambar disebelah, yang mana ketiga titik potongnya berada pada sebelah yang sama dari segitiga tersebut. Garis perspektifnya adalah garis yang menghubungkan titik *D*, *E* dan *F*.




Gambar 6.7.2

***Bukti teorema 6.7.1 (Teoerma Desargues's)*** : perhatikan gambar di bawah ini dan akan dibuktikan bahwa garis *L*, *M* dan *N* adalah segaris




Gambar 6.7.3

Perhatikan $\Delta OBC$ dan perpanjang sisi-sisinya, maka berdasarkan teorema Menelaus diperoleh

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CR}{RO}\cdot\frac{OQ}{QB} = -1$$

Kemudian perhatikan $\Delta$ *OCA*, sama seperti di atas akan diperoleh

$$\frac{CM}{MA}.\frac{AP}{PO}.\frac{OQ}{QA} = -1$$

Selanjutnya perhatikan $\Delta OAB$, juga dengan cara yang serupa seperti di atas akan diperoleh

$$\frac{AN}{NB}.\frac{BQ}{QO}.\frac{OP}{PA} = -1$$

Dari ketiga persamaan di atas akan diperleh

$$\frac{BL}{LC}.\frac{CM}{MA}.\frac{AN}{NB} = -1$$

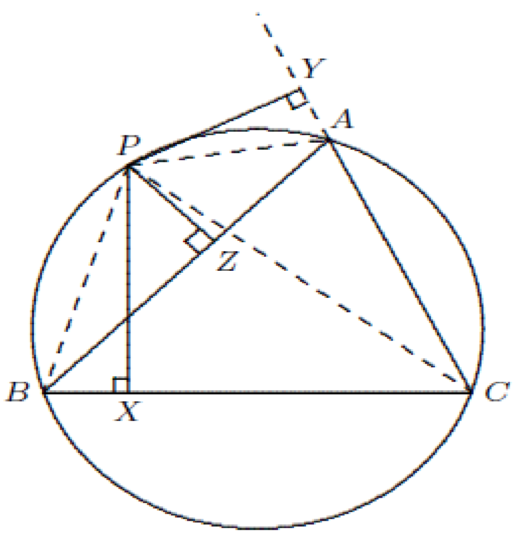
Yang bermakna bahwa ketiga titik *L*, *M* dan *N* adalah segaris.

Berikut ini akan dibahas kolinearitas (segaris) dari tiga buah titik pada lingkaran luar dari suatu $\Delta ABC$ yang dikenal dengan garis Simson. Pembuktian segarisnya tidak dengan menggunakan teroema Ceva ataupun teorema Menelaus. Pembaca yang dapat mencoba membuktikannya dengan menggunakan teorema tersebut.

**Teorema 6.7.2.*Teorema* (*garis Simson*).** Jika *P* berada pada sebarang lingkaran luar segitiga ABC, Jika P diprokyeksikan pada ketiga sisi $\Delta$ *ABC*, maka ketiga titik proyeksinya tersebut adalah segaris.

*Bukti* : Perhatikan bahwa segiempat *PZAY*; *PXCY* dan *PACB* merupakan segiempat siklik.

Maka jelas $\angle PYZ = \angle PAZ = \angle PCX = \angle PYX$. Ini menunjukkan bahwa *Y*, *Z* dan *X* adalah segaris.

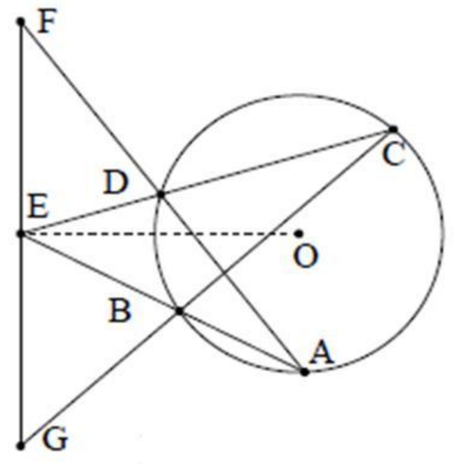



gambar 6.7.4

Dalam banyak hal garis Simson dari titik $D$ terhadap $\Delta\ ABC$ disimbolkan dengan $D(ABC)$ yang dengan $D$ berada pada lingkaran luar dari $\Delta$ABC dan yang segaris tersebut adalah proyeksi dari titik $D$ ke masing-masing sisi dari $\Delta ABC$ tersebut.

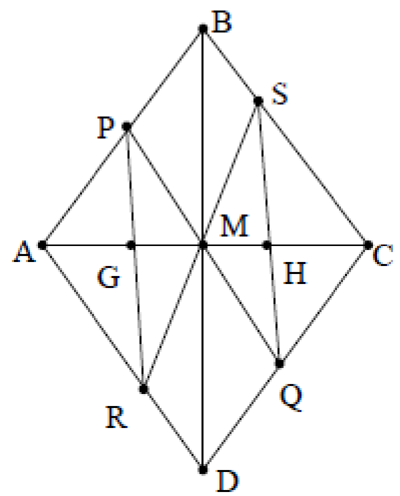
***Soal Latihan* 10.**

1. Jika $A$, $C$ dan $E$ tidak buah titik pada suatu garis, $B$, $D$ dan $F$ tiga buah titik pada garis lainnya. Jika dua buah garis $AB$ dan $CD$ masing-masing adalah sejajar ke garis $DE$ dan $FA$. Tunjukkan $EF$ sejaran dengan $BC$.
2. Jika $C$ dan $F$ sebarang titik pada sisi $AE$ dan $BD$ segiempat $ABCD$, misalkan $M$ dan $N$ masing-masing merupakan irisan $CD$ dengan $FA$ dan $EF$ dengan $BC$. Jika $MN$ berpotongan dengan $DA$ dititik $P$ dan berpotongan dengan $EB$ dititik $Q$. Tunjukkan $AP = QB$.
3. Buktikan secara lengkap teorema 6.6.3
4. Jika titik A, C dan E berada pada sebuat garis dan titik B, D, F berada pada garis lainnya. Jika garis AB // DE dan CD // FA. Tunjukkan bahwa garis EF // BC.
5. Perhatikan gambar disebelah dengan $O$ titik pusat lingkaran, Tunjukkan bahwa $GE = EF$.

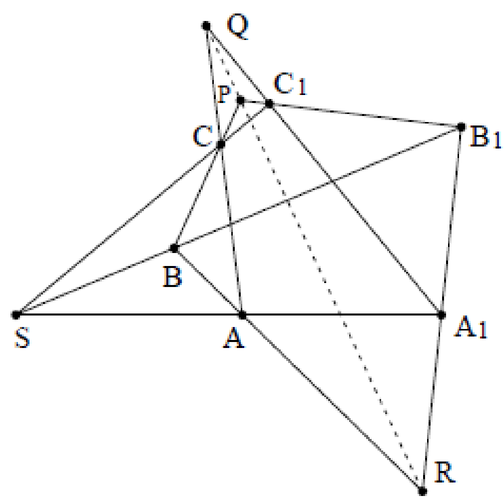


6. Jika titik A, B, D, E, M dan N adalah enam buah titik sehingga garis AE, DM dan MB adalah kongkuren, begitu juga dengan garis AM, DB dan ME adalah kongkuren. Periksalah bagaimana dengan garis AB, DE, MN.
7. Ini disebut dengan teorema Butterfly untuk segiempat. Misalkan segi-empat *ABCD* dengan *AB* = *BC* dan *A*D = *D*C, *M* adalah titik tengah perpotongan diagonal *AC* dengan *BD*.

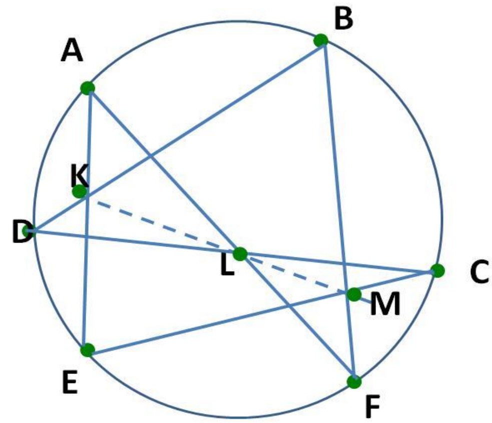
   Tepat melalui *M* dibuat dua buah garis yang memotong sisi segi-empat di *P*, *Q*, *R* dan *S*. Misalkan $G = PR \cap AC$, $H = SQ \cap AC$. Tunjukkan *GM* = *MH*.




8. Soal nomor ini persis sama dengan teorema Desarques's akan tetapi bentuknya gambarnya saja yang berbeda. Tunjukkanlah *P*, *Q* dan *R* segaris



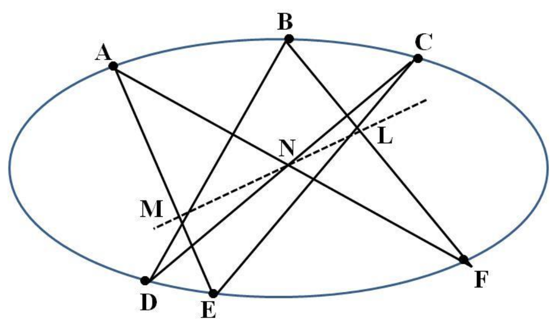
9. Perhatikan gambar disebelah, tunjukkan bahwa ketiga titik *K*, *L* dan *M* adalah segaris



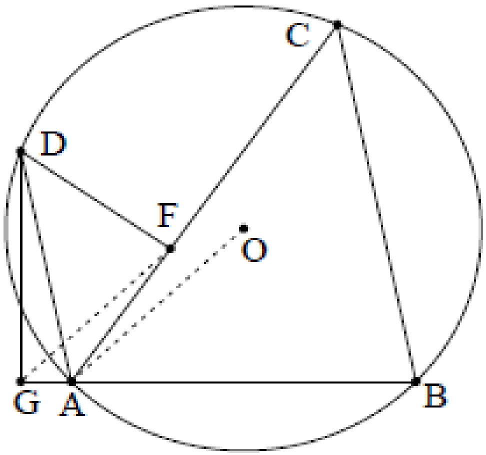

10. Misalkan segi-empat *ABCD*, dengan *M* adalah titik tengah perpotongan diagonal segiempatg yang berpotongan di titik tengah *AC* . Tepat melalui *M* dibuat dua buah garis yang memotong sisi segi-empat di *P*, *Q*, *R* dan *S*. Misalkan $G = PR \cap AC$, $H = SQ \cap AC$. Tunjukkan

$$\frac{MG}{AG} = \frac{MH}{CH} \cdot \frac{CM}{MA}$$

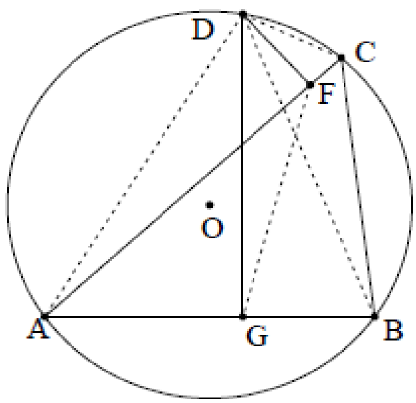
11. Pada gambar disebelah, misalkan *X* titik potong garis *AF* dengan *BD* dan *Y* adalah titik potong garis *AF* dengan *CE*, kemudian perpanjanglah garis *BD* dan *CE* sehingga bergtemu dititik *Z*. kemudian tunjukkanlah bahwa ketiga titik *L*, *M* dan *N* adalah segaris.



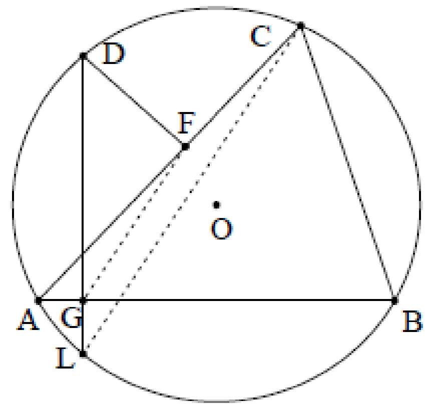
12. Jika $O$ merupakan titik pusat lingkaran luar $\Delta ABC$ dan titik D berada pada lingkaran, garis $DA$ // $BC$. Tunjukkan $D(ABC)$ sejajar dengan $OA$.



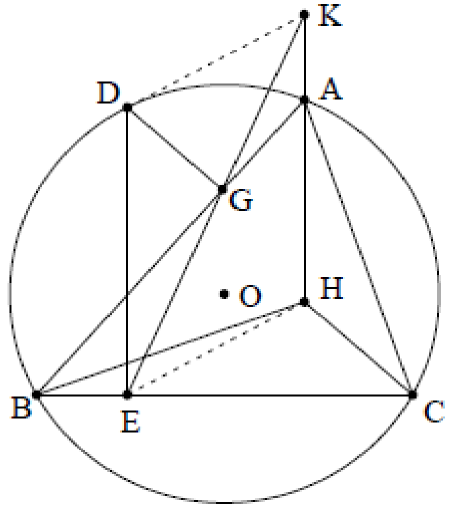

13. Sempurnakan gambar disebelah yang mana $O$ titik pusat lingkaran luar $\Delta ABC$ dan $E$, $F$ dan $G$ masing-masing adalah proyeksi dari titik D ke sisi $BC$, $AC$ dan $AB$ yaitu garis Simson $D(ABC)$. Tunjukkan $\Delta DFG \sim \Delta DBC$.



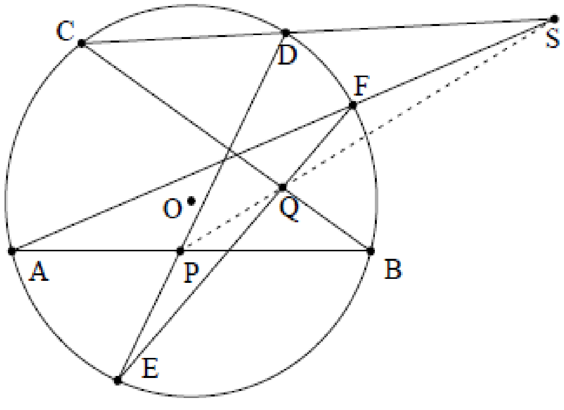

14. *). Sempurnakan gambar disebelah. Jika garis $D(ABC)$ diperpanjang, maka ia akan memotong sisi $BC$, $CA$ dan $AB$ di titik $N$, $M$ dan $L$. Tunjukkan bahwa ketiga garis $AN$, $BM$ dan $CL$ sejajar dengan garis Simsons's $D(ABC)$.

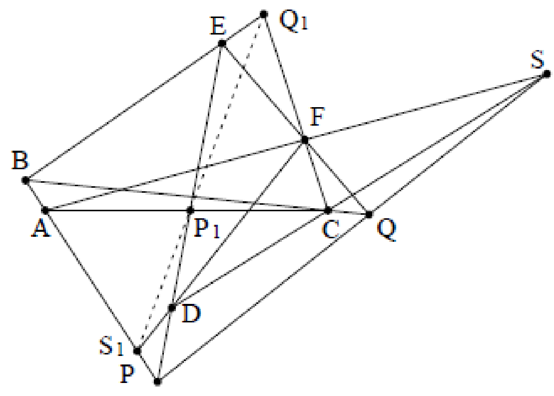


15. **). Jika $D(ABC)$ memotong $BC$ di $E$. sedangkan $H$ orthocenter dari $\Delta ABC$. Jika $G$ proyeksi $D$ pada $AB$, garis $EG$ memotong $HA$ di K. Tunjukkan $DK$ // $EH$.

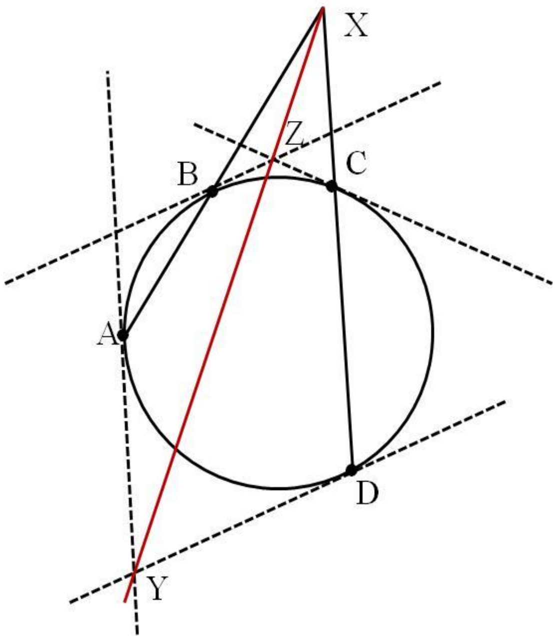



16. Soal berikut disebut dengan teorema Pascal yang diperumum. Misalkan *A, B, C, D, F* dan *E* enam buah titik (kalau teorema pascal titiknya di lingkaran, seperti gambar kiri di bawah.). $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$ dan $S = CD \cap FA$, dari teorema Pascal Jelas *P*, *Q* dan *S* segaris. Perhatikan gambar kanan bawah, jika $P_1 = AC \cap DE$, $Q_1 = BE \cap CF$ dan $S_1 = AB \cap FD$. Tunjukkan bahwa $P_1$, $Q_1$ dan $S_1$ segaris.

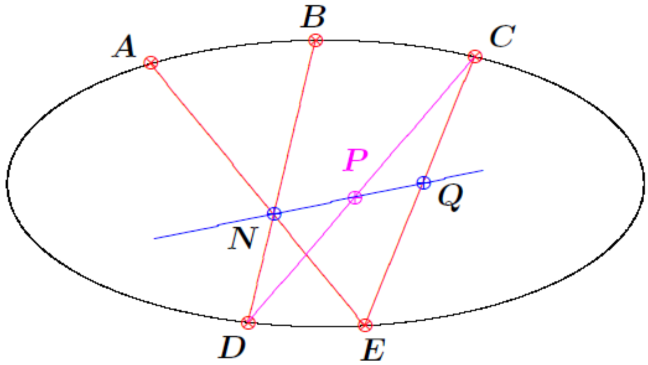


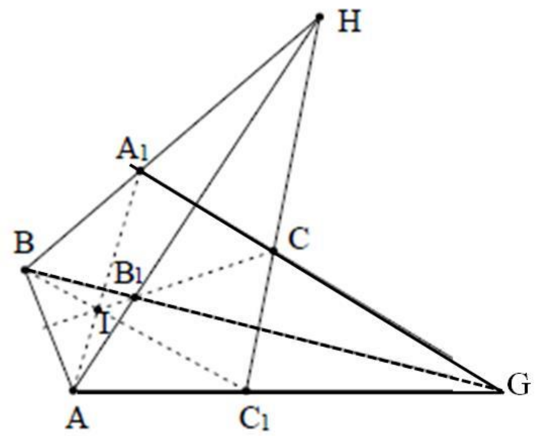

17. *). Misalkan titik *A*, *B*, C dan *D* berada pada lingkaran, sebut $X = AB \cap CD$ dan *Y* titik potong garis singgung dititik *A* dan *D* serta *Z* adalah titik potong garis singgung di titik *B* dan *C*. Tunjukkan *X*, *Y* dan *Z* segaris.




18. **). Misalkan titik $A$, $B$, $C$, $D$ dan $E$ berada pada elips, kemudian misalkan $N = AE \cap BD$, kemudian ambil sebarang titik $P$ pada garis $CD$ dan misalkan pula $Q = NP \cap CE$ (seperti pada gambar di bawah. Jika $X = AP \cap BQ$. Tunjukkan bahwa $X$ berada pada elips.



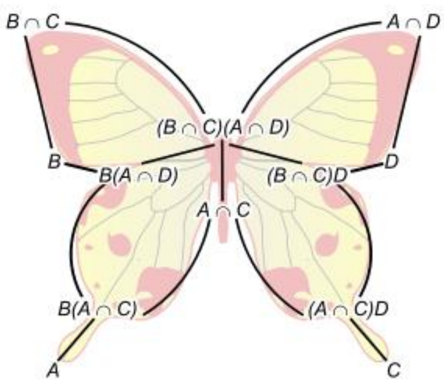
19. Perhatikan hexagon $AC_1BA_1CB_1$, dan $BB_1$, $C_1A$, $A_1C$ adalah kongkuren di $G$ dan $BA_1$, $AB_1$ *dan* $C_1C$ *kontkuren di H. Buktikan* $AA_1$, $B_1C$ dan $C_1B$ juga kongkuren.

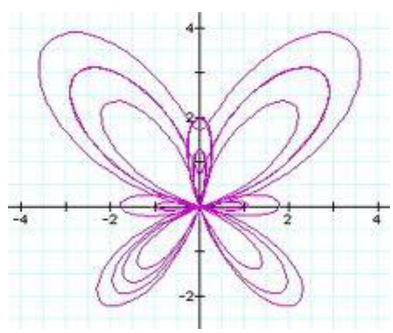


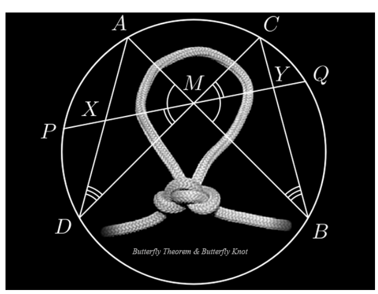
# BAB 7

# Teorema Butterfly

Dalam kehidupan sederhana (kebanyakan), memang kondisi butterfly (kupu-kupu) tidak banyak dijumpai, akan tetapi dalam dunia akademik ternyata baik illmuwan/akademisi yang bekeraja dengan fungsi dan mendisaian sesuatu banyak yang bekerja dalam bentuk butterfly. Perhatikanlah gambar di bawah ini.



# BAB 7

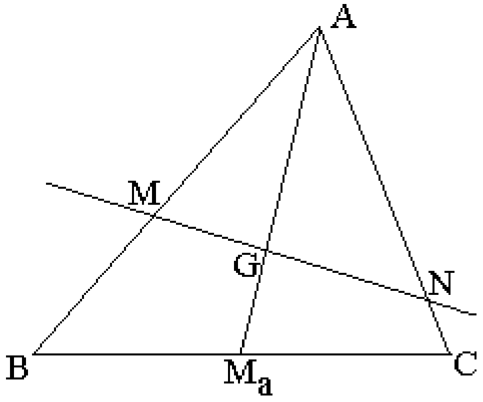
# Teorema Butterfly

## 7.1. *Teorema Butterfly*

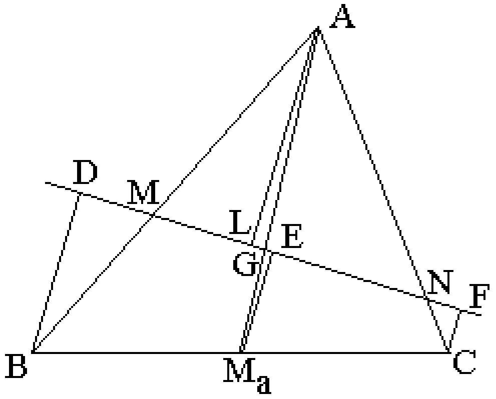
Masih sangat banyak teorema dalam geometri bidang yang berkaitan dengan segitiga, apakah itu terkait dengan centroid, Orthocenter, incenter dan circumcenter, disini akan dibuktikan beberapa teorema yang terkait dengan hal tersebut

**Teorema 7.1.1.** Misalkan $G$ adalah centroid dari $\Delta ABC$, melalui $G$ dibuat suatu garis yang memotong sisi $AM$ di titik $M$ dan memotong $AC$ di titik $M$, maka berlaku

$$\frac{BM}{MA}+\frac{CN}{NA}=1$$




Gambar 7.1.1




Gambar 7.1.2

***Bukti*** : Misalkan $M_a$ titik tengah dari $BC$, perpanjang garis $MN$ dan buat garis dari titik $B$ yang tegak lurus dengan pada perpanjangan garis $MN$. Buat juga dari titik $M_a$ dan titik $C$ garis yang tegak lurus dengan perpanjangan garis $MN$, katakana titik potongnya masing masing adalah $D$, $E$ dan $F$ (perhatikan gambar 7.1.1), maka berlaku

$$M_a E = \frac{BD + CF}{2} \qquad (7.1.1)$$

Selanjutnya buat garis $AL$ yang tegak lurus dengan $MN$, maka $\Delta ALG \sim \Delta\ M_aEG$, dan $GA = 2.M_aG$, selanjutnya $LA = 2.M_aE$, jadi

$$LA = BD + CF \qquad (7.1.2)$$

Selanjutnya $\Delta$ BDM ~ $\Delta$ ALM, begitu juga dengan $\Delta$ CFN ~ $\Delta$ ALN, sehingga diperoleh

$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = \frac{BD}{LA} + \frac{CF}{LA}$$

$$= \frac{BD + CF}{LA}$$

$$= \frac{LA}{LA} = 1$$

♥

Perhatikan pada proses pembuktian di atas, bahwa $BD + CF = LA$ diperoleh dari persamaan (7.1.2). Selanjutnya kita misalkan sebaliknya jika

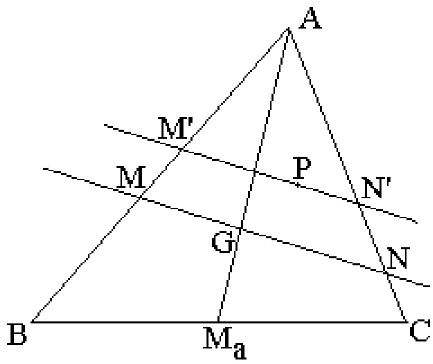
$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = 1$$

Untuk itu misalkan pula titik P sehingga juga berlaku

$$\frac{BM'}{M'A} + \frac{CN'}{N'A} = 1 \qquad (7.1.3)$$

Yang mana $P$ juga memotong $AM$ dan $AC$, katakana di $M'$ dan $N'$, akan ditunjukikan bahwa $P = G$, untuk itu misalkan $P$ berbeda dengan $G$. Misalkan $MN$ tepat melalui $G$ dan sejajar dengan $M'N'$ (perhatikan gambar 7.1.3).

Karena $BM < BM'$, $CN < CN'$ sebaliknya penyebutnya diperkecil yaitu $MA > M'A$ dan $NA > N'A$ kondisi ini mengakibatkan




Gambar 7.1.3

$$\frac{BM}{MA}+\frac{CN}{NA}<\frac{BM'}{M'A}+\frac{CN'}{N'A} \qquad (7.1.4)$$

Berdasarkan (7.1.3) mengakibatkan

$$\frac{BM}{MA}+\frac{CN}{NA}<1$$

yang kontradiksi dengan asumsi awal, jadi mestilah $P = G$.

***Teorema Butterfly***

Teorema butterfly merupakan suatu teorema tentang titik tengah pada tali busur suatu lingkaran, yang didalamnya terdapat lima buah tali busur yang saling berpotongan sehingga dapat membentuk sebuah sayap kupu-kupu. Adapun sayap yang terbentuk adalah merupakan dua buah segitiga yang sebangun.

Di dalam Teorema Butterfly yang dibahas dalam [3], digambarkan bahwa misalkan $M$ adalah titik tengah dari sebuah tali busur $PQ$dari sebuah lingkaran, terdapat pula dua tali busur yang lain $AB$ dan $CD$. Titik $A$ dan $D$ dihubungkan sehingga $AD$ memotong $PQ$ di $X$ dan juga titik $B$ dan $C$ dihubungkan sehingga $BC$ memotong $PQ$ di $Y$, maka $M$ adalah juga titik tengah dari $XY$. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut.

Perhatikan $\Delta ADM$ dan $\Delta BCM$ pada gambar 7.1.4, kedua segitiga tersebut merupakan

dua segitiga yang sebangun yang terbentuk dari perpotongan - perpotongan tali busur $PQ$, $AB$ , $CD$, $AD$ , dan $BC$ , sehingga kedua segitiga tersebut menyerupai sayap kupu - kupu. Untuk melihat $\Delta ADM \sim \Delta BCM$ maka dapat dibuktikan dengan langkah sebagai berikut:

Dari

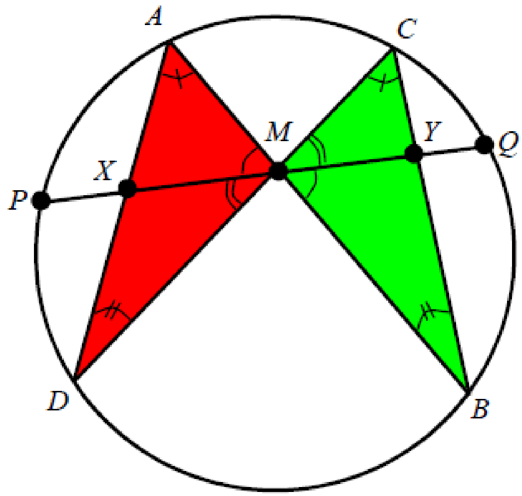
$$\angle DAB \cong \angle BCD \text{ (Sd)}$$

$$\angle ADC \cong \angle CBA \text{ (Sd)} \qquad ...(7.1.5)$$

Sehingga dari Akibat Teoremai kesebangunan *Sd-Sd* diperoleh

$\Delta ADM \sim \Delta BCM$ ■

Tak hanya sekedar itu, pada sub bab berikut ini akan dibuktikan bahwa *M* adalah juga titik tengah dari *XY* atau *MX* = *MY* dengan menggunakan beberapa alternatif bukti.




Gambar 7.1.4.

**Alternatif Bukti Dari Teorema Butterfly**

Dalam sub bab ini akan dibuktikan Teorema Butterfly dengan beberapa alternatif, yaitu dengan menggunakan kongruensi antara dua segitiga, kesebangunan antara dua segitiga, aturan sinus, dan perbandingan luas segitiga.

***Teorema* 7.1.2 *Teorema Butterfly,*** misalkan *M* adalah titik tengah dari sebuah tali busur *PQ* dari sebuah lingkaran, terdapat pula dua tali busur yang lain *AB* dan *CD*, *AD* memotong *PQ* di *X* dan *BC* memotong *PQ* di *Y*, maka *M* adalah juga titik tengah dari *XY*

***Bukti:***

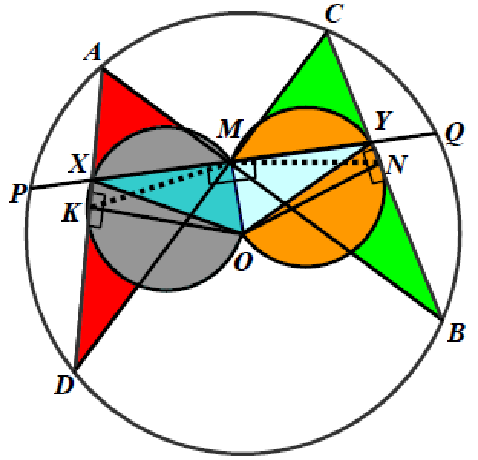
**Alternatif 1** *Dengan kongruensi antara dua segitiga.*

Perhatikan gambar 7.1.5, misalkan *O* adalah pusat lingkaran, dan *OM* adalah garis tegak lurus yang ditarik dari titik pusat *O* ke *M* sehingga $OM \perp XY$ . Akan ditunjukkan *MX* = *MY* dengan cara membuktikan

$$\Delta MOX \cong \Delta MOY$$

dengan langkah sebagai berikut:

1. Tarik garis yang tegak lurus yaitu *OK* dan *ON* dari *O* sehingga $OK \perp AD$ dan $ON \perp BC$ sehingga diperoleh bahwa *K* dan *N* berturut-turut adalah titik tengah dari *AD* dan *BC* sehingga :




Gambar 7.1.5

$AD = AK + DK$ dan $BC = CN + BN$ …(7.1.6)

2. Perhatikan bahwa

$\Delta ADM \sim \Delta CBM$

sehingga

$$\frac{AD}{AM} = \frac{BC}{CM} \qquad (7.1.7)$$

3. Perhatikan $\Delta AKM$ dan $\Delta CNM$ . Substitusi persamaan (7.1.6) ke persamaan (7.1.7) diperoleh

$$\frac{AK + DK}{AM} = \frac{CM + BM}{CM} \qquad (7.1.8)$$

Karena $AK = DK$ dan $CN = BN$ maka dari persamaan (7.1.8) diperoleh

$$\frac{2.AK}{AM} = \frac{2.CN}{CM}$$

$$\frac{AK}{AM} = \frac{CN}{CM} \square$$

Sehingga diperoleh

$$\Delta AKM \sim \Delta CNM$$

Sehingga

$$\angle AKM = \angle CNM \qquad . . . . (7.1.9)$$

4. Perhatikan □$OKXM$ dan □$ONYM$ . Oleh karena $OM \perp XY$ , $OK \perp AD$, dan $ON \perp BC$ maka $\angle XMO$ dan $\angle XKO$, dan $\angle YMO$ dan $\angle YNO$ adalah sudut siku-siku, sehingga sepasang sudut yang berhadapan adalah merupakan sudut pelurus yaitu:

   Pada $OKXM$

   $\angle XKO + \angle XMO = 180^0$ ,

   sehingga dari Teorema tali busur diperoleh bahwa □$OKXM$ adalah segiempat tali busur sehingga diperoleh

   $$\angle KM \cong \angle XOM \qquad \text{. . . . (7.1.10)}$$

   Kemudian pada □$ONYM$

   $\angle YNO + \angle YMO = 180^0$ sehingga □$ONYM$ adalah juga segiempat tali busur, maka diperoleh juga

   $$\angle YNM \cong \angle YOM \qquad \text{. . . .(7.1.11)}$$

   Oleh karena titik $X$ dan $Y$ berturut-turut terletak diantara $AK$ dan $CN$ , maka persamaan (7.1.10) dan (7.1.11) diperoleh

   $$\angle AKM \cong \angle XOM \qquad \text{. . . .(7.1.12)}$$

   $$\angle CNM \cong \angle YOM \qquad \text{. . . .(7.1.13)}$$

5. Perhatikan $\Delta XOM$ dan $\Delta YOM$ . Dari persamaan (7.1.9), (7.1.12), dan (7.1.13) maka diperoleh

   $$\angle XOM \cong \angle YOM \qquad \text{(Sd)}$$

   Dan $MO$ kongruen diri sendiri yaitu

   $$MO = MO \qquad \text{(S)}$$

   Dan juga karena $OM \perp XY$ maka

   $$\angle XMO \cong \angle YMO \qquad \text{(Sd)}$$

   Maka dari Postulat *Sd-S-Sd* diperoleh bahwa

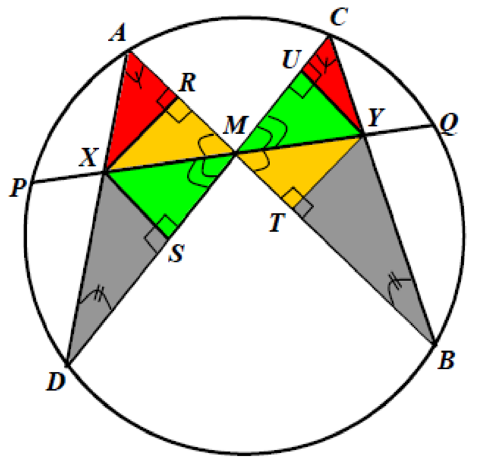
   $$\Delta XOM \cong \Delta YOM$$

   Sehingga diperoleh sisi yang berkorespondensi kongruen yaitu

   $$MX \cong MY$$

   Oleh karena $MX \cong MY$ maka $MX = MY$ , sehingga $M$ titik tengah dari $XY$ ♥

***Alternatif* 2.** *Dengan kesebangunan antara dua segitiga*.



Gambar 7.1.6.

Perhatikan gambar 7.1.6, misalkan ditarik garis yang tegak lurus dari $X$ ke $AB$ dititik $R$ dan ke $CD$ dititik $S$. Misalkan juga ditarik garis yang tegak lurus dari $Y$ ke $AB$ di titik $T$ dan ke $CD$ di titik $U$, sehingga diperoleh beberapa segitiga yang siku-siku, yaitu $\Delta MRX$, $\Delta MSX$, $\Delta MTY$, $\Delta MUY$, $\Delta ARX$, $\Delta CUY$, $\Delta DSX$, $\Delta BTY$. Misalkan :

$MP = MQ = a$ , $MX = x$ dan $MY = y$ dan juga $XR = x_1$, $YT = y_2$ $XS = x_2$ dan YU = $y_2$, Akan dibuktikan $MX = MY$ dengan langkah berikut:

Pada $\Delta MRX$ dan $\Delta MTY$ .

Karena kedua segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku maka

$$\angle MRX \cong \angle MTY$$

Yang mengakibatkan

$$\angle XMR \cong \angle YMT$$

Sehingga dari Akibat kesebangunan Sd-Sd diperoleh

$$\Delta MRX \sim \Delta MTY$$

Sehingga diperoleh perbandingan sisi-sisinya yaitu

$$\frac{MX}{MY} = \frac{XR}{YT}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} \qquad \text{. . . .(7.1.14)}$$

Pada $\Delta MSX$ dan $\Delta MUY$

Karena kedua segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku maka

$$\angle MSX = \angle MUY$$

Sehingga kembali dari Akibat kesebangunan Sd-Sd diperoleh

$$\Delta MSX \sim \Delta MUY$$

Sehingga diperoleh perbandingan sisi-sisinya yaitu

$$\frac{MX}{MY} = \frac{XS}{YU}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2} \qquad \text{. . . .(7.1.15)}$$

Pada $\Delta ARX$ dan $\Delta CUY$

Karena kedua segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku maka

$$\angle ARX = \angle CUY$$

Sehingga dari Akibat kesebangunan Sd-Sd diperoleh

$$\Delta ARX \sim \Delta CUY$$

Sehingga diperoleh perbandingan sisi-sisinya yaitu

$$\frac{XR}{YU} = \frac{AX}{CY}$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{AX}{CY} \qquad \text{(7.1.16)}$$

Pada $\Delta DSX$ dan $\Delta BTY$. Karena kedua segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku maka

$$\angle DSX = \angle BTY$$

Sehingga dari Akibat kesebangunan Sd-Sd diperoleh

$$\Delta DSX \sim \Delta BTY$$

Sehingga diperoleh perbandingan sisi-sisinya yaitu

$$\frac{XS}{YT} = \frac{XD}{YB}$$

$$\frac{x_2}{y_1} = \frac{XD}{YB} \qquad \text{. . . .(7.1.17)}$$

Kalikan persamaan (7.1.14) dan (7.1.15)

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2}$$

$$\frac{x^2}{y^2}. = \frac{x_1.x_2}{y_1.y_2}. \qquad \text{. . . . (7.1.18)}$$

Kalikan persamaan (7.1.16) dan (7.1.17)

$$\frac{x_1}{y_2}.\frac{x_2}{y_1} = \frac{AX}{CY}.\frac{XD}{YB} \qquad \text{(7.1.19)}$$

Dari persamaan (7.1.18) dan (7.1.19) diperoleh

$$\frac{x^2}{y^2}. = \frac{AX}{CY}.\frac{XD}{YB}. \qquad \text{. . . . . (7.1.20)}$$

Pada tali busur *AD* , *BC* dan *PQ*.

Tali busur *AD* dan *PQ* berpotongan di *X* sehingga

$$AX\ .\ XD = PX\ .\ XQ \qquad \text{. . . . . (7.1.21)}$$

Dan tali busur *BC* dan *PQ* berpotongan di *Y* sehingga

$$CY\ .YB = PY\ .YQ \qquad \text{. . . . . . (7.1.22)}$$

substitusi persamaan (7.1.21) dan (7.1.22) ke persamaan (7.1.20) diperoleh

$$\frac{x^2}{y^2}. = \frac{PX}{PY}.\frac{XQ}{YQ}.$$

$$\frac{x^2}{y^2}. = \frac{(a-x)}{(a+y)}.\frac{(a+x)}{(a-y)}.$$

$$\frac{x^2}{y^2}. = \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}.$$

$$x^2\left(a^2-y^2\right) = y^2\left(a^2-x^2\right)$$

$$x^2a^2 - x^2y^2 = y^2a^2 - y^2x^2$$

$$\frac{1}{a^2}\left(x^2a^2 - x^2y^2\right) = \frac{1}{a^2}\left(y^2a^2 - y^2x^2\right)$$

$$x^2 - \frac{x^2y^2}{a^2} = y^2 - \frac{x^2y^2}{a^2}$$

$$x^2 = y^2$$

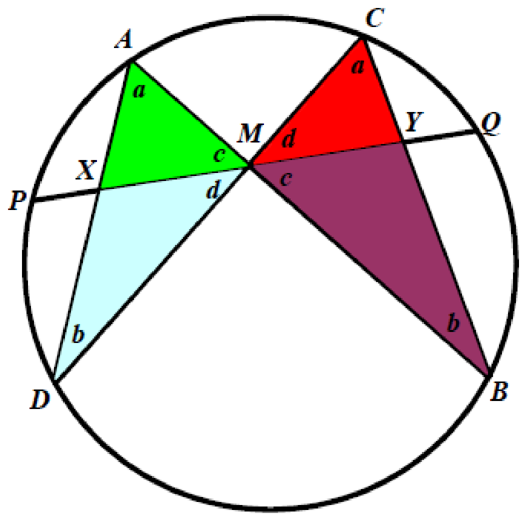
$$\left(x^2 - y^2\right) = 0$$

$$(x - y).(x + y) = 0$$

Maka diperoleh akar-akar persamaannya yaitu *x* = *y* dan *x* = -*y*. Karena *x* dan *y* merupakan panjang suatu segmen garis dan bernilai positif maka diambil *x* = *y* atau *MX* = *MY* . ♥

***Alternatif* 3.** *Dengan Aturan Sinus*

Perhatikan gambar 7.1.7. Akan dibuktikan *MX* = *MY* dengan menggunakan Aturan sinus untuk :




Gambar 7.1.7.

Pada $\Delta XAM$.

$$\frac{\sin(a)}{MX} = \frac{\sin(c)}{XA}$$

$$\sin(a) = \frac{MX.\sin(c)}{XA} \qquad (7.1.23)$$

Pada $\Delta YCM$ .

$$\frac{\sin(a)}{MY} = \frac{\sin(d)}{CY}$$

$$\sin(a) = \frac{MY.\sin(d)}{CY} \qquad \ldots\ldots (7.1.24)$$

Pada $\Delta YMB$.

$$\frac{\sin(b)}{MY} = \frac{\sin(c)}{YB}$$

$$\sin(b) = \frac{MY.\sin(c)}{YB} \qquad \ldots\ldots (7.1.25)$$

Pada $\Delta XMD$.

$$\frac{\sin(b)}{MX} = \frac{\sin(d)}{XD}$$

$$\sin(b). = \frac{MX.\sin(d)}{XD}.. \qquad \text{. . . . . (7.1.26)}$$

Dari persamaan (7.1.23) dan (7.1.24)

$$\frac{MX.\sin(c)}{XA}. = .\frac{MY.\sin(d)}{CY} \qquad \text{(7.1.27)}$$

Substitusi persamaan (7.1.25) dan (7.1.26) ke persamaan (7.1.27), diperoleh

$$\frac{MX\left(\frac{YB\sin(b)}{MY}\right)}{XA} = \frac{MY\left(\frac{XD\sin(b)}{MX}\right)}{CY}$$

$$\frac{CY.MX.YB.\sin(b)}{MY} = \frac{XA.MY.XD,\sin(b)}{MX} \qquad \text{. . . . . (7.1.28)}$$

Kalikan kedua ruas pada persamaan (7.1.28) dengan $\frac{1}{\sin(b)}$ sehingga diperoleh

$$\frac{CY.MX.YB.}{MY} = \frac{XA.MY.XD}{MX}$$

$$CY.MX^2.YB = XA.MY^2.XD$$

$$\frac{.MX^2.}{MY^2} = \frac{XA..XD}{CY.YB} \qquad \text{. . . . . (7.1.29)}$$

Perhatikan tali busur $AD$ , $BC$ , dan $PQ$. Karena tali busur $AD$ dan $PQ$ berpotongan di $X$, maka

$$XA.\ XD = PX\ .QX$$

Dan juga tali busur $BC$ dan $PQ$ berpotongan di $Y$, maka

$CY\ .YB = PY\ .QY$

Sehingga dari persamaan (7.1.28) diproleh

$$\frac{.MX^2.}{MY^2} = \frac{PX.QX}{PY.QY} \qquad \text{. . . . . (7.1.30)}$$

Dan pada tali busur $PQ$,

$$PX = (MP- MX) \quad QX = (MQ + MX) \quad PY =( MQ - MY)$$

Sehingga dari persamaan (7.1.30) diperoleh

$$\frac{.(MX)^2.}{(MY)^2}=\frac{(MP-MX).(MQ+MX)}{(MQ-MY).(MP+MY)}$$

$$(MQ-MY).(MP+MY)(MX)^2=(MY)^2(MP-MX).(MQ+MX)$$

$$\frac{(MP-MX).(MQ+MX)..}{(MX)^2}=\frac{(MQ-MY).(MP+MY)}{(MY)^2}$$

$$\frac{MP.MQ-MP.MX-MX.MQ+MX)^2..}{(MX)^2}=\frac{MQ.MP-MQ.MY-MY.MP+(MY)^2}{(MY)^2}$$

Karena $MP = MQ$ maka diperoleh

$$\frac{(MP)^2-.(MX)^2..}{(MX)^2}=\frac{(MP)^2-.(MY)^2}{(MY)^2}$$

$$\frac{(MP)^2..}{(MX)^2}-1=\frac{(MP)^2}{(MY)^2}-1$$

$$\frac{(MP)^2.}{(MX)^2}=\frac{(MP)^2}{(MY)^2}$$

$$\frac{(MY)^2.}{(MX)^2}=1$$

$$(MX)^2=(MY^2)$$

MX = MY

Jadi terbukti bahwa $M$ adalah titik tengah dari $XY$ ♥

***Alternatif* 4.** *Dengan perbandingan luas segitiga*

Perhatikan gambar 7.1.8, dengan menggunakan perbandingan luas segitiga yang mempunyai sepasang sudut yang kongruen akan dibuktikan

$$MX = MY\,.$$

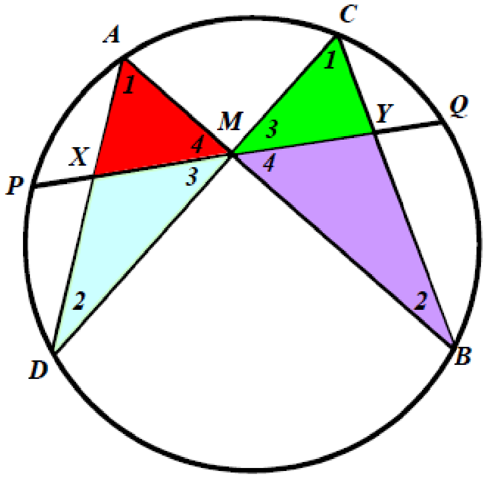
Pada $\Delta XAM$ dan $\Delta YCM$

diperoleh

$$\angle XAM \cong \angle\ YCM$$

Sehingga perbandingan luasnya adalah

$$\frac{L\ \Delta XAM}{L\ \Delta MCY} = \frac{AX.AM}{CM.CY} \qquad (7.1.31)$$




Gambar 7.1.8.

Pada $\Delta CMY$ dan $\Delta DMX$, diperoleh

$$\angle CMY \cong \angle DMX$$

Sehingga perbandingan luasnya adalah

$$\frac{L\ \Delta CMY}{L\ \Delta DMX} = \frac{CM.MY}{DM.MX} \qquad .\ .\ .\ .\ (7.1.32)$$

Pada $\Delta XDM$ dan $\Delta MBY$, diperoleh

$$\angle XDM \cong \angle MBY$$

Sehingga perbandingan luasnya adalah

$$\frac{L\ \Delta XDM}{L\ \Delta MBY} = \frac{DX.DM}{BM.BY} \qquad .\ .\ .\ .\ (7.1.33)$$

Pada $\Delta BMY$ dan $\Delta AMX$, diperoleh

$$\angle BMY \cong \angle AMX$$

Sehingga perbandingan luasnya adalah

$$\frac{L\ \Delta BMY}{L\ \Delta AMX} = \frac{BM.MY}{AM.MX} \qquad .\ .\ .\ .\ .(7.1.34)$$

Kalikan persamaan (7.1.31), (7.1.32), (7.1.33), dan (7.1.34)

$$\frac{L\,\Delta XAM}{L\,\Delta MCY}\cdot\frac{L\,\Delta CMY}{L\,\Delta DMX}\cdot\frac{L\,\Delta XDM}{L\,\Delta MBY}\cdot\frac{L\,\Delta BMY}{L\,\Delta AMX}=\frac{AX.AM}{CM.CY}\cdot\frac{CM.MY}{DM.MX}\cdot\frac{DX.DM}{BM.BY}\cdot\frac{BM.MY}{AM.MX}$$

$$\frac{L\,\Delta XAM}{L\,\Delta MCY}\cdot\frac{L\,\Delta CMY}{L\,\Delta DMX}\cdot\frac{L\,\Delta XDM}{L\,\Delta MBY}\cdot\frac{L\,\Delta BMY}{L\,\Delta AMX}=\frac{AX.DX.(MY)^2}{.CY.BY.(MX)^2}. \qquad (7.1.35)$$

Oleh karena

$L\Delta XAM = L\Delta AMX$ , $L\Delta CMY = L\Delta MCY$ , $L\Delta XDM = L\Delta DMX$ ,

dan

$L\Delta BMY = L\Delta MBY$

maka pada ruas kiri persamaan (7.1.35) diperoleh

$$\frac{AX.DX.(MY)^2}{.CY.BY.(MX)^2}.=1$$

$$AX.DX.(MY)^2 = CY.BY.(MX)^2$$

$$\frac{AX.DX.}{.CY.BY.}.=\frac{(MX)^2}{(MY)^2} \qquad .\;.\;.\;.\;.(7.1.36)$$

Karena tali busur *AD* dan *PQ* berpotongan di *X*, maka

$AX\;.\;DX = PX\;.QX$

Dan juga tali busur *BC* dan *PQ* berpotongan di *Y*, maka

$CY\;.\;BY = PY\;.QY$

Sehingga dari persamaan (7.1.36) diperoleh

$$\frac{PX.QX.}{.PY.QY.}.=\frac{(MX)^2}{(MY)^2} \qquad .\;.\;.\;.\;.(7.1.37)$$

Karena titik *X* dan *Y* berada diantara *PQ* maka,

$PX = (MP-\ MX),\ \ QX =(MQ +MX)$ ,

$PY = (QM - MY)$ , $\quad QY = (MP\ +\ MY)$

Sehingga dari persamaan (7.1.37) diperoleh

$$\frac{(MP-MX).(MQ+MX).}{.(QM-MY).(MP+MY).}.=\frac{(MX)^2}{(MY)^2}$$

$$\frac{(MP-MX).(MQ+MX).}{(MX)^2..}.=\frac{(QM-MY).(MP+MY)}{(MY)^2}$$

Karena *MP* = *MQ*, maka diperoleh

$$\frac{(MP)^2.-(MX)^2.}{(MX)^2..}.=\frac{(MP)^2.-(MY)^2}{(MY)^2}$$

$$\frac{(MP)^2.}{(MX)^2..}-1.=\frac{(MP)^2.}{(MY)^2}-1$$

$$\frac{(MP)^2.}{(MX)^2..}=\frac{(MP)^2.}{(MY)^2}$$

$$\frac{(MY)^2.}{(MX)^2..}=1$$

$$(MY)^2=(MX)^2$$

$$MX = MY$$

Jadi *M* adalah juga titik tengah dari *XY* . ♥

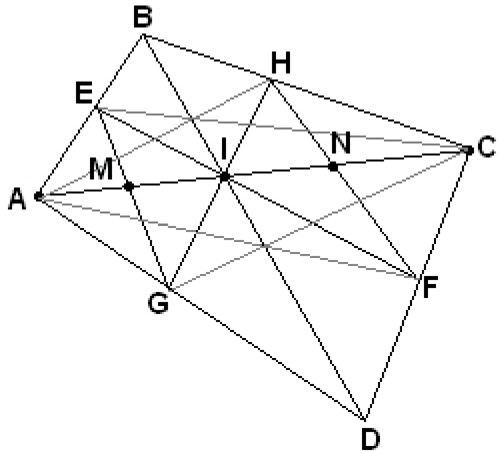
## 7.2. *Teorema Butterfly untuk segiempat.*

Kalau di atas adalah teorema butterfly yang diberlakukan pada suatu lingkaran. Sebenarnya pada lingkaran ini masih banyak bentuk teorema butterfly yang lain, misalnya bagaimana kalau garisnya kita kembangkan kearah luar lingkaran atau dalam suatu lingkaran terdapat dua butterfly atau pada dua buah lingkaran yang sepusat terdapat satu butterfly yang sama. Berikut ini akan diberikan bentuk lain dari teorema butterfly yaitu bagaimana butterfly kalau diberlakukan pada suatu segiempat.

***Teorema* 7.2.1.** Misalkan *ABCD* suatu segiempat konvek. *I* merupakan titik potong diagonal *AC* dengan *BD*. Buat dua buah garis *EF* dan *HG* sehingga memotong sisi-sisi segiempat di titik *E*, *F*, *G* dan *H*. Misalkan *M* dan *N* perpotongan *EG* dan *FH*. Maka berlaku

$$\frac{1}{IM} - \frac{1}{IA} = \frac{1}{IN} - \frac{1}{IC}$$

***Bukti*** : Berdasarkan soal latihan 14 bab 6, nomor 12 dan 14 maka diperoleh :



gambar 7.2.1

$$\frac{AM}{IM} = \frac{L\Delta AEG}{L\Delta IEG}$$

$$\frac{IN}{CN} = \frac{L\Delta IHF}{L\Delta CHF}$$

$$\frac{IC}{IA} = \frac{L\Delta CBD}{L\Delta ABD}$$

$$\frac{IE}{IF} . \frac{IG}{IH} = \frac{L\Delta IEG}{L\Delta IHF}$$

$$\frac{CH}{BC} . \frac{CF}{CD} = \frac{L\Delta CHF}{L\Delta CBD}$$

$$\frac{AB}{AE} . \frac{AD}{AG} = \frac{L\Delta ABD}{L\Delta AEG}$$

$$\frac{IF}{IE} . = \frac{L\Delta AFC}{L\Delta AEC} \qquad \frac{BC}{CH} = \frac{L\Delta ABC}{L\Delta AHC}$$

$$\frac{IH}{IG} . = \frac{L\Delta AHC}{L\Delta AGC} \qquad \frac{AE}{AE} = \frac{L\Delta AEC}{L\Delta ABC}$$

$$\frac{CD}{CF} = \frac{L\Delta CAD}{L\Delta AFC} \qquad \frac{AG}{AD} = \frac{L\Delta AEG}{L\Delta CAD}$$

Kalau kita kalikan kesemua persamaan di atas maka akan diperoleh

$$\frac{AM}{IM} . \frac{IN}{CN} . \frac{IC}{IA} = 1$$

Yang akan menghasilkan bentuk

$$\frac{1}{IM} - \frac{1}{IA} = \frac{1}{IN} - \frac{1}{IC}$$

Kalau bukti teorema 7.2.1 di atas, kita gunakan konsep luas, akan tetapi kita mesti didukung oleh dua buah konsep lain yang pada pembahasan di atas kebetulan dimasukkan dalam soal nomor 12 dan 15 pada bab 6. Berikut ini akan dibuktikan teorema butterfly pada segiempat dengan menggunakan konsep dari Teorema Menelaus. Tentunya gambar yang digunakan dalam proses pembuktiannya akan berbeda (perhatikan gambar 7.2.2).

***Cara* 2 *Bukti Teorema* 7.2.2.**

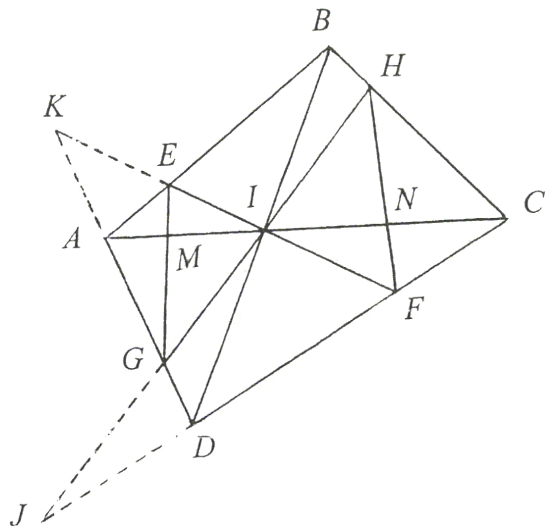
Perhatikan $\Delta BAD$ dan $\Delta CAD$ dengan garis transfersal *EIF*, maka berdasarkan teorema Menelaus diperoleh :

$$\frac{BE}{EK}.\frac{AK}{KD}.\frac{DI}{IB} = -1$$

$$\frac{CF}{FD}.\frac{DK}{KA}.\frac{AI}{IC} = -1$$

kalau kedua persamaan di atas dikalikan maka akan diperoleh

$$\frac{BE}{EK}.\frac{DI}{IB}\frac{CF}{FD}.\frac{AI}{IC} = 1$$




gambar 7.2.2

atau

$$IA.ID.\frac{BE}{EA} = IC.IB.\frac{FD}{CF}. \qquad .... \ (7.2.1)$$

Dengan cara yang sama untuk sumbu transversal *HIG* terhadap $\Delta BDC$ dan $\Delta ADC$ dipereoleh

$$\frac{AG}{GD}.\frac{DI}{IB}\frac{BH}{HC}.\frac{CI}{IA} = 1$$

Atau

$$ID.IC.\frac{BH}{HC} = IB.IA.\frac{DG}{GA} \qquad .... \ (7.2.2)$$

Perhatikan bahwa baik (7.2.1) atau (7.2.2) melibatkan IM, MA, *IN*, atau NC. Hubungan antar segmen garis ini dan lainnya pada gambar akan ditetapkan sebagai berikut (perhatikan gambar 7.2.3.

Misalkan L dan P merupakan perpotongan garis *FH* dan *EG* terhadap *BG*. Kemudian perhadikan $\Delta CDI$ dengan transversal garis *FH*, maka diperoleh

$$\frac{DF}{FC}\cdot\frac{CN}{NI}\cdot\frac{IL}{LD} = -1$$

Atau

$$\frac{DF}{FC} = -\frac{IN}{NC}\cdot\frac{LD}{DI} \qquad \text{.....(7.2.3)}$$

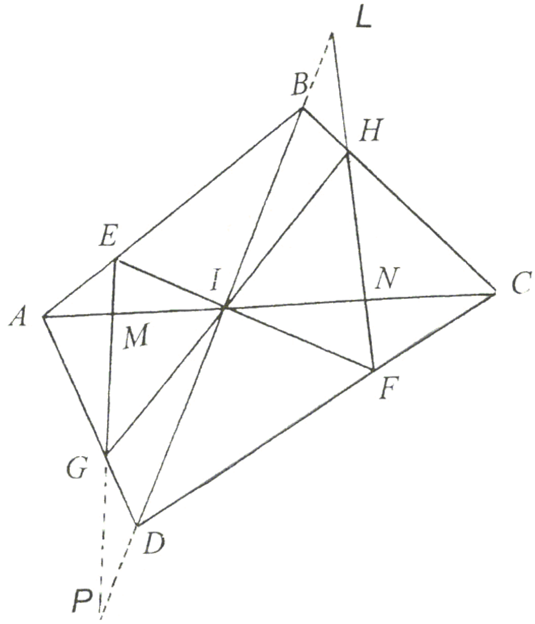
dengan cara yang sama untuk $\Delta IBC$ akan diperoleh

$$\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CN}{NI}\cdot\frac{IL}{LB} = -1$$

atau

$$\frac{BH}{HC} = -\frac{NI}{CN}\cdot\frac{LB}{LI} \qquad (7.2.4)$$

maka




gambar 7.2.3

$$IB.\frac{DF}{FC} + DI.\frac{BH}{HC} = IB.\frac{IN}{NC}\cdot\frac{LD}{IL} + DI.\frac{NI}{CN}\cdot\frac{LB}{IL}$$

$$= \frac{NI}{CN}\cdot\frac{IB.ID + DI.LB}{IL}$$

$$= \frac{NI}{CN}\cdot\frac{IB.(DI+IL) + DI.(IL-IB)}{IL}$$

$$= DB.\frac{NI}{CN} \qquad \text{.... (7.2.5)}$$

Kemudian gunakan lagi teorema Menelaus untuk $\Delta AIB$ dan $\Delta ADI$, maka diperoleh

$$\frac{BE}{EA} = -\frac{MI}{AM}\cdot\frac{PB}{IP} \qquad \text{.... (7.2.6)}$$

dan

$$\frac{DG}{GA} = -\frac{MI}{AM} . \frac{PD}{IP} \qquad \text{. . . . (7.2.7)}$$

maka

$$IB.\frac{DG}{GA} + DI.\frac{BE}{EA} = \frac{MI}{MA} . \frac{IB.PD + PB.ID}{IP}$$

$$= \frac{MI}{MA} . \frac{BI.(IP - ID) + ID.(PI + IB)}{IP}$$

$$= BD.\frac{IM}{MA} \qquad \text{. . . . .(7.2.8)}$$

Kalaikan persamaan (7.2.5) dengan *IC*, maka diperoleh

$$IC.IB.\frac{DF}{FC} + IC.DI.\frac{BH}{HC} = IC.DB.\frac{NI}{CN} \qquad \text{. . . . . (7.2.9)}$$

Kemudian kalikan pula persamaan (7.2.8) dengan *IA*, maka diperoleh

$$IA.IB.\frac{DG}{GA} + IA.DI.\frac{BE}{EA} = IA.BD.\frac{IM}{MA} \qquad \text{. . . . . . (7.2.10)}$$

Akhirnya bila dikurangkan persamaan (7.2.10) dengan (7.2.9) serta dari persamaan (7.2.1) dan (7.2.2) akan diperoleh

$$BD.\left(\frac{IC.IN}{NC} + \frac{IA.IN}{MA}\right) = 0$$

$$\frac{IA - IM}{IA.IM} = \frac{IC - IN}{IC.IN}$$

Yang selanjutnya menghasilkan

$$\frac{1}{IM} - \frac{1}{IA} = \frac{1}{IN} - \frac{1}{IC}$$

## *Teorema Butterfly Dengan Menelaus*

Berikut ini diberikan sebagai tambahan untuk topic ini yaitu teorema butterfly dengan menggunakan Menelaus. Topik ini dikatakan sebagai tambahan, karena teorema agar teorema Menelaus bisa digunakan, maka butterfly akan dikontruksi pada dua buah garis lurus.

**Teorema 7.2.3**. diberikan dua buah garis $l$ dan $l'$, titik $A$ berada pada garis $l$ dan titik $B$ pada garis $l'$, ambil sebarang titik $P$ pada garis $AB$, titik $C$ dan $F$ berada pada garis $l$ dan titik $D$ dan $E$ pada garis $l'$, misalkan $X = CE \cap AB$ dan $Y = FD \cap AB$. Maka $PA = PB$ menyebabkan $PX = PY$.

***Bukti*** : Perhatikan $\Delta OFE$ dengan garis transversal $CPD$, maka dengan menggunakan teorema Menelaus diperoleh

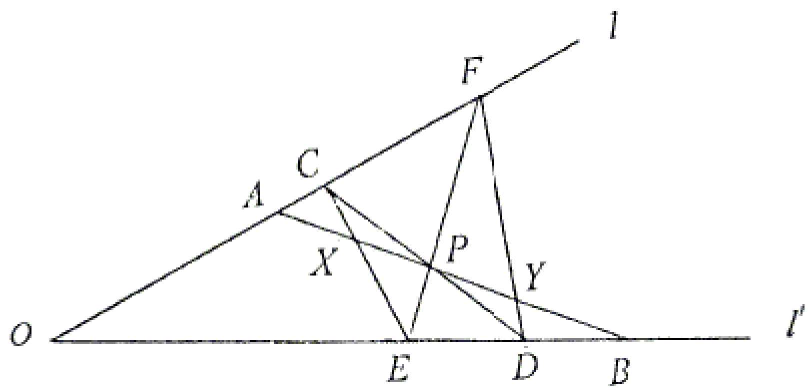
$$\frac{OC}{CF}.\frac{FP}{PE}.\frac{ED}{DO} = 1$$

Untuk $\Delta OAB$ dengan garis transversal masih $CPD$, maka diperoleh

$$\frac{OD}{DB}.\frac{BP}{PA}.\frac{AC}{CO} = 1$$

Kemudian untuk $\Delta BPE$ dengan garis transversal $FYD$ diperoleh

$$\frac{FY}{YB}.\frac{BD}{DE}.\frac{EF}{FP} = 1$$




Gambar 7.2.4

Terahir untuk $\Delta FAP$ dengan garis transversal $CXE$ diperoleh

$$\frac{PE}{EF}.\frac{FC}{CA}.\frac{AX}{XP} = 1$$

Apabila keempat persamaan di atas dikalikan, maka akan diperoleh

$$\frac{PY}{YB}.\frac{AX}{XP}.\frac{BP}{PA} = 1$$

Karena $PB = PA$ yang mengakibatkan

$$\frac{YB}{PY} = \frac{AX}{XP}$$

$$\frac{YB+PY}{PY} = \frac{AX+XP}{XP}$$

$$PA.PY = PB.PX$$

Maka diporoleh $PY = PX$.

## 7.3. *Teorema Butterfly pada Hyperbola dan Elips*

Berikut ini akan diberikan bentuk sederhana dari teorema butterfly pada parabola, akan tetapi untuk menambah khasanah/pengayaan proses pembuktian. Maka buktinya akan diberikan seraca analitik. Pada dasarnya pembuktian secara analitik ini adalah cara yang lebih sederhana dalam proses pembuktian teorema butterfly pada hyperbola. Karena kalau kita ingin membuktikan dengan menggunakan konsep luas daerah, mungkin sedikit merepotkan namun tetap bisa dilakukan, sehingga proses pembuktian dengan menggunakan konsep luas atau cara lainnya dapat sebagai latihan bagi pembaca. Teroema butterfly yang diberikan disini adalah dalam untuk parabola dengan bentuk umum

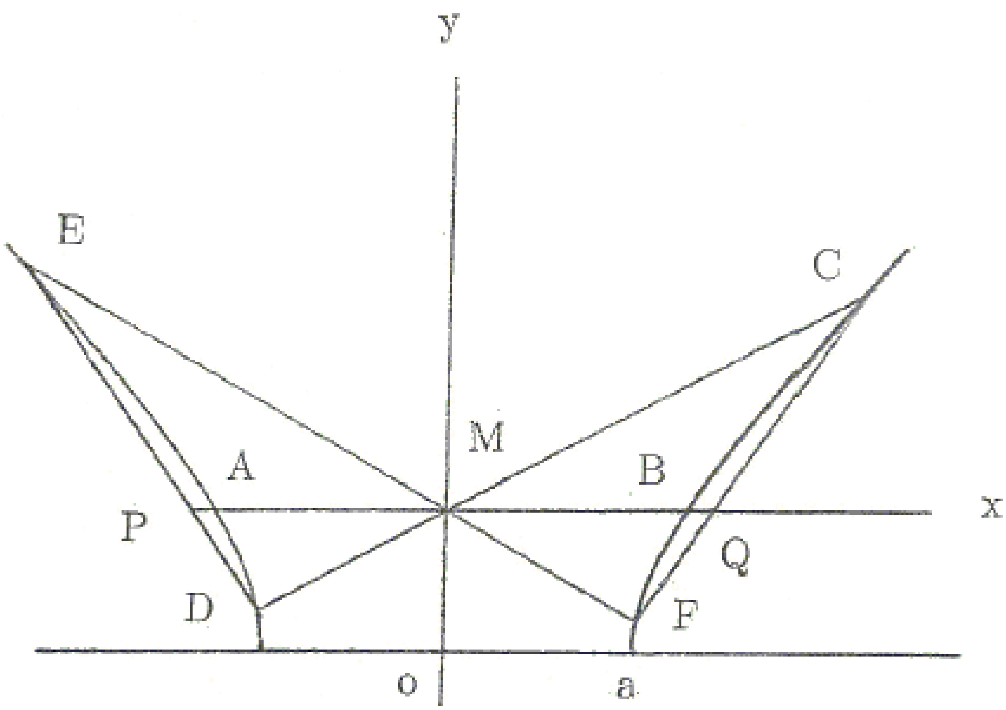
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

***Teorema* 7.3.1**. Misalkan $M(0,k)$ titik tengah dari busur $AB$ yang sejajar dengan sumbu mayor. Melalui titik $M$ dibuat dua buah garis $CD$ dan $EF$ yang memotong kedua busur parabola. $CD$ memotong $AB$ dititik $P$ dan $EF$ memotong $AB$ dititik $Q$. Maka $M$ adalah titik tengah dari $PQ$.

***Bukti*** : perhatikan gambar 7.3.1 di bawah ini

Melalui titik $M$ dibuat sumbu $X$ dan sumbu $Y$, sehingga persamaan parabolanya menjadi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y+k)^2}{b^2} = 1 \qquad .....(7.3.1)$$




Gambar 7.3.1

Atau dapat juga ditulis dalam bentuk

$$b^2x^2 - a^2(y + k)^2 - a^2b^2 = 0 \qquad .....(7.3.2)$$

Misalkan koordinat baru dari titik-titik tersebut $M$ =(0,0), $C = (x_1,y_1)$, $D = (x_2,y_2)$, $E = (x_3, y_3)$, $F = (x_4, y_4)$, $P = (p, 0)$, $Q = (q, 0)$, sedangkan persamaan garis $DC$ dan $EF$ masing-masing adalah $y = m_1x$ dan $y = m_2x$. Subsitusikan $m_1x$ pada persamaan (7.3.2) maka diperoleh

$$(b^2 - a^2m_1^2)\, x^2 - 2a^2m_1kx - a^2\,(b^2 + k^2) = 0 \qquad ..... \ (7.3.3)$$

Persamaan (7.3.3) merupakan persamaan kuadrat. Misalkan akarnya adalah $x_1$ dan $x_2$. Karena $y = m_1x$ adalah persamaan garis yang melalui $DC$, maka $x_1$ dan $x_2$ merupakan absis dari koordinat titik $C$ dan $D$. yang mana

$$x_1 + x_2 = \frac{-2a^2m_1k}{(b^2 - a^2m_1^2)} \qquad \text{dan} \qquad x_1.x_2 = \frac{-a^2(\,b^2 + k^2)}{(b^2 - a^2m_1^2)}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{mx_1.x_2}{x_1 + x_2} = \frac{-(\,b^2 + k^2)}{2k} \qquad ..... \ (7.3.4)$$

Dengan cara yang sama kalau disubsitusikan $y = m_2x$ ke persamaan (7.3.3) maka akan diperoleh

$$\frac{mx_3.x_4}{x_3 + x_4} = \frac{-(b^2 + k^2)}{2k} \qquad \text{. . . . . . (7.3.5)}$$

Yang mana $x_3$ dan $x_4$ adalah absis dari koordinat titik $E$ dan $F$. Dari persamaan (7.3.4) dan (7.3.5) diperoleh

$$\frac{-x_2.x_3}{m_1x_2 - m_2x_3} = \frac{x_1.x_4}{m_1x_1 - m_2x_4} \qquad \text{. . . . . .(7.3.6)}$$

Karena $C$, $Q$ dan $F$ adalah segaris (collinear), jadi kemiringan dari $QC$ dan $GQ$ adalah sama, jadi

$$\frac{y_1}{x_1 - q} = \frac{-y_4}{q - x_4} \qquad \text{. . . . . . (7.3.7)}$$

Sehingga

$$\frac{q - x_1}{q - x_4} = \frac{y_1}{y_4} = \frac{m_1x_1}{m_2x_4} \qquad \text{. . . . . . (7.3.8)}$$

Dengan $q \neq x_1$ dan $q \neq x_4$. Maka penyelesaian persamaan (7.3.8) untuk $q$ adalah

$$q = \frac{(\mathrm{m}_1 - m_2)x_1x_4}{m_1x_1 - m_2x_4} \qquad \text{. . . . . .(7.3.9)}$$

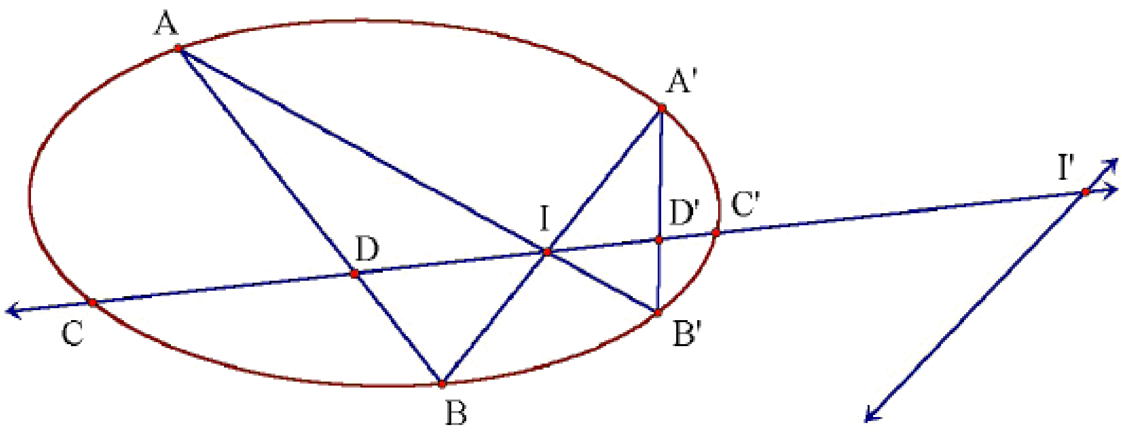
Dengan cara yang sama untuk kemiringan dari $PE$ dan $DP$ diperleh

$$p = \frac{(\mathrm{m}_1 - m_2)x_2x_3}{m_1x_2 - m_2x_3} \qquad \text{. . . . . .(7.3.10)}$$

Dari (7.3.9) dan (7.3.10) dan dengan memasukkan ke dalam persamaan (7.3.6) diperoleh $p = q$, yang bermakna $PM = MQ$.

***Teorema Butterfly Pada Elips***

Buatlah sebarang garis $AB'$ dan garis $A'B$ pada sebarang elips dan misalkan $I$ merupakan titik potong dari garis $AB'$ dan $A'B$. kemudian melalui I dibuat garis yang memotong elips pada titik $C$ dan $C'$. katakana $D$ dan $D'$ masing-masing titik potong garis $CC'$ dengan garis $AB$ dan $A'B'$, untuk lebih lengkapnya perhatikan gambar 7.3.2 di bawah ini.




Gambar 7.3.2

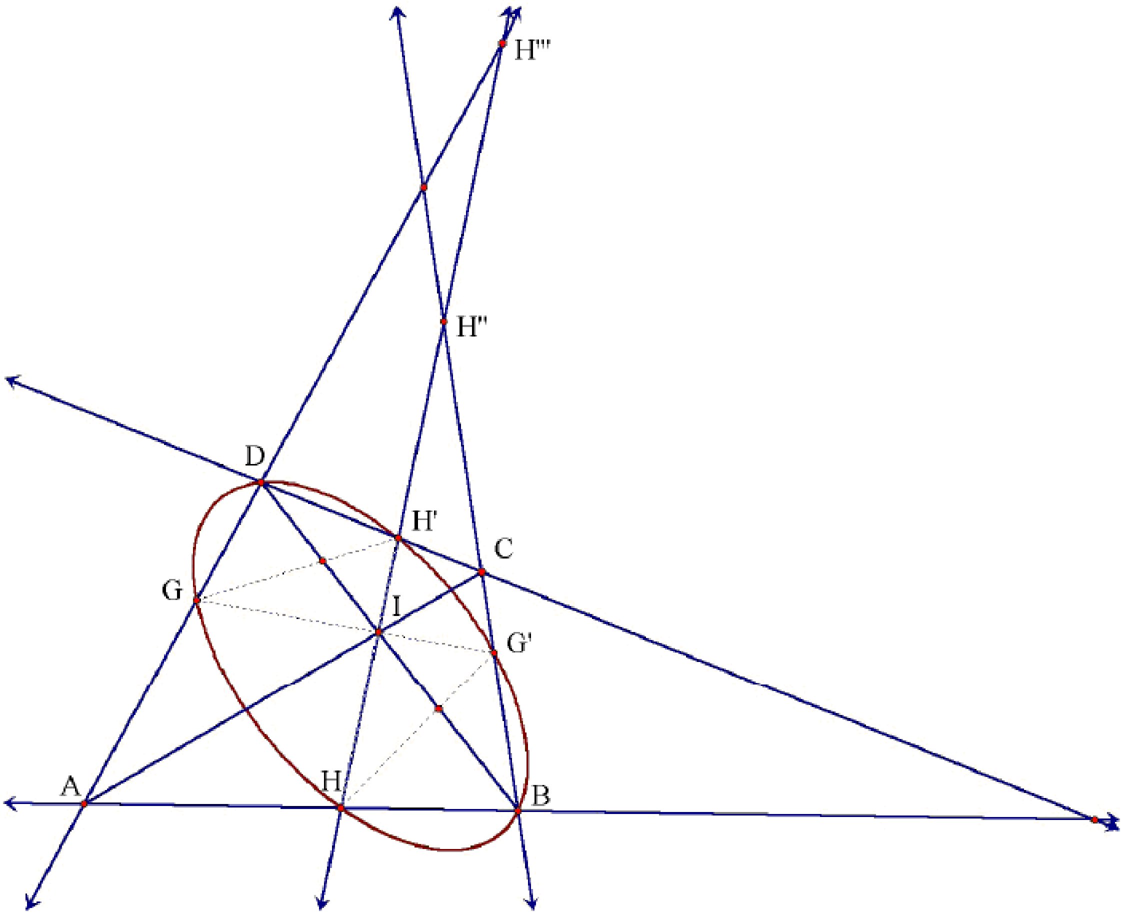
Jadi $I$ tidak merupakan titik tengah dari garis manapun, maka yang dapat dilakukan adalah mengkontruksi kesamaan seperti kesamaan teorema butterfly pada segiempat. Maka tugas selanjutnya adalah menentukkan titik $I'$ pada perpanjangan $CC'$, yang mana I adalah titik tengah dari $CI'$. Maka bentuk kesamaan dari teorema Butterfly pada elips di atas adalah

$$\frac{1}{IC}+\frac{1}{IC'}=\frac{1}{ID}+\frac{1}{ID'} \quad \ldots\ldots (7.3.11)$$

atau

$$\frac{1}{IC}-\frac{1}{IC'}=\frac{1}{ID}-\frac{1}{ID'} \quad \ldots\ldots (7.3.12)$$

Hanya untuk pemikiran saja, di bawah ini diberikan gambar perumuman terorema Butterfly pada Elips. Akan tetapi pembahasannya tidak diberikan dalam buku ini. Gambar ini diberikan hanya untuk memotivasi pembaca agar dapat membahas lebih jauh tentang pengembangan teorema Butterfly pada elips tersebut



Gambar 7.3.3

***Soal-latihan* 11.**

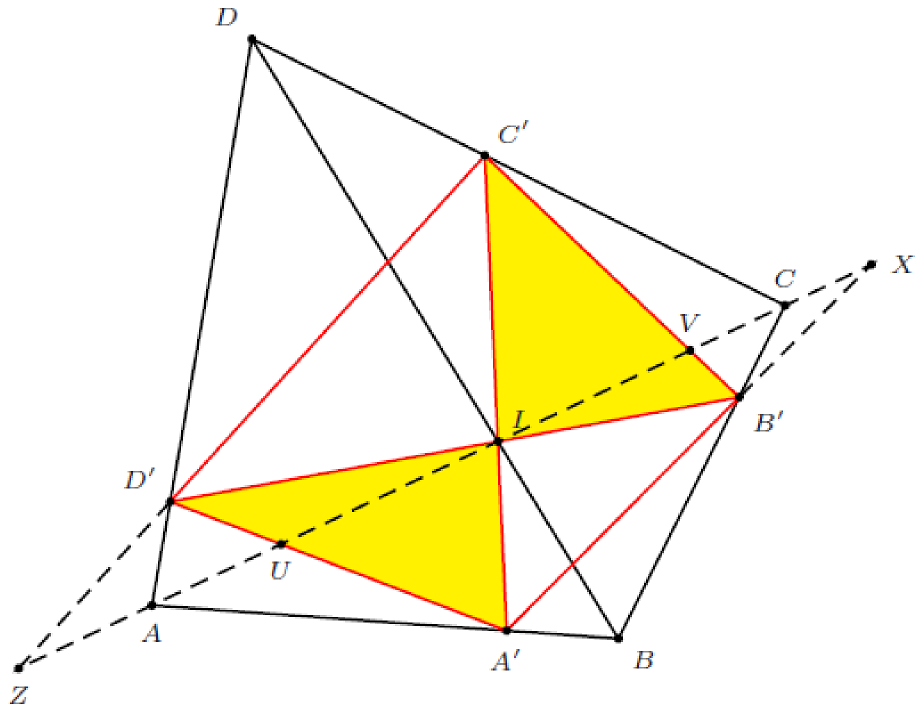
1. Berikan bukti alternatif lain lain dari teorema 7.2.1
2. Jika titik $A$ =(0,0), $B$ = (10,2), $C$ = (12,6) dan $D$ =(6, 12). Buat titik E sehingga $AE = ED$ dan titik $F$ sehingga $BF = FC$, titik $G$ sehingga $AG = ½\ GB$ dan titik $H$ sehingga $CH = ½\ HD$. Tunjukkan secara analitik bahwa teorema Butterfly berlaku untuk segiempat $AMCD$.
3. Pada parabola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$, dibuat titik $A = \left(\sqrt{32}, 5\right) dan\ B = \left(-\sqrt{32}, 5\right)$ sedangkan titik $C = (x_c, y_c)$, $D = (x_d, y_d)$, $E = (x_e, y_e)$ dan $F = (x_f, y_f)$. tentukan secara analitik koordinat titik $P$ dan Q sehingga teorema Butterfly berlaku pada parabola tersebut. Dan hitung juga panjang $PM$.
4. Perhatikan kembali gambar 7.1.6. Jika perpajangan garis $AC$ dan $BD$ memotong garis $PQ$ di titik $K$ dan $L$, tunjukkan bahwa $M$ juga merupakan titik tengah dari $KL$.
5. Andaikan $ABCD$ segiempat siklis, $AC$ dan $BD$ berpotongan di $M$. Terdapat 2 titik $X \in AB$ dan $Y \in CD$ sedemikian sehingga $XM = MY$ dan $X,M,Y$ kolinear. Jika $XY$ diperpanjang ke kanan dan kiri hingga memotong lingkaran luar $ABCD$ di $P_1$ dan $P_2$, maka $P_1M = P_2M$. kalau ia buatikan dan kalau tidak beri contoh penyangkalnya
6. Jika titik P berada di luar lingkaran dan dari titik $P$ dibuat garis yang menyinggung lingkaran tersebut dititik $T$ dan $B$. Jika $AB$ adalah diameter lingkaran dan $TH \perp AB$. Tunjukkan bahwa $AP$ merupakan bisector $TH$.
7. Misalkan jari-jari lingkaran dalam $\Delta ABC$ adalah $I$, titik singgung lingkaran tersebut pada sisi $BC$ adalah $X$, misalkan $A'$ titik tengah sisi $BC$, tunjukkan bahwa perpanjangan $A'I$ merupakan bisector dari $AX$.
8. Buktikan kasus khusus teorema Butterfly jika $AD$ // $BC$.
9. Buktikan teorema Butterfly dengan menggunakan teorema Desarques's
10. Buktikan teoema Butterfly dengan menggunakan cross rasio.
11. *). Buktikan teorema Butterfly pada lingkaran dengan menggunakan teorema Menelaus.

12. *). Pada gambar di bawah. Titik $A'$, $B'$, $C'$ dan $D'$ masing-masing berada pada sisi $AB$, $BC$, $CD$ dan $DA$ dari segiempat $ABCD$. Sedangkan $I$ adalah titik potong garis $AC$ dan $BD$ dan juga merupakan titik potong diagonal $A'C'$ dan $B'D'$. Tunjukkan bahwa

   a. $\frac{|AU|}{|UI|} \cdot \frac{|IV|}{|VC|} = \frac{|AI|}{|IC|}$

   b. $\frac{|XA|}{|AI|} \cdot \frac{|IC|}{|GZ|} = \frac{|XI|}{|IZ|}$

   c. $\frac{|XU|}{|UI|} \cdot \frac{|IV|}{|VZ|} = \frac{|XI|}{|IZ|}$



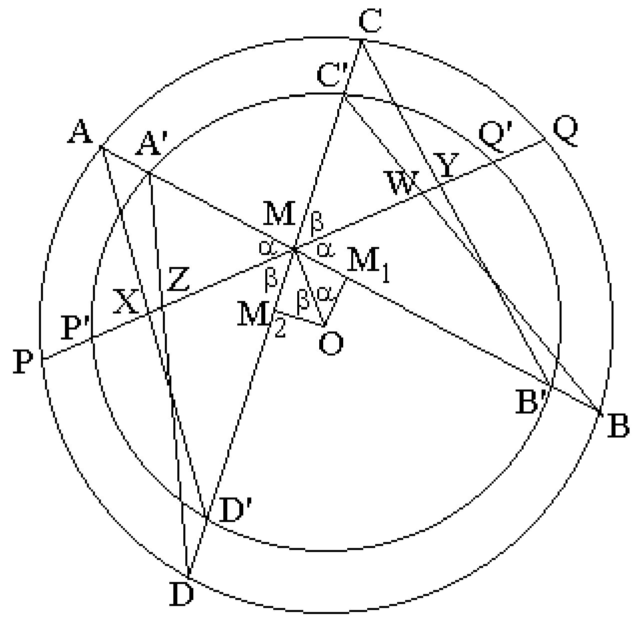

13. **). Buktikan kesamaan (7.3.11) dan (7.3.12) yaitu merupakan kesamaan Butterfly pada elips.

14. *). Misalkan $\Delta\ ABC$ sebarang segitiga, jika $M$ dan $N$ merupakan bisector dari titik $B$ dan $C$ yang memotong $AC$ dan $AB$.Jika $D$ adalah garis potong $MN$ dengan lingkaran luas $\Delta ABC$, tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}$$

15. *). Misalkan dua buah lingkaran mempunyai pusat yang sama di $O$, sebuah garis memotong lingkaran di titip $P$. $Q$ dan $P'$, $Q'$ jika $M$ merupakan titik tangah bersama dari $PQ$ dan $P'Q'$, melalui $M$ dibuat dua buah garis $AA'B'B$ dan CC$'D'D$. Hubungkan $AD'$, $A'D$, $BC'$ dan $B'C$ (seperti pada gambar di bawah, maka terbentuklah butterfly). Misalkan $X$, $Y$, $Z$ dan $W$ masing-masing merupakan titik potong dari $PP'Q'Q$ dengan $AD'$, $B'C$, $A'D$ dan $BC'$. Tunjukkan bahwa berlaku :

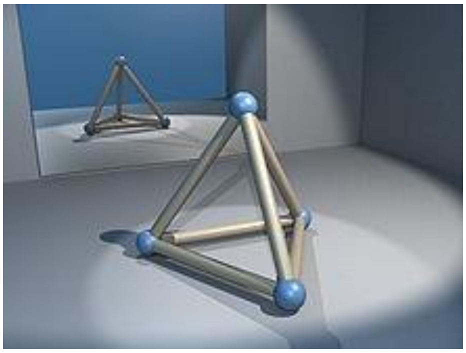
$$\frac{1}{MX} + \frac{1}{MZ} = \frac{1}{MY} + \frac{1}{MW}$$

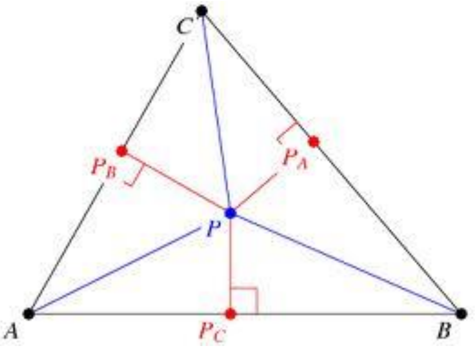


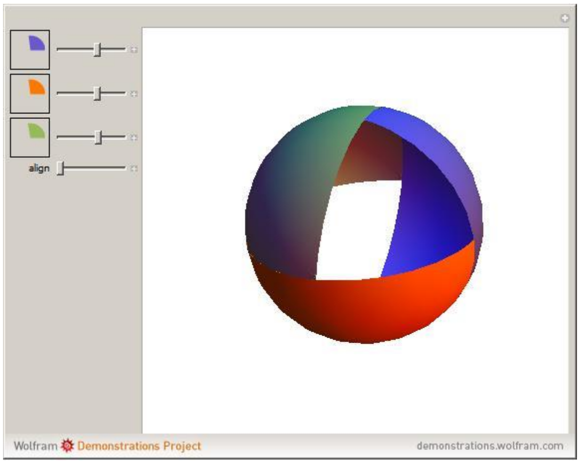
# BAB 8

# Ketaksamaan Erdos-Mordell's

Dalam kehidupan sehari, hari memang tidak banyak dijumpai bentuk ketaksamaan Erdos-Mordel, akan tetapi dalam penerapannya pada berbagai bidang ilmu banyak digunakan ketaksamaan Erdos-Mordell tersebut, misalnya dalam mekanika, astronomi dan lain sebagainya.





BAB

7

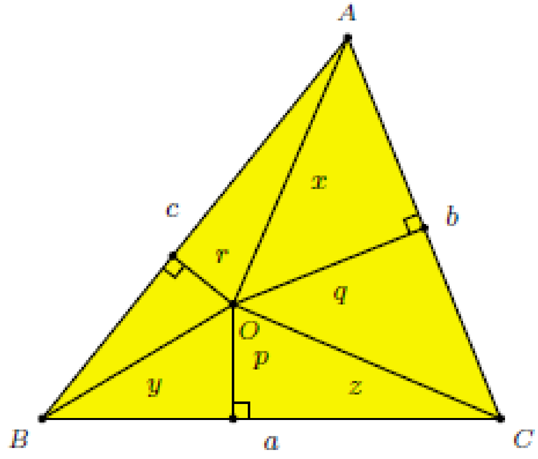
# Ketaksamaan Erdos-Mordell's

## 8.1. *Ketaksamaan Erdos-Mordel*

Berikut ini diberikan ketaksamaan Erdos-Mordel yang merupakan pengembangan dari teorema Carnot I. akan tetapi sebelum membahas tentang ketaksamaan Erdos-Mordell, perhatikan lema pendukung berikut yang buktinya akan dibahas dalam beberapa cara

**Lema 8.1.1**. Misalkan *ABC* sebarang segitiga dan *O* sebarang titik dalam segitiga *ABC*, jika jarak dari *O* ke sisi *BC*, *AC*, *AB* masing-masing adalah *p*, *q*, *r* dan jarak *O* ke titik *A*, *B*, *C* masing-masing adalah *x*, *y*, *z* (seperti gambar 8.1.1). Maka berlaku

$$ax \geq br + cq, \quad by \geq ar + cp \quad \text{dan} \quad cz \geq aq + bp \tag{8.1.1}$$




Gambar 8.1.1

***Bukti : Cara* I.** Perhatikan gambar 8.1.2a, bentuk segitiga $ABC$ yang lain yang panjang sisinya kelipatan $x$ dari panjang sisi segitiga pada gambar 8.1.2a. sehingga diperoleh seperti pada gambar 8.1.2b. Dari gambar 8.1.1, sebut $\angle OAB = \alpha_1$, $\angle OAC = \alpha_2$, seperti pada gambar 8.1.2a. Kemudian buat segitiga $ADC$ yang siku-siku di $D$ dengan $\angle OAB = \alpha_1$ selanjutnya buat $\Delta AEB$ yang siku-siku di $E$ dengan $\angle OAC = \alpha_2$. Sehingga diperoleh :

$$\Delta AEB \sim \Delta OB'A$$

dan

$$\Delta ADC \sim \Delta OC'A.$$

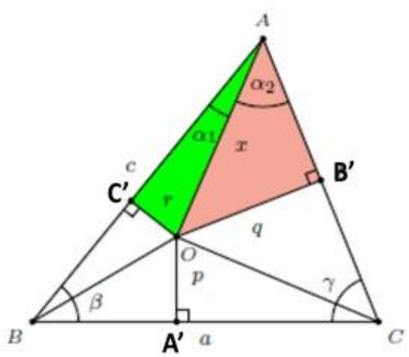
sehingga diperoleh

$$\frac{AE}{OB'} = \frac{AB}{OA}\text{ , jadi } \frac{AE}{q} = \frac{cx}{x} \text{ yang menghasilkan } AE = cq$$

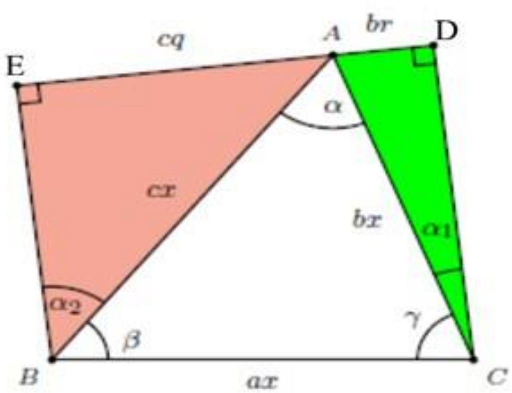
dan

$$\frac{AD}{OC'} = \frac{AC}{OA}\text{ , jadi } \frac{AD}{r} = \frac{bx}{x} \text{ yang menghasilkan } AD = br,$$

maka diperolehlah $ax \geq br + cq$ dan dengan cara yang sama akan diperoleh $by \geq ar + cp$ dan $cz \geq aq + bp$.

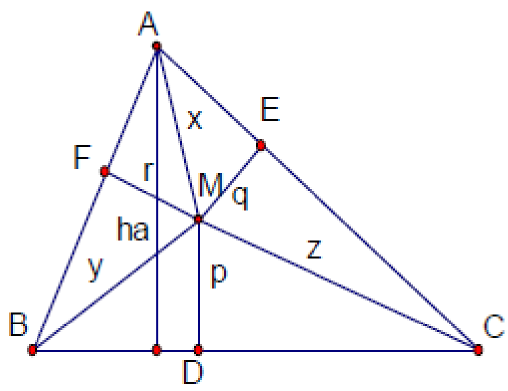



Gambar 8.1.2a




Gambar 8.1.2b

**Cara II.** Perhatikan gambar 8.1.3 berikut Misalkan pula sebarang titik yang diambil di dalam $\Delta AMC$ adalah $M$. Misalkan masing-masing panjang sisi $BC$, $AC$ dan $AB$ adalah $a$, $b$ dan $c$. dan sebut jarak dari titik $A$ ke $BC$ adalah $h_a$ yang merupakan tinggi $\Delta ABC$.




Gambar 8.1.3

Jika $L$ menyatakan luas segitiga ABC, maka

$$2L = a.h_a \qquad (8.1.2)$$

Karena

L$\Delta ABC$ = L$\Delta MBC$+ L$\Delta MCA$+L$\Delta$ $MAB$

Jadi dari persamaan (8.1.2) diperoleh

$2L = a.h_a = a.p + b.q + c.r$

Selanjutnya karan $h_a \leq x + p$ maka

$$a(x + p) \geq a.h_a$$

jadi

$$a.x + a.p \geq a.p + b.q + c.r$$

sehingga

$$a.x \geq b.q + c.r$$

dengan cara yang sama diperoleh

$by \geq ar + cp$ dan

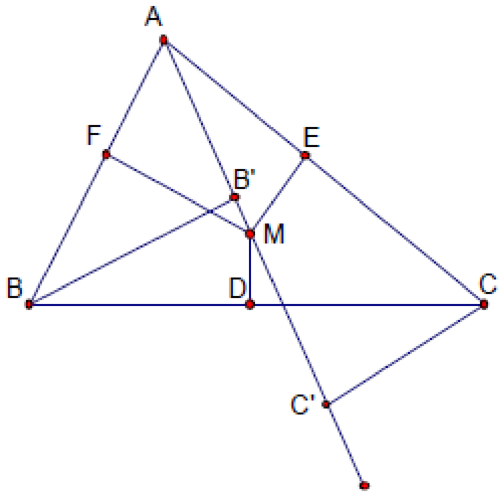
$cz \geq aq + bp$ ♥

***Cara* III.** Perhatikan gambar 8.1.4 berikut).

Sama seperti pada bukti cara II. Misalkan Misalkan masing-masing panjang sisi $BC$, $A$C dan $AB$ adalah $a$, $b$ dan $c$. dan sebut jarak dari titik $A$ ke $BC$ adalah $h_a$ yang merupakan tinggi $\Delta ABC$. Misalkan pula sebarang titik yang diambil di dalam $\Delta AMC$ adalah $M$. Jila L menyatakan luas ΔABC. Kemudian buat garis $AM$ dan diperpanjang seperlunya. Dari titik B buat garis yang tegak lurus ke $AM$ serta dari titik $C$ buat juga garis yang tegak lurus ke perpanjangan garis $AM$, Katakana titik potongnya masing-masing adalah $B'$ dan C′. Proses ini mengakibatkan.

$$\Delta\, AFM \sim \Delta AB'B \text{ dan } \Delta AEM \sim \Delta AC'C$$

Jadi




Gambar 8.1.4.

$$\frac{r}{x} = \frac{BB'}{c} \text{ Maka } rc = xBB'$$

dan

$$\frac{q}{x} = \frac{CC'}{b} \text{ Maka } q.b = xCC'$$

Yang selanjutnya menghasilkan

$$r.c + q.b = x(BB' + CC')$$

$$r.c + q.b \leq x.a$$

dengan cara yang sama akan diperoleh

$by \geq ar + cp$ dan

$cz \geq aq + bp$ ♥

Sebenarnya masing sangat banyak cara membuktikan lema di atas (akan dibahas dalam soal latihan). Berikut ini dengan menggunakan lema di atas dapat dibuktikan ketaksamaan Erdos-Mordell sebagai berikut

***Teorema* 8.1.1. (*Ketaksamaan Erdos-Mordell*).**

Misalkan O sebarang titik dalam $\Delta ABC$, jika jarak dari $O$ ke sisi $BC$, $AC$, $AB$ masing-masing adalah $p$, $q$, r dan jarak $O$ ke titik $A$, $B$, $C$ masing-masing adalah $x$, $y$, $z$ (seperti gambar 8.1.1 di atas). Maka berlaku

$$x + y + z \geq 2\,(p + q + r) \tag{8.1.3}$$

**Bukti** : Berdasarkan lema di atas maka

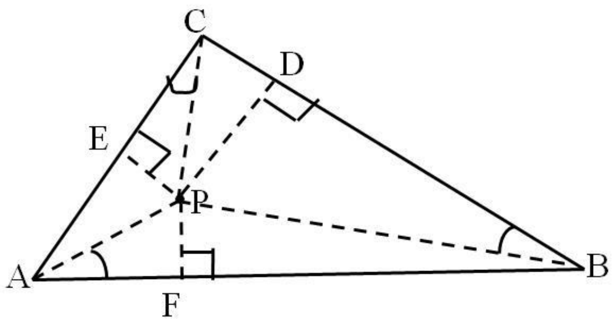
$$x + y + z \geq \frac{br + cq}{a} + \frac{ar + cp}{b} + \frac{aq + bp}{c} \geq \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)p + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)q + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)r$$

Dengan menggunakan rata-rata aritmatik geometri, maka masing-masing koefisien dari p, q dan r lebih kecil dari 2, maka diperoleh

$$x + y + z \geq 2\,(p + q + r)$$ ♥

***Teladan* 8.1.1.** Misalkan *ABC* sebarang segitiga dan titik *P* berada dalam segitiga *ABC*. Tunjukkan paling kurang satu dari $\angle PAB$, $\angle PBC$ dan $\angle PCA$ lebih kecil atau sama dengan $30^0$.

***Penyelesaian*** **:**




Gambar 8.1.5

Perhatikan gambar 8.1.5 di bawah ini dan Perhatikan bahwa *PF* tegak lurus dengan *AB*, *PE* tegak lurus dengan *BC* dan *PE* tegak lurus dengan *AC* andaikan semua . $\angle PAB$, $\angle PBC$ dan $\angle PCA$ lebih besar dari $30^0$. Kemudian pandang.

$$\begin{aligned} PA + PB + PC &= \frac{PF}{\sin\angle PAB} + \frac{PD}{\sin\angle PBC} + \frac{PE}{\sin\angle PCA} \\ &< \frac{PF}{\sin 30^0} + \frac{PD}{\sin 30^0} + \frac{PE}{\sin 30^0} \\ &= \frac{PF}{1/2} + \frac{PD}{1/2} + \frac{PE}{1/2} \\ &= 2\,(PD + PD + PF). \end{aligned}$$

Ketaksamaan di atas bertentangan dengan ketaksamaan Erdos-Mordell. Jadi pegandaian salah, maka haruslah minimal salah satu dari $\angle PAB$, $\angle PBC$ atau $\angle PCA$ lebih kecil atau sama dengan $30^0$. ♥

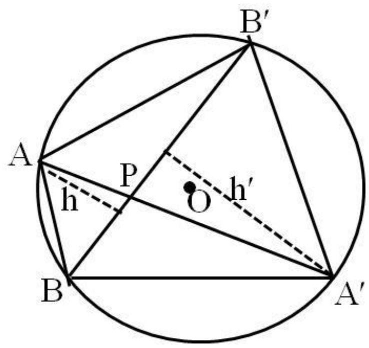
Kalau bukti ketaksamaan Erdos-Mordell ini selalu dengan menggunakan lema atau teorema lain sebelumnya, maka berikut ini akan diberikan bukti yang lelih sederhana dari ketaksamaan Erdos-Mordell yaitu dengan menggunakan perbandingan diagonal dari segiempat yang terbentuk dari dua buah tali busur pada suatu lingkaran.

***Lema* 8.1.2.** Jika pada suatu lingkaran tali busur $AA'$ dan $BB'$ berpotongan di titik P. Maka beralaku

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{AB.AB'}{A'B.A'B'}$$

***Bukti*** : Misalkan $R$ adalah jari-jari lingkaran dan $h$ dan $h'$ masing-masing merupakan tinggi dari $\Delta BAB'$ dan $\Delta BA'B'$, maka berlaku

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{h}{h'} = \frac{\frac{AB.AB'}{2R}}{\frac{A'B.A'B'}{2R}} = \frac{AB.AB'}{A'B.A'B'}$$



gambar 8.1.6

***Bukti Lain ketaksamaan Erdos-Mordell.***

Dengan menggunakan lema di atas, akan dibuktikan ketaksamaan Erdos-Mordell dengan cara yang cukup sederhana. Untuk memudahkan pemahaman penggunaan lema 8.1.2, maka akan digunakan gambar lain dalam proses pembuktiannya. Untuk itu perhatikan gambar 8.1.7 berikut ini

Untuk membuktikannya cukup kita tunjukkan bahwa

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{A'P'}{P'A}.$$

Dari lema 8.1.2 diperoleh

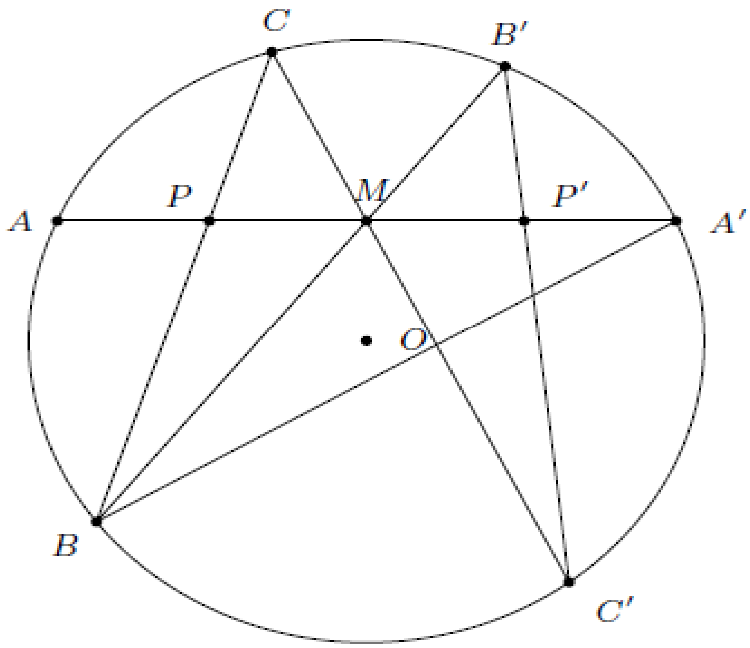
$$1 = \frac{AM}{MA'} = \frac{AB.AB'}{A'B.A'B'}$$

Yang menyebabkan

$$\frac{A'B'}{AB'} = \frac{AB.}{A'B.} \qquad (8.1.2)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\frac{A'C'}{AC'} = \frac{AC.}{A'C.} \qquad (8.1.3)$$




Gambar 8.1.7

Maka berdasarkan lema 8.1.2 dan persamaan (8.1.2) dan (8.1.3) diperoleh

$$\frac{A'P'}{P'A} = \frac{A'B'.}{AB'.} . \frac{A'C'.}{AC'.} = \frac{AB}{A'B} . \frac{AC}{A'C} = \frac{AP}{PA'} \qquad \heartsuit$$

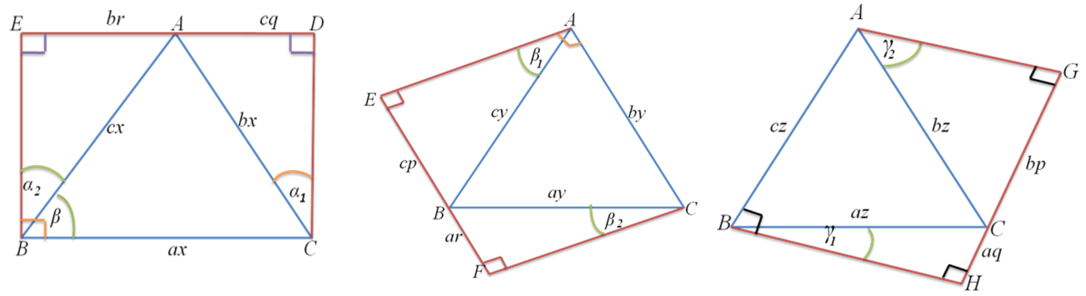
***Teladan*** **8.1.2** Tunjukkan bahwa pada Lema 8.1.1, akan berlaku:

$$x = \frac{br+cq}{a}, = \frac{ar+cp}{b}, \text{ dan } \qquad z = \frac{aq+bp}{c}$$

jika dan hanya jika *O* adalah pusat dari lingkaran luar Δ*ABC* dan dinotasikan $\bar{R}$ adalah jari-jari lingkaran luar segitiga, maka $\bar{R} = x = y = z$.□

***Penyelesaian*** **:** ⇒. Misalkan $= \frac{br+cq}{a}$, $y = \frac{ar+cp}{b}$, dan $z = \frac{aq+bp}{c}$, maka akan dibuktikan bahwa *O* titik pusat lingkaran luar Δ*ABC* atau $\bar{R} = x = y = z$.

Pandang Δ*AOQ* pada gambar 8.1.8, akan berlaku $\angle AOQ + \alpha_2 = 90^0$. Karena diketahui bahwa $ax = br + cq$, maka *ED* = *BC*, sehingga *BC* tegak lurus terhadap *EB* dan *CD*.




Gambar 8.1.8.

jika $ax = br + cq$, maka berlaku:

$$\beta + \alpha_2 = 90^0 \qquad (8.1.4)$$

$$\gamma + \alpha_1 = 90^0 \qquad (8.1.5)$$

Jika $by = ar + cp$, maka berlaku:

$$\alpha + \beta_1 = 90^0 \qquad (8.1.6)$$

$$\gamma + \beta_2 = 90^0 \qquad (8.1.7)$$

Jika $cz = aq + bp$, maka berlaku:

$$\alpha + \gamma_2 = 90^0 \qquad (8.1.8)$$

$$\beta + \gamma_1 = 90^0 \qquad (8.1.9)$$

Pada gambar 8.1.8 berlaku:

$$\angle AOQ + \alpha_2 = 90^0 \qquad (8.1.10)$$

$$\angle COQ + \gamma_1 = 90^0 \qquad (8.1.11)$$

Dari persamaan (8.1.10) dan persamaan (8.1.4) diperoleh:

$$\angle AOQ = \beta \qquad (8.1.12)$$

Dari persamaan (8.1.9) dan persamaan (8.1.11) diperoleh:

$$\angle COQ = \beta \qquad (8.1.13)$$

Dari persamaan (8.1.12) dan persamaan (8.1.13) diperoleh:

$$\angle AOQ = \angle COQ$$

Karena:

$$\angle AOQ \cong \angle COQ$$
$$OQ \cong OQ$$
$$\angle AQO \cong \angle CQO$$

Diperoleh $\Delta AOQ \cong \Delta COQ$ akibatnya $x = z$. Dengan cara yang sama akan diperoleh $x = y$. Karena $x = z$ dan $x = y$ dapat disimpulkan bahwa $x = y = z$, sehingga terbuktilah bahwa *O* merupakan titik pusat lingkaran luar $\Delta ABC$ atau $\bar{R} = x = y = z$.

$\Leftarrow$. Jika diketahui *O* adalah pusat dari lingkaran luar $\Delta ABC$, dinotasikan $AO = x$, $BO = y$, $CO = z$, dan $\bar{R}$ merupakan jari-jari lingkaran luar $\Delta ABC$ atau $x = y = z = \bar{R}$, maka akan dibuktikan berlaku:

$$x = \frac{br+cq}{a}, = \frac{ar+cp}{b}, \text{ dan } z = \frac{aq+bp}{c} \qquad (8.1.14).$$

Diketahui *O* adalah pusat dari lingkaran $L\Delta ABC$. Jika dinotasikan $AO = x$, $BO = y$, $CO = z$ maka pada $\Delta ABC$ akan terdiri dari tiga segitiga dalam yaitu $\Delta AOC$, $\Delta BOC$, dan $\Delta AOB$. Karena $x = y = z$, sehingga tiga segitiga dalam tersebut masing-masing adalah segitiga sama kaki. Sehingga akan diperoleh bahwa:

$$\alpha_2 = \gamma_1, \beta_1 = \gamma_2, \ \alpha_1 = \beta_2 \qquad (8.1.15)$$

Pada gambar 8.1.8 akan berlaku:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 180^0 \qquad (8.1.16)$$

Substitusikan persamaan (3.3.8) ke persamaan (3.3.9) akan diperoleh:

$$\alpha_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 180^0$$
$$\alpha_1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 90^0 \qquad (8.1.44)$$

dan

$$\beta_2 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \alpha_2 + \beta_1 = 180^0$$
$$\beta_2 + \alpha_2 + \beta_1 = 90^0 \qquad (8.1.45)$$

Dari persamaan (8.1.13) dan (8.1.14) akan diperoleh juga bahwa untuk □*EBCD* pada gambar 8.1.8 empat sudutnya adalah siku-siku. Sehingga akan berlaku $ax = br + cq$

atau $= \frac{br+cq}{a}$. Dengan cara yang sama akan diperoleh juga bahwa $= \frac{ar+cp}{b}$, dan $z = \frac{aq+bp}{c}$.

Jadi terbukti bahwa pada suatu segitiga *ABC*, akan diperoleh persamaan $ax = br + cq$, $by = ar + cp$,dan $cz = aq + bp$ jika dan hanya jika *O* adalah pusat dari lingkaran luar $\Delta ABC$. Koefisien *p, q* dan *r* pada Ketaksamaan *Erdős-Mordell* akan sama dengan 2 jika dan hanya jika $a = b = c$, atau dengan kata lain $\Delta ABC$ sama sisi.■

**Teladan 8.1.3.** Jika dinotasikan $\bar{r}$ sebagai jari-jari lingkaran dalam dan $\bar{R}$ sebagai jari-jari lingkaran luar $\Delta ABC$ maka pada $\Delta ABC$ akan berlaku $\bar{R} \geq 2\bar{r}$.□

**Penyelesaian :** Dari teladan 8.1.2 diketahui bahwa $x = y = z = \bar{R}$. Substitusikan bentuk ini ke Ketaksamaan *Erdős-Mordell*. Akan diperoleh $\bar{R} + \bar{R} + \bar{R} \geq 2(p + q + r)$. Teorema Carnot menyatakan bahwa $\bar{R} + \bar{r} = p + q + r$. Untuk segitiga lancip pusat lingkaran berada di dalam $\Delta ABC$, sedangkan untuk segitiga tumpul pusat lingkaran luar akan berada di luar segitiga. Substitusikan $\bar{R} + \bar{r} = p + q + r$ ke persamaan $\bar{R} + \bar{R} + \bar{R} \geq 2(p + q + r)$, akan diperoleh $\bar{R} + \bar{R} + \bar{R} \geq 2(\bar{R} + \bar{r})$ atau $\bar{R} \geq 2\bar{r}$. ♥

***Teladan* 8.1.4**. Diberikan $\Delta ABC$ dengan $A = (0,0)$, $B = (1,1)$ dan $C = (2,0)$. Periksalah apa yang terjadi jika *P* berada di luar $\Delta ABC$.

***Penyelesaian*** : Perhatikan gambar 8.1.9a. Kita misalkan titik *P* dua buah titik yang berada di luar $\Delta ABC$. Katakanlah $P_1(1,2)$ dan $P_2(0,1)$. Perhatikan titik $P_1$ (untuk titik $P_2$ sebagai latihan bagi pembaca. Buat garis yang tegal lurus ke sisi perpanjangan *AB* dan perpanjangan *CB* seperti gambar 8.1.9b.

Jika dimisalkan jarak dari titik $P_1$ ke titik *A*, *B* dan *C* masing-masing adalah *x*, *y* dan *z* sedangkan jarak dari titik $P_1$ ke sisi *BC*, *AC* dan *AB* adalah *p*, *q* dan *r*.

Maka diperoleh

$x = z = \sqrt{5}$ dan $y = 1$.

jadi

$x + y + z = 1 + 2\sqrt{5} \approx$ 5,47

sedangkan

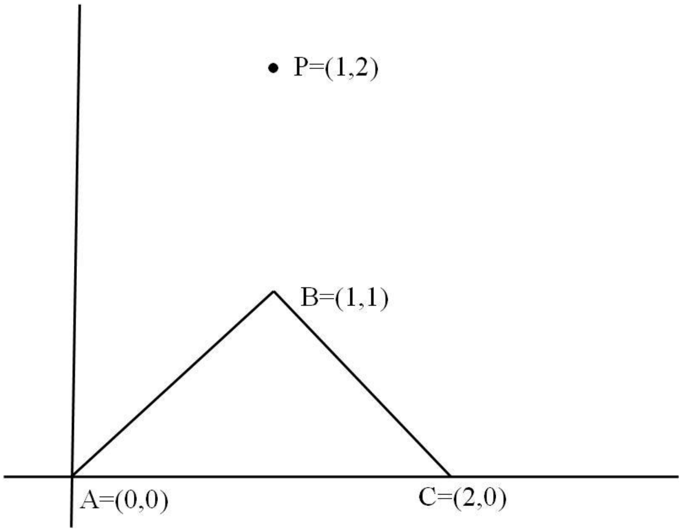
$p = r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan $q = 2$

sehinga

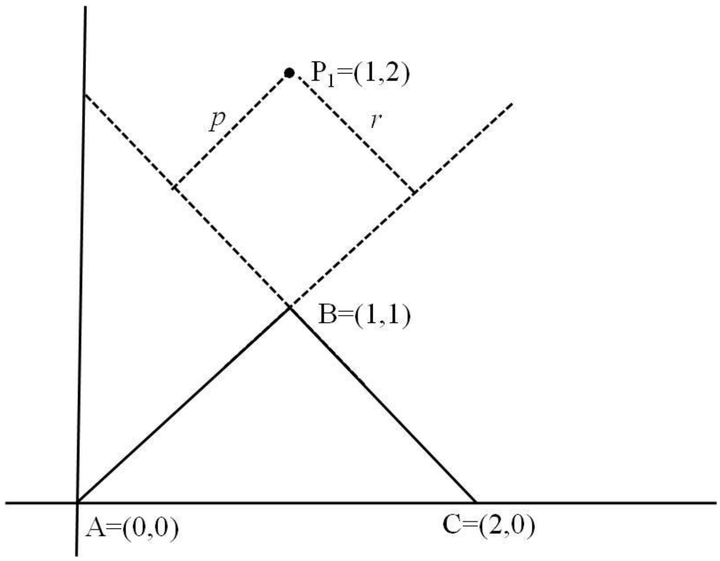
$p + q + r = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41$

maka diperoleh tidak berlaku

$x + y + z \geq 2(P + q + r)$.




Gambar 8.1.9a




gambar 8.1.9b

Apakah ini berarti ketaksamaan Erdos-Mordel tidak berlaku ?. Untuk menjawabnya. Kita perhatikan bahwa dalam teorema ketaksamaan Erdos-Mordell disebutkan bahwa titik $P$ berada dalam $\Delta ABC$. Padahal pada teladan 8.1.2 di atas, titik $P$ kita ambil berada diluar $\Delta ABC$. Agar ketaksamaan Erdos-Mordell tetap berlaku di definisikan jaraknya sebagai berikut

- Nilai $p$ adalah negatip, karena $P_1$ dengan $A$ berada pada bidang yang berbeda terhadap sisi $BC$.
- Nilai $q$ adalah positip karena $P_1$ dengan $B$ berada pada bidang yang sama terhadap sisi $AC$.
- Nilai $r$ adalah negatip karena $P$ dengan $C$ berada pada bidang yang berbeda terhadap sisi $AB$.

Sehingga kalau aturan ini kita terapkan, maka ketaksamaan Erdos-Mordel tetap berlaku pada teladan 8.1.2 di atas, yaitu

$$x + y + z = 1 + 2\sqrt{5} \approx 5{,}47 \geq 1{,}18 \approx 2\left(2 - \sqrt{2}\right) = 2(p + q + r)$$

## 8.2. *Ketaksamaan Bertanda Erdos-Mordel*.

Secara umum yang dibahas pada teladan 8.1.2 di atas, dikenal dengan istilah *jarak bertanda* pada ketaksamaan Erdos-Mordel. Persoalannya adalah kalau umumnya titik $P$ berada dalam segitiga atau pada sisi-sisi dari segitiga, maka bagaimana kalau titik $P$ tersebut berada diluar segitiga tersebut. Seperti yang telah ditunjukkan pada teladan 8.1.2 bahwa jika titik $P$ berada diluar segitiga, maka jarak dari titik p ke garis sisi-sisi segitiga tersebut tidak selalu positip akan tetapi dapat bernilai negatip tergantung dari posisi antara titik $P$ dengan sisi-sisi yang ditentukan jaraknya dari titik $P$. Maka apabila jarak dari titik $P$ ke sisi-sisi (atau perpanjangannya) diberi nilai sebagai berikut

- ***Positip*** jika titik $P$ dengan $A$ berada pada bidang yang sama terhadap sisi $BC$.
- ***Negatip*** jika $P$ dengan $A$ berada pada bidang yang berbeda terhadap sisi $BC$.

Secara umum bentuk ketaksamaan Erdos-Mordel untuk jarak bertanda tersebut adalah sebagai berikut.

***Teorema* 8.1.2** : Diberikan $\Delta ABC$, dan titik $P$ berada pada bidang yang sama dengan segitiga tersebut, misalkan panjang sisi dari segitiga tersebut adalah a, b dan c sedangkan jarak dari titik *P* ke sisi *BC*, *AC* dan *AB* adalah *p*, *q* dan *r*, jarak dari titik *P* ke titik *A*, *B* dan *C*, masing-masing adalah *x*, *y* dan z. Jika

- *p* adalah posisip jika *P* dengan *A* berada pada bidang yang sama terhadap *BC* dan sebaiknya bernilai negatip
- *q* adalah posisip jika *P* dengan *B* berada pada bidang yang sama terhadap *AC* dan sebaiknya bernilai negatip
- *r* adalah posisip jika *P* dengan *C* berada pada bidang yang sama terahadap *AB* dan sebaiknya bernilai negatip

Maka berlaku

$$x + y + z \geq p\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + q\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{c}\right) + r\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

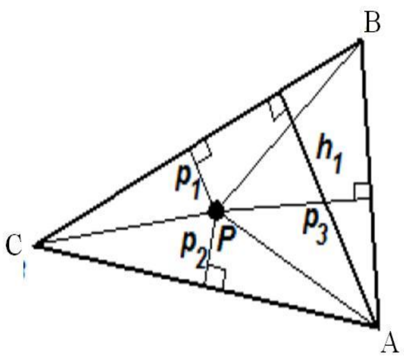
***Bukti*** : Misalkan $h_1$, $h_2$ dan $h_3$ masing-masing garis tinggi dari titik *A*, *B* dan *C* ke sisi *BC*, *CA* dan *AB*. Sedangkan $p_1$, $p_2$ dan $p_3$ merupakan jarak dari titik *P* ke sisi *BC*, *CA* dan *AB*. Kalau yang umum titik *P* berada di dalam Δ*ABC* adalah seperti gambar 8.2.1a sedangkan kalau titik *P* berada di luar Δ*ABC* adalah seperti gambar 8.2.1b.

Kalau titik *P* berada di dalam Δ*ABC* (seperti gambar 8.2.1a), maka berlaku

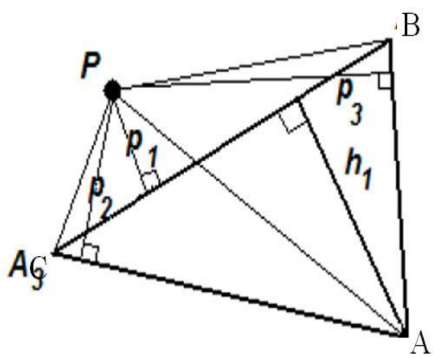
$$L\Delta ABC = L\Delta APB + L\Delta BPC + L\Delta APC \qquad (8.2.1.)$$

Jika titik *P* berada di luar Δ*ABC* (seperti gambar 8.2.1.b), maka ketaksamaan

$$L\Delta ABC = - L\Delta APB + L\Delta BPC + L\Delta APC \qquad (8.2.2)$$




gambar 8.2.1.a




gambar 8.2.1b

Persamaan (8.2.2) di atas, mengatakan bahwa $p_1$ bertanda negatip ($p_1 < 0$). Jadi diperoleh

$$2.L\Delta ABC = \mathrm{ah}_1 = a.p_1 + b.p_2 + c.p_3.$$

Dengan catatan bahwa $PA + p_1 \geq h_1$ dan $p_1 < 0$. Jadi

$$a.PA + a.p_1 = a(PA + p_1) \geq a.h_1 = a.p_1 + b.p_2 + c.p_3.$$

yang berarti

$$a.PA \ \geq\ b.p_2 + c.p_3.$$

atau

$$PA \ \geq \ \frac{b.p_2 + c.p_3}{a} \qquad (8.2.3)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$PB \ \geq \ \frac{a.p_1 + c.p_3}{b} \qquad (8.2.4)$$

dan

$$PC \geq \frac{c.p_1 + b.p_2}{c} \qquad (8.2.5)$$

Misalkan $\Delta A'B'C'$ bayangan dari $\Delta ABC$ terhadap bisektor dari $\angle BAC$, yang mana bisektor dari $\angle BAC$ tersebut juga menjadi bisektor dari dua buah garis tinggi dari titik $A$ (lihat soal 25 latihan 14 bab 7).

dengan menggunakan pertaksamaan 8.2.3 pada $\Delta AB'C'$. dengan menggunakan ketaksamaan $a.PA \geq b.p_2 + c.p_3$. akan diperoleh ketaksamaan

$$a.PA \ \geq\ c.p_2 + b.p_3.$$

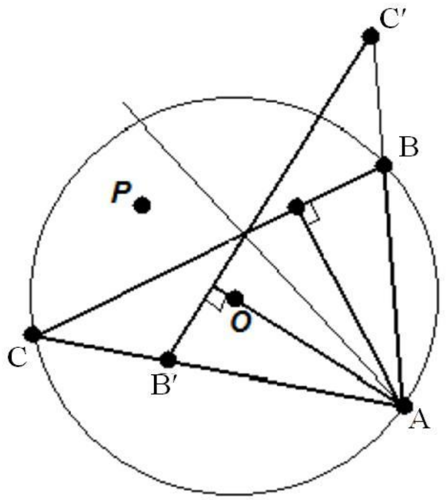
yang berarti

$$PA \ \geq \ \frac{c.p_2}{a} + \frac{c.p_3}{a}$$

dengan cara yang sama akan diperoleh

$$PB \ \geq \ \frac{c.p_1}{b} + \frac{a.p_3}{b}$$

dan



gambar 8.2.2

$$PC \geq \frac{a.p_2}{c} + \frac{b.p_1}{c}$$

Dari ketiga persamaan di atas diperoleh

$$PA + PB + PC \geq \frac{c.p_2}{a} + \frac{c.p_3}{a} + \frac{c.p_1}{b} + \frac{a.p_3}{b} + \frac{a.p_2}{c} + \frac{b.p_1}{c}$$

$$= p_1\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + p_2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + p_3\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \qquad \heartsuit$$

Dengan menggunakan rata-rata aritmatik-geometrik untuk ruas kanan ketaksamaan di atas, maka akan diperoleh

$$PA + PB + PC \geq p_1\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + p_2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + p_3\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)$$

$$\geq 2p_1\sqrt{\frac{c}{b}.\frac{b}{c}} + 2p_2\sqrt{\frac{a}{c}.\frac{c}{a}} + 2p_3\sqrt{\frac{b}{a}.\frac{a}{b}}$$

$$= 2p_1 + 2p_2 + 2p_3$$

$$= 2(p_1 + p_2 + p_3)$$

Sehingga diperoleh bentuk

$$PA + PB + PC \geq 2(p_1 + p_2 + p_3)$$

Yang mana bentuk pertaksamaan di atas pada dasarnya persis sama dengan pertidaksamaan pada teorema 8.1.1 yaitu pertidaksamaan (8.1.3) yaitu $x + y + z \geq 2(P + q + r)$, yang pada pertaksamaan (8.1.3) x, y dan z masing-masing adalah *PA*, *PB* dan *PC*. Yang perlu menjadi perhatian adalah apabila $p_1 < 0$, maka tidak mungkin akan berlaku :

$$p_1\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) \geq 2p_1\sqrt{\frac{c}{b}.\frac{b}{c}} \qquad (8.2.6)$$

Artinya ketaksamaan yaitu $x + y + z \geq 2(P + q + r)$, hanya berlaku jika titik *P* berada di dalam $\Delta ABC$, sedangkan jika titik *P* berada di luar $\Delta ABC$ maka bentuk ketaksamaan Erdos-Mordellnya hanyalah seperti teorema 8.2.1. agar ketaksamaan $x + y + z \geq 2(P + q + r)$ tetap berlaku untuk sebarang titik *P* yang berada di luar $\Delta ABC$, maka (8.2.6) tidak boleh digunakan, sehingga perlu proses pembuktian yang lain yaitu sebagai berikut :

***Teorema* 8.2.2** : ***Ketaksamaan Bertanda Erdos-Mordell***.

Diberikan $\Delta ABC$, dan titik $P$ berada pada bidang yang sama dengan segitiga tersebut, misalkan panjang sisi dari segitiga tersebut adalah a, b dan c sedangkan jarak dari titik $P$ ke sisi $BC$, $AC$ dan $AB$ adalah $p$, $q$ dan $r$, jarak dari titik $P$ ke titik $A$, $B$ dan $C$, masing-masing adalah $x$, $y$ dan z. Jika

- $p$ adalah posisip jika $P$ dengan $A$ berada pada bidang yang sama terhadap $BC$ dan sebaiknya bernilai negatip
- $q$ adalah posisip jika $P$ dengan $B$ berada pada bidang yang sama terhadap $AC$ dan sebaiknya bernilai negatip
- $r$ adalah posisip jika $P$ dengan $C$ berada pada bidang yang sama terahadap $AB$ dan sebaiknya bernilai negatip

Maka berlaku

$$PA + PB + PC \geq 2(p_1 + p_2 + p_3) \qquad (8.2.7)$$

***Bukti*** : Bukti dari teroema di atas akan dibagi dalam 3 kasus berikut

*Kasus 1*. Titik $P$ berada pada sudut yang bertolak belakang (*vertical angle*) dengan salah satu sudut dari $\Delta ABC$.

*Kasus 2.* Titik $P$ berada hanya pada salah satu sudut dalam (*interior angle*) dari $\Delta ABC$.

*Kasus 3*. Titi $P$ berada pada perpanjangan sisi dari sisi-sisi $\Delta ABC$.

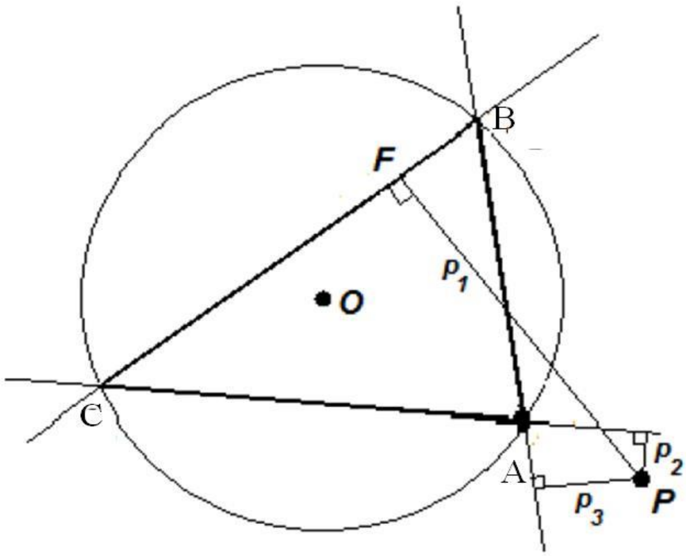
*Bukti untuk kasus* 1. Tanpa mengurangi keumuman misalkan titik $P$ berada pada sudut vertical dari $\angle BAC$, dan misalkan $F$ titik potong garis yang tegak lurus dari titik $P$ ke sisi $BC$. Seperti pada gambar 8.2.3.

Maka untuk kasus di atas, jelas bahwa $p_1 > 0$, $p_2 < 0$ dan $p_3 < 0$. Kemudian sebut $d_1 = p_1$, $d_2 = -p_2$ serta $d_2 = -p_3$. Perhatikan $\Delta\ PFB$ yang siku-siku di $F$, maka berlaku PA > $d_1$, Kemudian untuk $\Delta PFC$ akan berlaku $PC >\ d_1$, maka

$$PA + PB + PC \geq PB + PC \geq d_1 + d_1 = 2.d_1 \geq 2(d_1 - d_2 - d_3)$$

Karena $p_1 > 0$, $p_2 < 0$ dan $p_3 < 0$, dengan $d_1 = p_1$, $d_2 = -p_2$ serta $d_2 = -p_3$, maka

$$PA + PB + PC \geq 2(p_1 + p_2 + p_3).$$

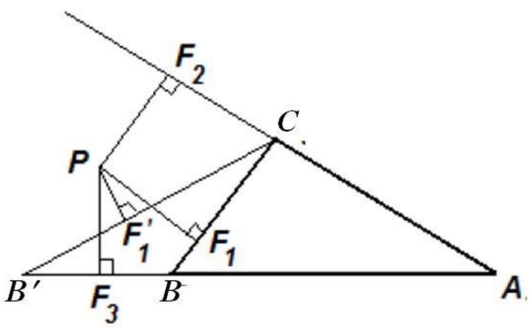



Gambar 8.2.3

*Bukti kasus* 2 : Tanpa mengurangi keumuman misalkan titik $P$ hanya berada pada sudut dalam dari $\angle BAC$. Tanpa mengurangi keumuman misalkan $P$ adalah titik pada sudut dalam dari $\angle BAC$.

*Kasus* 2*a*. Titik $P$ berada di luar $\Delta ABC$ dan merupakan titik pada sudut dalam dari $\angle BAC$, tetapi berada cukup jauh dari $\Delta ABC$ sehingga semua garis tinggi dari titik $P$ ke sisi-sisi $\Delta ABC$ jatuh pada perpanjangan dari sisi-sisinya. Sebut $-d_1 = p_1 < 0$. Buat titik $B'$ sehingga $F_3$ adalah titik tengah dari $BB'$, buat garis tinggi dari titik $P$ ke sisi $CB'$ dan katakana titik potongnya di $F_1{}'$ perhatikan gambar 8.2.4

perhatikan $\Delta PB'B$ samakaki dengan $PB' = PB$, sehingga jarak dari $P$ ke $\Delta ABC$ sama dengan jarak $P$ ke $\Delta AB'C$, kecuali jarak $P$ ke sisi $BC$ yang berbeda dengan jarak $P$ ke sisi B′$C$, untuk itu tukar $d_1$ dengan $d_1'$ dengan $d_1' = PF'$ yang menghasilkan $d_1' < d_1$ jadi




gambar 8.2.4

$p_1 = -d_1 < -\, d_1' = p_1'$ .

Ingat jika P berada dalam $\Delta AB'C$, maka akan berlaku $p_1' < 0 < p_1'$ yang akan menyebabkan

$$p_1' + p_2 + p_3 > p_1 + p_2 + p_3$$

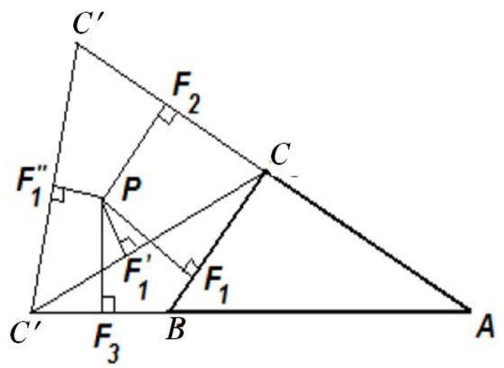
Berikutnya pilih $C'$ dan $F_2$ menjadi titik tengah dari $CC'$, hubungkan $B'$ dengan $C'$ dan katakan $F_1''$ titik potong garis tinggi dari titik $P$ ke $B'C'$ (perhatikan gambar 8.2.5). Perhatikan $\Delta CPC'$ yang sama kaki dengan $PC = PC'$ sehingga jarak titik $P$ ke sisi-sisi $\Delta AB'C'$ sama dengan jarak titik $P$ ke sisi-sisi $\Delta AB'C$ kecuali di $d_1'$ untuk itu gantikan lagi $d_1'$ dengan $d_1'' = PF_1''$, yang juga $p_1' < p_1''$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} p_1'' + p_2 + p_3 &> p_1' + p_2 + p_3 \\ &> p_1 + p_2 + p_3 \end{aligned}$$

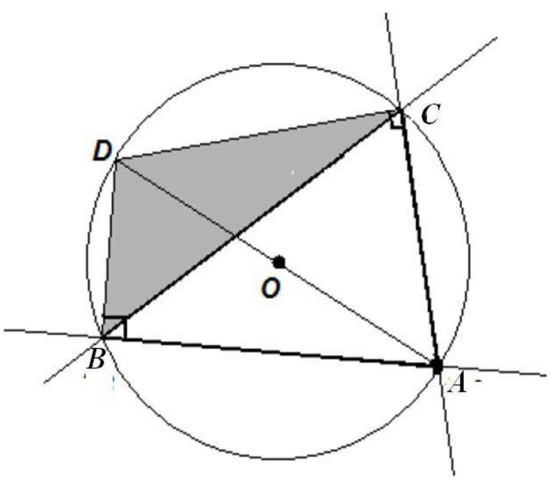
Ini mengatakan bahwa kalau ketaksamaan Erdos-mordel diberi tanda, maka berlaku :

$$PA + PB + PC \geq 2(p_1 + p_2 + p_3).$$

Yang berlaku untuk semua segitiga yang kakinya tegaklurus dari titik $P$, jadi juga mesti berlaku untuk segitiga yang semula.



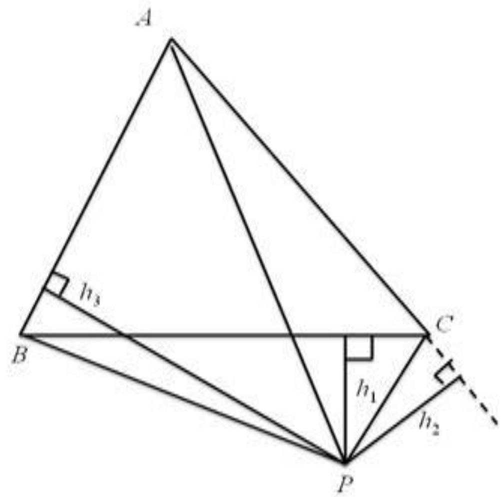

gambar 8.2.5




gambar 8.2.

Untuk kasus lain dapat sebagai latihan bagi pembaca.

Kalau pada proses pembuktian di atas, jaraknya diberi tanda negatip atau positip bergantung kepada posisi titik $P$ terhadap titik dan sisi di hadapan titik tersebut, maka berikut ini akan diberikan alternatif bukti ketaksamaan Erdos-Modell dengan menggunakan konsep segitiga yang dibentuk oleh titik P dan dua titik lainnya pada segitiga tersebut yaitu sebagai berikut: Perhatikan Gambar 11, untuk *P* sebarang titik di luar segitiga.




Gambar 8.2.7

Pada Gambar 8.2.7, titik *P* di luar $\Delta ABC$. Misalkan $h_1$, $h_2$ dan $h_3$ berturut-turut adalah garis tinggi $\Delta PBC$, $\Delta PCA$ dan $\Delta PAB$. Sehingga diperoleh luas $\Delta ABC$ sebagai berikut.

$$L\Delta ABC = L\Delta PCA + L\Delta PAB - L\Delta PBC$$

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2} h_2 \overline{CA} + \frac{1}{2} h_3 \overline{AB} - \frac{1}{2} h_1 \overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2}( h_2 \overline{CA} + h_3 \overline{AB} - h_1 \overline{BC})$$

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}(- h_1 \overline{BC} + h_2 \overline{CA} + h_3 \overline{AB}). \qquad \ldots(8.2.8)$$

Untuk *P* sebarang titik *interior* segitiga, diperoleh $L\Delta ABC$, yaitu

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}( d_1 \overline{BC} + d_2 \overline{CA} + d_3 \overline{AB}).$$

Tetapi untuk *P* titik di luar segitiga diperoleh $L\Delta ABC$ seperti pada persamaan (8.2.8), maka haruslah berlaku

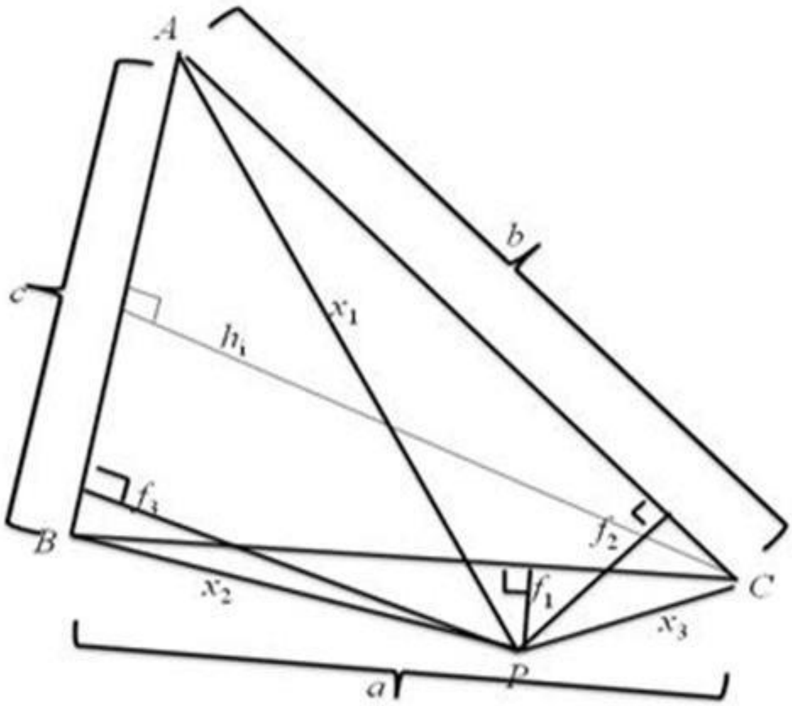
$$\frac{1}{2}(-h_1 \overline{BC} + h_2 \overline{CA} + h_3 \overline{AB}) = \frac{1}{2}(d_1 \overline{BC} + d_2 \overline{CA} + d_3 \overline{AB}). \qquad \ldots(8.2.9)$$

Dan diperoleh $-h_1 = d_1$, $h_2 = d_2$ dan $h_3 = d_3$.

Sehingga $L\Delta ABC$ pada persamaan (2.2.1) dengan *P* titik di luar segitiga seperti pada Gambar 11, haruslah $d_1$ bertanda negatif, sedangkan $d_2$ dan $d_3$ bertanda positif.

**Teorema 8.2.3.** Misalkan *P* sebarang titik di luar $\Delta ABC$. $x_1$, $x_2$, $x_3$ berturut-turut adalah jarak dari titik *P* ke titik-titik sudut *A*, *B*, *C*, dan $d_1$, $d_2$, $d_3$ berturut-turut adalah jarak dari titik $P$ ke sisi-sisi $BC$, $CA$, $AB$, serta $a$, $b$ dan $c$ adalah panjang sisi-sisinya. Maka diperoleh Ketaksamaan *Erdős-Mordell*, yaitu:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2(d_1 + d_2 + d_3).$$




Gambar 8.2.8

**Bukti:** Pada Gambar 8.2.8, misalkan $h_i$ adalah garis tinggi dari titik $C$ ke sisi $AB$. Maka diperoleh $L\Delta ABC$ sebagai berikut.

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}\,AB\,h_i = \frac{1}{2}\,ch_i$$

$$2L\Delta ABC = ch_i. \qquad \ldots(8.2.10)$$

Pada Gambar 8.2.8, $P$ titik di luar $\Delta ABC$. Misalkan $f_1$, $f_2$ dan $f_3$ berturut-turut adalah garis tinggi $\Delta BCP$, $\Delta ACP$ dan $\Delta ABP$. Sehingga diperoleh luas $\Delta ABC$ sebagai berikut.

$$L\Delta ABC = L\Delta ACP + L\Delta ABP - L\Delta BCP$$

$$= \frac{1}{2} f_2\, CA + \frac{1}{2} f_3\, AB - \frac{1}{2} f_1\, BC$$

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}(f_2 CA + f_3 AB - f_1 BC)$$

$$= \frac{1}{2}(bf_2 + cf_3 - af_1)$$

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}(-af_1 + bf_2 + cf_3). \qquad \ldots(8.2.11)$$

Untuk $P$ sebarang titik *interior* segitiga, diperoleh $L\Delta ABC$ sebagai berikut

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}(ad_1 + bd_2 + cd_3). \qquad \ldots(8.2.11a)$$

Tetapi untuk $P$ titik di luar segitiga diperoleh $L\Delta ABC$ seperti pada persamaan (8.2.11), maka haruslah berlaku

$$\frac{1}{2}(-af_1 + bf_2 + cf_3) = \frac{1}{2}(ad_1 + bd_2 + cd_3).$$

Dan diperoleh $-f_1 = d_1$, $f_2 = d_2$, dan $f_3 = d_3$.

Sehingga $L\Delta ABC$ pada persamaan (8.2.11a) dengan $P$ titik di luar segitiga seperti pada Gambar 8.2.8, haruslah $d_1$ bertanda negatif, sedangkan $d_2$ dan $d_3$ bertanda positif. Substitusikan persamaan (8.2.11) ke persamaan (8.2.10), maka

$$ch_i = ad_1 + bd_2 + cd_3. \qquad \ldots(8.2.12)$$

$h_i$ adalah garis tinggi dari titik $C$ ke sisi $AB$, sehingga $x_3 + d_3 \geq h_i$ dan diperoleh

$$c(x_3 + d_3) \geq ch_i$$

$$cx_3 + cd_3 \geq ch_i. \qquad \ldots(8.2.13)$$

Substitusikan persamaan (8.2.12) ke persamaan (8.2.13), maka

$$cx_3 + cd_3 \geq ad_1 + bd_2 + cd_3$$

$$cx_3 \geq ad_1 + bd_2 \qquad \ldots(8.2.14)$$

Karena $a = BC$, $b = CA$, dan $c = AB$, maka persamaan (8.2.14) menjadi

$$AB x_3 \geq BC\, d_1 + CA\, d_2. \qquad \ldots(8.2.15)$$

Kemudian, dengan memutar $ABC$ 180° terhadap bisektor $\angle C$ maka diperoleh $\Delta GHC \cong \Delta ABC$ seperti pada Gambar 16. Sehingga

$$GH = AB = c, \quad CG = CA = b,$$

dan

$HC = BC = a$.

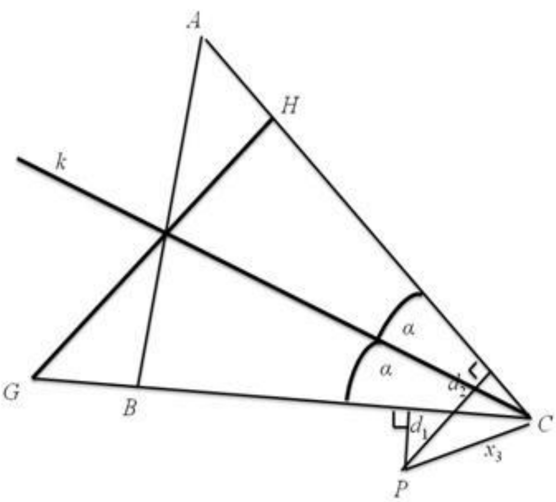
Dengan menggunakan persamaan (8.2.15) pada $\Delta GHC$, berlaku

$$GH\, x_3 \geq CG\, d_1 + HC\, d_2$$

$$cx_3 \geq bd_1 + ad_2.$$

$$x_3 \geq \frac{b}{c} d_1 + \frac{a}{c} d_2 \qquad \ldots(8.2.15)$$

dengan $d_1$ bertanda negatif dan $d_2$ bertanda positif.




Gambar 8.2.9

Selanjutnya dengan cara yang sama, dengan memutar $\Delta ABC$ 180$^{\text{o}}$ terhadap bisektor $\angle A$ sehingga diperoleh

$$x_1 \geq \frac{c}{a} d_2 + \frac{b}{a} d_3 \qquad \ldots(8.2.16)$$

dengan $d_2$ dan $d_3$ bertanda positif.

Dan dengan memutar $\Delta ABC$ 180$^{\text{o}}$ terhadap bisektor $\angle B$ diperoleh

$$x_2 \geq \frac{c}{b} d_1 + \frac{a}{b} d_3 \qquad \ldots(8.2.17)$$

dengan $d_1$ bertanda negatif dan $d_3$ bertanda positif.

Dengan menjumlahkan persamaan (8.2.15), (8.2.16), dan (8.2.17), diperoleh

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2(d_1 + d_2 + d_3)$$

dengan $d_1$ bertanda negatif sedangkan $d_2$ dan $d_3$ bertanda positif. ♥

## 8.3. *Ketaksamaan Barrow's*

Kalau ketaksamaan Erdor Mordel di atas semuanya membanding jumlah jarak dari titik P ke titik sudut dari segitiga yang dibandingkan dengan 2 kali jarak dari jumlah jarak titik P terhadap sisi-sisi segititiga. Berikut ini akan diberikan bentuk lain dari ketaksamaan Erdos-Mordell yaitu membandingkan jumlah jarak titik P terhadap titik-titik sudut segitiga di bandingkan dengan jumlah jarak dari titik P terhadap titik-titik yang berada pada sisi-sisi segitiga tersebut. Untuk memudahkan penulisan maka pada teorema berikut ini akan digunakan lambang dan yang berbeda dengan notasi yang ada pada teorema-teorema di atas, baik untuk titik sudut segitiga maupun jaraknya.

Untuk membuktikan ketaksamaan Barrow's diperlukan dua buah lema, yang pada dasarnya lema ini persoalan dalam suatu segitiga, akan tetapi karena lema ini proses pembuktiannya lebih terkesan pada konsep trigonometri, maka pembuktiannya tidak akan diberikan dalam buku ini, namun bagi pembaca yang berminat dapat mencoba membuktikannya dengan menggunakan konsep trigonometri, sedangkan lema kedua nantinya dapat dibuktikan dengan menggunakan lema pertama.

***Lema* 8.3.1**. misalkan $a$, $b$ dan $c$ sisi-sisi dari $\Delta ABC$ dengan sudutnya adalah $\alpha$, $\beta$ dan $\gamma$ maka beralaku :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(bc.cos\ \alpha + ac.cos\ \beta + ab.cos\ \gamma)$$

***Bukti*** : lihat [sebagai latihan]

***Lema* 8.3.1**. misalkan $a$, $b$ dan $c$ sisi-sisi dari $\Delta ABC$ dengan sudutnya adalah $\alpha$, $\beta$ dan $\gamma$ maka beralaku :

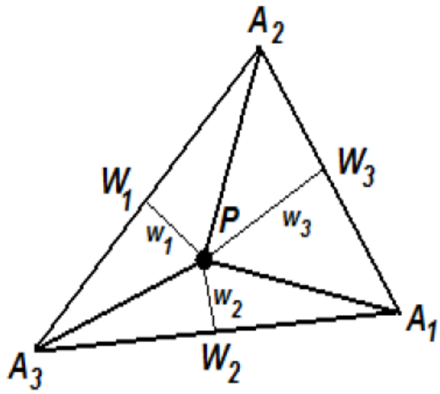
$$a\, cos\, \alpha + b\, cos\, \beta + c\, cos\, \gamma \ \leq \ \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)$$

***Bukti*** : lihat [sebagai latihan]

***Teorema* 8.3.1** : Diberikan $\Delta A_1A_2A_3$ dan titik P di dalam $\Delta A_1A_2A_3$. Misalkan $W_i$ pada sisi-sisi dari $\Delta A_1A_2A_3$ yang berseberangan dengan $A_i$ sehingga $PW_j$ merupakan bisektor dari $\angle A_iPA_k$ dengan $i \neq j \neq k$. Jika $w_i = PW_i$. Maka berlaku

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 \geq 2(w_1 + w_2 + w_3).$$

***Bukti*** : Misalkan sudut dari segitiga tersebut adalah $\alpha$, $\beta$ dan $\gamma$. Dengan $2\theta_1 = \angle A_2PA_3$, $2\theta_2 = \angle A_1PA_3$ dan $2\theta_3 = \angle A_1PA_2$. Maka berdasarkan soal no 24 latihan lati9han 14 ban 7 diperoleh




gambar 8.3.1

$$w_1 = \frac{2.PA_2.PA_3 \cos\theta_1}{PA_2+PA_3}$$

$$w_2 = \frac{2.PA_1.PA_3 \cos\theta_2}{PA_1+PA_3}$$

$$w_3 = \frac{2.PA_1.PA_2 \cos\theta_3}{PA_1+PA_2}$$

Maka diperoleh

$$w_1 + w_2 + w_3 = \frac{2.PA_2.PA_3 \cos\theta_1}{PA_2+PA_3} + \frac{2.PA_1.PA_3 \cos\theta_2}{PA_1+PA_3} + \frac{2.PA_1.PA_2 \cos\theta_3}{PA_1+PA_2}$$

$$= \left(\frac{2}{PA_2+PA_3}\right)(PA_2.PA_3 \cos\theta_1) +$$

$$\left(\frac{2}{PA_1+PA_3}\right)(PA_1.PA_3 \cos\theta_2) +$$

$$\left(\frac{2}{PA_1+PA_2}\right)(PA_1.PA_2 \cos\theta_3)$$

Dengan menggunakan rata-rata aritmatik-geometrik diperoleh

$$w_1 + w_2 + w_3 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{PA_2.PA_3}}\right)(PA_2.PA_3 \cos\theta_1) +$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{PA_1.PA_3}}\right)(PA_1.PA_3 \cos\theta_2) +$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{PA_1.PA_2}}\right)(PA_1.PA_2 \cos\theta_3)$$

$$\leq \left(\sqrt{PA_2.PA_3}.\cos\theta_1\right) + \left(\sqrt{PA_1.PA_3}\,.\cos\theta_2\right) +$$
$$\left(\sqrt{PA_1.PA_2}\cos\theta_3\right)$$

Berdasarkan lema 8.3.2 dengan $= \sqrt{PA_2.PA_3}$ , $b = \sqrt{PA_1.PA_3}$ dan $c = \sqrt{PA_1.PA_2}$

$$w_1 + w_2 + w_3 \leq \frac{\sqrt{PA_1.PA_3}.\sqrt{PA_1.PA_2}}{2\sqrt{PA_2.PA_3}} + \frac{\sqrt{PA_2.PA_3}\,.\sqrt{PA_1.PA_2}}{2\sqrt{PA_1.PA_3}} +$$
$$\frac{\sqrt{PA_2.PA_3}\,.\sqrt{PA_1.PA_3}}{2\sqrt{PA_1.PA_2}}$$

$$w_1 + w_2 + w_3 \leq \frac{PA_1}{2} + \frac{PA_2}{2} + \frac{PA_3}{2}$$

Maka diperoleh

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 \geq 2(w_1 + w_2 + w_3). \qquad ♥$$

***Alternatif bukti teorema*** **8.3.1.**

Karena konsep luas biasanya dirasakan lebih mudah memahaminya, maka berikut ini juga akan diberikan alternatif bukti teorema 8.3.1 dengan menggunakan konsep luar. Tetap dengan menggunakan seperti bukti di atas yaitu misalkan sudut dari segitiga tersebut adalah $\alpha$, $\beta$ dan $\gamma$. Dengan $2\theta_1 = \angle A_2PA_3$, $2\theta_2 = \angle A_1PA_3$ dan $2\theta_3 = \angle A_1PA_2$. Kembali perhatikan gambar 8.3.1, maka

$$L\Delta A_2PA_3 = \frac{PA_2.PA_3.\sin(2\theta_1)}{2}$$
$$= \frac{2.PA_2.PA_3.\sin\theta_1\cos\theta_1}{2}$$
$$= PA_2.PA_3.\sin\theta_1\cos\theta_1$$

Sedangkan

$$L\Delta A_2PA_3 = L\Delta A_2PW_1 + L\Delta A_3PW_1$$

Karena $PW_1$ bisektor dari $\angle A_2PA_3$, maka berlaku

$$L\Delta A_2PA_3 = \frac{PA_2.w_1.\sin(\theta_1)}{2} + \frac{PA_3.w_1.\sin(\theta_1)}{2}$$
$$L\Delta A_2PA_3 = \frac{(PA_2+PA_3\,).w_1.\sin(\theta_1)}{2}$$

Kembali dengan menggunakan rata-rata aritmatika-geometrik diperoleh

$$L\Delta A_2PA_3 = \frac{2.\sqrt{PA_2PA_3}.w_1.\sin(\theta_1)}{2}$$

$$L\Delta A_2PA_3 = w_1.\sqrt{PA_2PA_3}\,.\sin(\theta_1)$$

Karena $PA_2 = PA_3$, kita gunakan ketaksamaan di atas untuk $\Delta A_2PA_2$, maka diperoleh

$$PA_2PA_3\,.\sin(\theta_1)\,.\cos(\theta_1) \geq w_1.\sqrt{PA_2PA_3}\,.\sin(\theta_1)$$

$$w_1 \leq \sqrt{PA_2PA_3}\,.\cos(\theta_1) \qquad (8.3.1)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$w_2 \leq \sqrt{PA_1PA_3}\,.\cos(\theta_2) \text{ dan } w_3 \leq \sqrt{PA_1PA_2}\,.\cos(\theta_3) \qquad (8.3.2)$$

Dengan PA$_1$ = PA$_2$ dan PA$_1$ = PA$_3$, maka

$$0 \leq \left(\sqrt{PA_1} - \sqrt{PA_2}\,.\cos(\theta_3) - \sqrt{PA_3}\,.\cos(\theta_2)\right)^2 +$$

$$\left(\sqrt{PA_2}\,.\sin(\theta_3) - \sqrt{PA_3}\,.\sin(\theta_2)\right)^2 \qquad (8.3.3)$$

$$= PA_1 + PA_2\cos^2(\theta_3) + PA_3\cos^2(\theta_2) +$$

$$-2\sqrt{PA_1PA_2}\,.\cos(\theta_3) - 2.\sqrt{PA_1PA_3}\,.\cos(\theta_2) +$$

$$2\sqrt{PA_2PA_3}\,.\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)$$

$$+ PA_2\sin^2(\theta_3) + PA_3\sin^2(\theta_2) - 2\sqrt{PA_2PA_3}\,.\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)$$

$$= PA_1 + PA_2[\sin^2(\theta_3) + \cos^2(\theta_3)] + PA_3[\sin^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_2)] +$$

$$-2\sqrt{PA_1PA_2}\,.\cos(\theta_3) - 2.\sqrt{PA_1PA_3}\,.\cos(\theta_2) +$$

$$2\sqrt{PA_2PA_3}\,.\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)$$

$$- 2\sqrt{PA_2PA_3}\,.\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)$$

$$= PA_1 + PA_2 + PA_3 + -2\sqrt{PA_1PA_2}\,.\cos(\theta_3) -$$

$$2.\sqrt{PA_1PA_3}\,.\cos(\theta_2) +$$

$$2\sqrt{PA_2PA_3}\,.\cos(\theta_2 + \theta_3)$$

Karena $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$, maka

$$0 \leq PA_1 + PA_2 + PA_3 - 2\sqrt{PA_1PA_2}.\cos(\theta_3) - 2.\sqrt{PA_1PA_3}.\cos(\theta_2) + 2\sqrt{PA_2PA_3}.\cos(\pi - \theta_1)$$

$$\leq PA_1 + PA_2 + PA_3 - 2\sqrt{PA_1PA_2}.\cos(\theta_3) - 2.\sqrt{PA_1PA_3}.\cos(\theta_2) - 2\sqrt{PA_2PA_3}.\cos(\theta_1)$$

Maka berdasarkan persamaan 8.3.2 diperoleh

$$0 \leq PA_1 + PA_2 + PA_3 - 2w_1 - 2w_2 - 2w_3 \qquad (8.3.4)$$

Yang menghasilkan

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 \geq 2w_1 + 2w_2 + 2w_3 \qquad ♥$$

Berikut ini diberikan akibat dari teorema di atas, yang menyatakan hubungan garis tinggi dengan sisi-sisi yang mengapitnya serta cosines sudutnya.

***Akibat* 8.3.1.** : Diberikan $\Delta A_1A_2A_3$ dan $W_i$ pada sisi-sisi dari $\Delta A_1A_2A_3$ yang berseberangan dengan $A_i$ sehingga $PW_j$ merupakan bisektor dari $\angle A_iPA_k$ dengan $i \neq j \neq k$. Jika $w_i = PW_i$. Misalkan juga $\alpha_i = \angle A_i$ dan $h_i$ panjang garis tinggi dari titik $A_i$ ke sisi dihadapannya. Maka berlaku

$$h_1 \leq \sqrt{a_2a_3}\, cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right), \quad h_2 \leq \sqrt{a_1a_3}\, cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \text{ dan } h_3 \leq \sqrt{a_1a_2}\, cos\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)$$

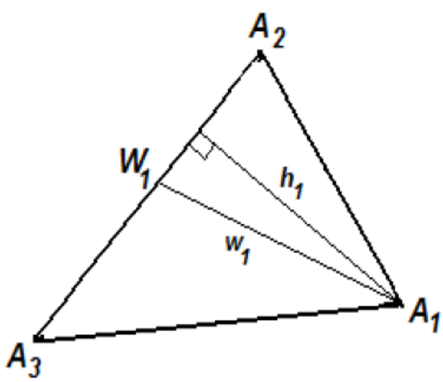
***Bukti*** : Dari persamaan (8.3.2) diperoleh

$$w_1 \leq \sqrt{a_2a_3}\, cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)$$

$$w_2 \leq \sqrt{a_1a_3}\, cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) h_3$$

$$\leq \sqrt{a_1a_2}\, cos\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)$$

karena $h_1 \leq w_1$, $h_2 \leq w_2$ dan $h_3 \leq w_3$, maka diperoleh persamaan yang diinginkan



gambar 8.3.2

***Teladan* 8.3.1**, diberikan $\Delta A_1A_2A_3$ dan $P$ titik dalamnya, jika $a_1$ menyatakan panjang sisi-sisi yang berada di depan sudut $A_i$. Jika $p_i$ menyatakan jarak dari titik $P$ ke sisi di hadapan sudut $A_i$. tunjukkan bahwa berlaku $a.PA + b.PB + c.PC \geq 4L\Delta ABC$.

***Penyelesaian* :** Pertama-tama misalkan

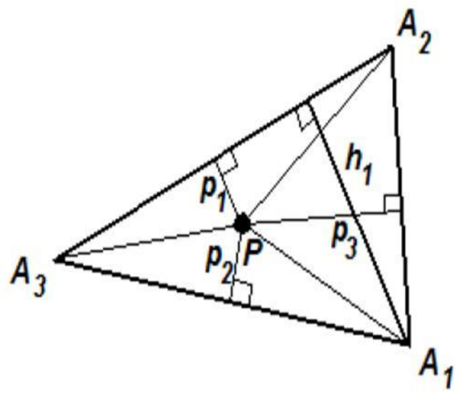
$$2LA_1A_2A_3 = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3.$$

Jika $h_i$ menyatakan panjang garis tinggi dari titik $A_i$, maka jelas berlaku

$$PA_1 + p_1 \geq h_1$$

kalau persamaan di atas di kali dengan $a_1$ maka diperoleh

$$a_1PA_1 + a_1p_1 \geq a_1h_1 = 2L\Delta ABC.$$




atau

gambar 8.3.3

$$a_1PA_1 \geq 2L\Delta ABC - a_1p_1$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$A_2PA_2 \geq 2L\Delta ABC - a_2p_2 \text{ dan}$$

$$A_3PA_3 \geq 2L\Delta ABC - a_3p_3$$

Kalau ketiga persamaan di atas di jumlahkan maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} a_1PA_1 + A_2PA_2 + A_3PA_3 &\geq 2L\Delta ABC - a_1p_1 + 2L\Delta ABC - a_2p_2 + 2L\Delta ABC - a_3p_3 \\ &= 6\, L\Delta ABC - (a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3) \\ &= 6\, L\Delta ABC - 2\, L\Delta ABC \\ &= 4\, L\Delta ABC \end{aligned}$$

♥

## 8.4. *Ketaksamaan Erdos-Mordel Untuk Segi-empat.*

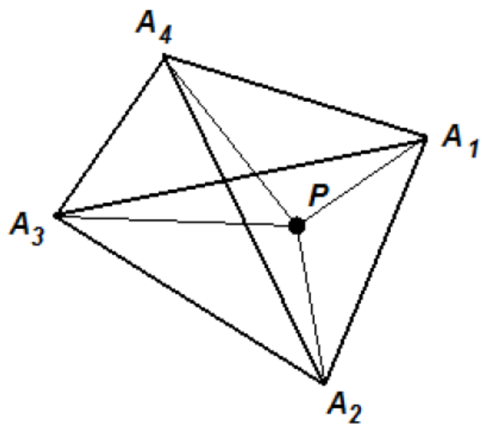
Kalau pada ke tiga sub-bab di atas ketaksamaan Erdos-Mordel diberlakukan pada segitiga, dengan titik $P$ berada di dalam maupun di luar segitiga. Bentuk lain ketaksamaan Erdos-Mordelnya adalah kita bandingkan dengan jumlah jarak titik $P$

dengan sebarang titik yang yang berada pada ketiga sisi segitiga tersebut. Akan tetapi berikut ini, bentuk ketaksamaan Erdos-Mordel kita kembangkan untuk sebarang titik di dalam sebarang segiempat.

***Teorema* 8.4.1**. Misalkan $A_1A_2A_3A_4$ sebarang segiempat dengan titik $P$ berada di dalam segiempat tersebut. Misalkan $p_{ij}$ jarak dari titik $P$ ke sisi $A_iA_j$ dan misalkan pula $p_{ij;\ ijk}$ jarak bertanda dari titik $P$ ke sisi $A_iA_j$ untuk $\Delta A_iA_jA_k$. Maka berlaku

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 \geq 4/3\ (p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{14})$$

***Bukti*** : Perhatikan gambar 8.4.1 di sebelah dan pandang titik $P$ terhadap $\Delta A_1A_2A_3$, $\Delta A_2A_3A_4$, $\Delta A_3A_4A_1$ dan $\Delta A_4A_1A_2$. Maka berdasarkan teorema 8.2.2. untuk ke empat segitiga di atas, maka untuk masing-masing segitiga dengan titik $P$ yang seudah ditetapkan akan diperoleh hasil sebagai berikut




gambar 8.4.1

Untuk $\Delta A_1A_2A_3$ : $\quad PA_1 + PA_2 + PA_3 \geq 2\left(p_{12;\,123}.\,p_{23;123}.\,p_{13;123}\right)$

Untuk $\Delta A_2A_3A_4$ : $\quad PA_2 + PA_3 + PA_4 \geq 2\left(p_{23;\,234}.\,p_{34;234}.\,p_{24;234}\right)$

Untuk $\Delta A_1A_3A_4$ : $\quad PA_1 + PA_3 + PA_4 \geq 2\left(p_{34;\,14}.\,p_{14;134}.\,p_{13;134}\right)$

Untuk $\Delta A_1A_2A_4$ : $\quad PA_1 + PA_2 + PA_4 \geq 2\left(p_{12;\,124}.\,p_{24;124}.\,p_{14;124}\right)$

Perhatikan hal berikut $p$

$p_{13;\,123} = -p_{13;134}$ , karena $P$ minimal merupakan titik dalam dari $\Delta A_1A_2A_3$ dan $\Delta A_1A_3A_4$.

$P_{24;\,124} = -p_{24;234}$ , karena $P$ minimal merupakan titik dalam dari $\Delta A_1A_2A_4$ dan $\Delta A_2A_3A_4$.

$p_{12;\,123} = p_{12;124} = p_{12}$, karena $P$ minimal mesti berada pada sisi yang sama terhadap $A_1A_2$ ditinjau dari $A_3$ dan $A_4$.

$p_{23;\,123} = p_{23;234} = p_{23}$, karena $P$ minimal mesti berada pada sisi yang sama terhadap $A_2A_3$ ditinjau dari $A_1$ dan $A_4$.

$P_{34;\,134} = p_{34;234} = p_{34}$, karena $P$ minimal mesti berada pada sisi yang sama terhadap $A_3A_4$ ditinjau dari $A_1$ dan $A_2$.

$p_{14;\,124} = p_{14;144} = p_{14}$, karena $P$ minimal mesti berada pada sisi yang sama $A_1A_4$ ditinjau dari $A_2$ dan $A_3$.

Maka ketaksamaannya menjadi

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 \geq 2p_{12} + 2p_{23} - 2p_{13;134}$$

$$PA_2 + PA_3 + PA_4 \geq 2p_{23} + 2p_{34} + 2p_{24;234}$$

$$PA_1 + PA_3 + PA_4 \geq 2p_{34} + 2p_{14} + 2p_{13;134}$$

$$PA_1 + PA_2 + PA_4 \geq 2p_{14} + 2p_{12} - 2p_{24;234}$$

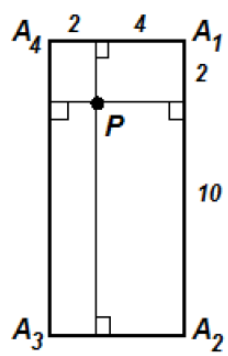
Kalau ke emapat persamaan di atas dijumlahkan, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} 3(PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4) &= 3PA_1 + 3PA_2 + 3PA_3 + 3PA_4 \\ &\geq 4p_{12} + 4p_{23} + 4p_{34} + 4p_{14} \\ &= 4(p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{14}) \end{aligned}$$

Jadi

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 \geq \frac{4}{3}\,(p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{14}) \qquad \heartsuit$$

***Teladan* 1.4.1.** Perhatikan segiempat $A_1A_2A_3A_4$ seperti gambar disebelah. Maka diperoleh $p_{12} = 4$, $p_{23} = 10$, $p_{34} = 2$ dan $p_{14} = 2$.



Gambar 8.4.2

Dan juga

$$PA_1 = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$PA_2 = \sqrt{4^2 + 10^2} = 2\sqrt{29}$$

$$PA_3 = \sqrt{2^2 + 10^2} = 2\sqrt{26}$$

$$PA_4 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

Jadi

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{29} +$$

$$2\sqrt{26} + 2\sqrt{2} \approx 28.27$$

dan

$$p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{14} = 18$$

Maka

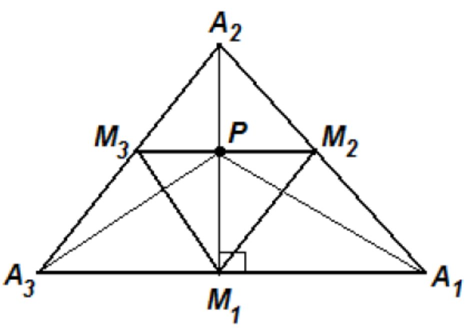
$$PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 \approx 28{,}27 > 26.46 \approx 18\sqrt{2} \approx \sqrt{2}(p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{14})$$

Dan juga sudah pasti

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 28{,}27 > 24 = \frac{4}{3}.18 = \frac{4}{3}(p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{14}) \quad ♥$$

## *Soal-latihan* 11.

16. Pada contoh 8.1.2 di atas, bahas untuk titik $P = (1,1)$.
17. Periksalah apakah yang berlaku tentang ketaksamaan Erdos-Mordel jika titik $P$ berada pada salah satu sisi dari $\Delta ABC$.
18. Periksalah apakah yang berlaku tentang ketaksamaan Erdos-Mordel jika titik $P$ berada pada salah satu titik sudut dari $\Delta ABC$
19. Bilakah tanda kesamaan pada teoema 8.2.2 berlaku dan buktikan dugaan anda
20. Bilakah tanda kesamaan pada teorema 8.3.1 beralaku dan buktikan dugaan anda.
21. Periksalah apa yang terjadi jika pada teorema 8.3.1 $PA_1 = PA_2 = PA_3$.
22. Pada gambar disebelah, $\Delta A_1A_2A_3$ adalah segitiga sama-sisi dengan panjang sisi 12 cm. $M_1$ titik tengah dari $A_1A_3$, $M_2$ titik tengah dari $A_1A_2$ dan $M_3$ titik tengah dari $A_2A_3$. Dengan $M_3M_2 \,//\, A_3A_1$ sedangkan $P$ titik tengah dari $M_2M_3$. Periksalah



apakah ketaksamaan Erdos-Mordel

atau berlaku pada segitiga tersebut.

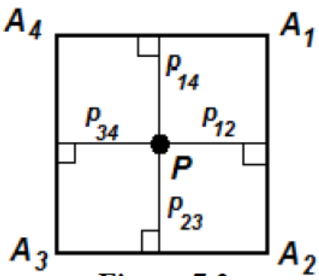
23. Misalkan $\Delta ABC$ dengan panjang sisi adalah $a$, $b$ dan $c$, $P$ adalah titik di dalam $\Delta ABC$, Jika $r$,$s$ dan $t$ adalah jarak dari titik $P$ ke sisi $BC$, $AC$ dan AB. Tunjukkaan berlaku

$$r.PA + s.PB + t.PC \geq 2(rs + st + tr)$$

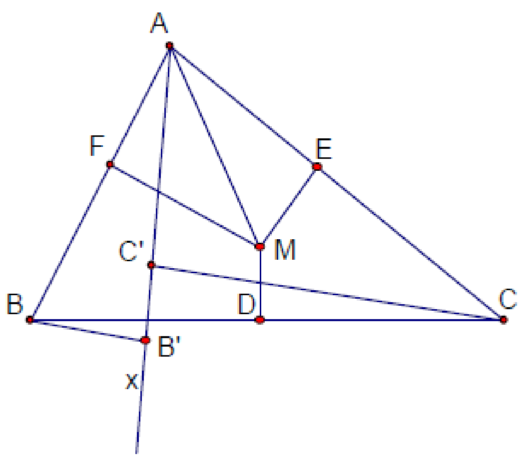
24. Untuk kondisi yang sama dengan soal no 8 di atas, tunjukkan bahwa

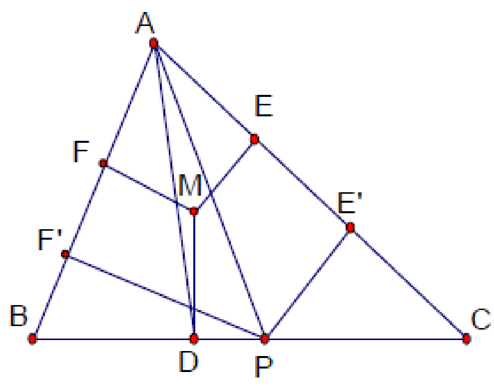
$$PA.PB.PC \geq 8.r.s.t$$

25. Jelaskan dengan bukti, bilakan tanda kesamaan berlaku pada teorema 8.4.1
26. Perhatikan gambar disebelah, periksalah apakah pertaksamaan 8.2.0, teorema 8.3.1 dan teorema 8.4.1 beralaku untuk gambar disebelah.

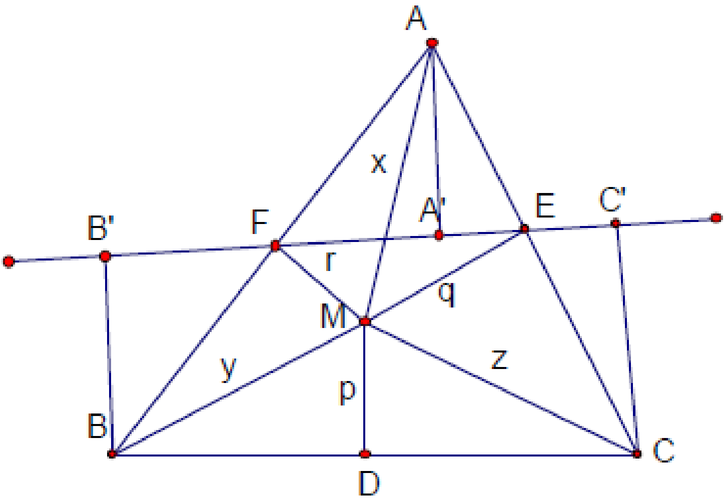



27. Buktikan teoema 8.2.2 untuk kasus yang belum dibuktikan.
28. Dengan menggunakan bantuan gambar di bawah, buktikan lema 8.1.1 yang mana setiap satu gambar untuk satu cara pembuktian



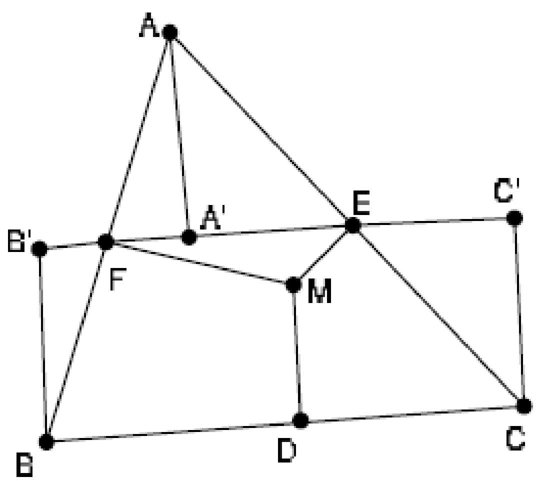

29. Dengan bantuan aturan sinus,buktikan lagi lema 8.1.1 dengan bantuan gambar di bawah ini




30. Misalkan $\Delta ABC$ dengan panjang sisi adalah $a$, $b$ dan $c$, $P$ adalah titik di dalam $\Delta ABC$, tunjukkan bahwa berlaku $a.PA + b.PB + c.PC \geq 4L\Delta ABC.$

    $PA_1.PA_2.PA_3 \geq (p_2 + p_3)(p_1 + p_3)(p_1 + p_2).$

31. Dengan menggunakan aturan sinus dan gambar di bawah ini, buktikanlah ketaksamaan Erdos-Mordel




Pentunjuk : gunakan

$$B'C' = c.\cos AFA' + b.\cos AEA' = c.\sin MFA' + b.\sin MEA'$$

dan

$$\frac{\sin MFA'}{p_2} = \frac{\sin MEA'}{p_3} = \frac{\sin A}{EF} = \frac{1}{x_1}$$

32. Misalkan P sebarang titik di dalam segitiga *ABC* sehingga *PD*, *PE* dan *PF* masing-masing tegak lurus dengan sisi *BC*, *CA* dan *AB*, Jika panjang sisi *BC*, *CA* dan *AB* masing-masing dinotasikan dengan *a*, *b* dan *c*. Buktikan bahwa :

$$\frac{PB.PC}{bc} + \frac{PA.PC}{ac} + \frac{PA.PB}{ab} \geq 1$$

33. **). Misalkan P sebarang titik di dalam $\Delta ABC$ sehingga *PD*, *PE* dan *PF* masing-masing tegak lurus dengan sisi *BC*, *CA* dan *AB*, Jika panjang sisi *BC*, *CA* dan *AB* masing-masing dinotasikan dengan *a*, *b* dan *c*. bila *x*, y dan *z* adalah sebarang bilangan real yang memenuhi

   $xy + yz + xz \geq 0$

   Tunjukkan bahwa :

$$(y+z)\frac{PA}{a} + (z+x)\frac{PB}{b} + (x+y)\frac{PC}{c} \geq 2\sqrt{xy + yz + zx}$$

34. *). Jika titik *P* sebarang titik di dalam $\Delta ABC$ dengan panjang sisi *a*, *b* dan *c*. Buktikan bahwa berlaku :

$$\frac{PA}{a} + \frac{PB}{b} + \frac{PC}{c} \geq \sqrt{3}$$

35. *). Misalkan L menyatakan luas $\Delta ABC$, dan *P* sebarang titik di dalam $\Delta AB$C, buktikan bahwa berlaku

   $a.\ PA + b.PB + c.PC \geq 4\ L$

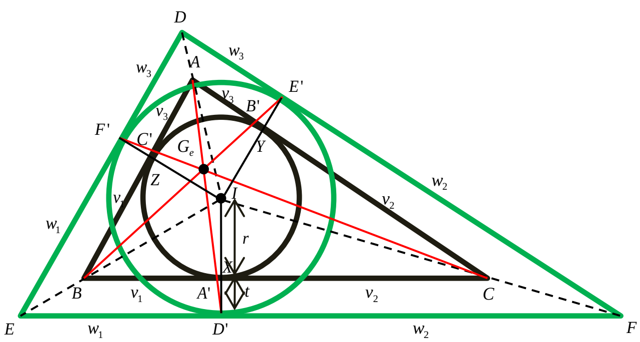
36. **). Misalkan *P* sebarang titik dalam $\Delta ABC$ dan *r* menyatakan jari-jari lingkaran dalam, tunukkan bahwa berlaku :

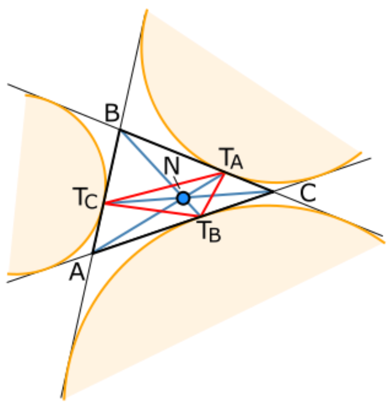
   $PA + PB + PC \geq 6\ r.$

# BAB 9

# Titik Gergonne dan Titik Nagel

Pengembangan berbagai teorema dalam segitiga khususnya untuk titik Gergonne dan titik Nagel, tidak banyak dipergunakan dalam kehidupan sehari-hari. Akan tetapi ini lebih banyak digunakan untuk pengembangan geometri itu sendiri. Begitu juga dengan berbagai perbandingan luas di lahirkan dari pengkontruksian titik Gergonne dan titik Nagel. Teorema dengan berbagai alternatif lebih ditujukan untuk pengembangan daya analisis dari Mahasiswa/i. Begitu juga dengan proses pembuktian berbagai panjang sisi yang dilahirkan dari pengkontruksian yang dibuat.



# BAB 9

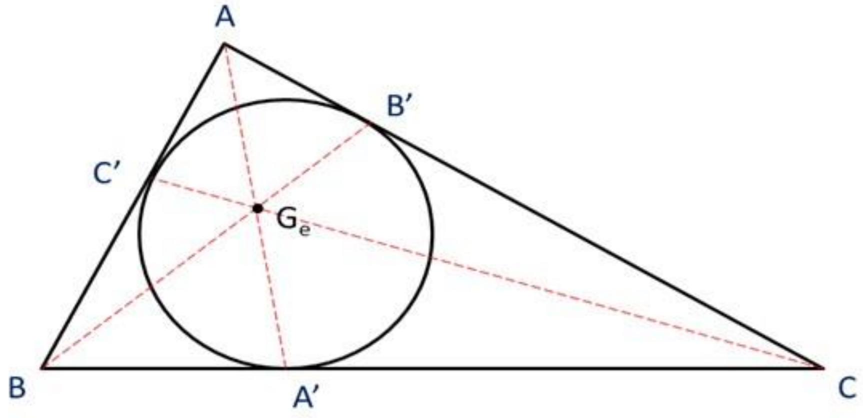
# TITIK Gergonne dan Titik Nagel

**9.1 Titik Gergonne Pada Suatu Segitiga**

Titik Gergonne pada segitiga adalah titik yang terbentuk dari tiga garis yang dihubungkan dari ketiga sudut segitiga ke titik singgung antara lingkaran dalam dan sisi segitiga. Pada sebarang segitiga, dapat dibentuk titik pusat lingkaran dalam segitiga yang merupakan titik perpotongan bisektor dari ketiga sudut segitiga (*incenter*), selanjutnya dapat dibentuk lingkaran dalam (*incircle*) yang menyinggung ketiga sisi segitiga sehingga akan terdapat tiga titik singgung. Apabila dibentuk garis dari ketiga sudut segitiga terhadap titik singgung dihadapannya, maka ketiga garis tersebut akan berpotongan pada satu titik (*concurent*) disebut titik Gergonne**.** Jadi, titik Gergonne (*Gergonne point*) adalah titik yang berasal dari perpotongan garis dari sudut puncak segitiga terhadap sisi singgung lingkaran dalam. untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 9.1.1.

Pada Gambar 9.1.1, $\Delta ABC$ memuat lingkaran dalam yang terbentuk dari titik *incenter* dan terdapat titik singgung lingkaran terhadap sisi segitiga, sehingga dapat dibentuk garis ketiga sudut segitiga terhadap titik singgung di hadapannya yaitu, dari titik

$A$ terhadap titik $A'$ pada sisi $BC$, dari titik $B$ terhadap titik $B'$ pada sisi $AC$ dan dari $C$ terhadap titik $C'$ pada sisi $AB$. Ketiga segmen garis $AA'$, $BB'$, dan $CC'$ tersebut berpotongan di satu titik [4]. Adapun teorema yang menjelaskan tentang titik Gergonne adalah berikut ini.




Gambar 9.1.1.

**Teorema 9.1.1 (Teorema Gergonne)** Di dalam segitiga, garis yang dibentuk dari titik-titik puncak $\Delta ABC$ yang dihubungkan dengan titik singgung lingkaran dalam pada sisi di hadapannya adalah konkuren.

**Bukti:** Konkurensi titik Gergonne dalam segitiga dibuktikan dengan menggunakan empat cara yaitu menggunakan garis singgung lingkaran, semiperimeter segitiga, segitiga kongruen, dan lingkaran kosentrik. Berikut ini dibahas berbagai cara membuktikan konkurensi titik Gergonne sebagai berikut:

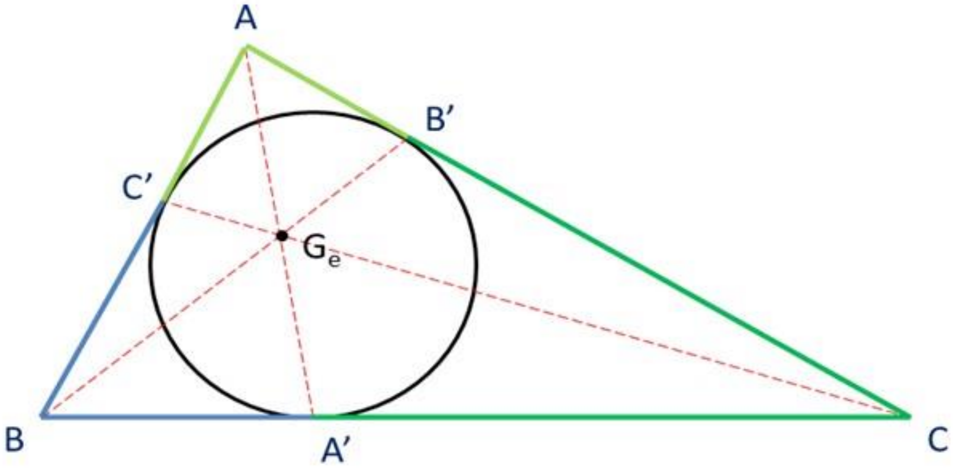
**Cara 1.** Dengan menggunakan garis singgung pada lingkaran.

Perhatikan Gambar 9.1.2, akan dibuktikan $AA', BB'$, dan $CC'$ konkuren di titik Gergonne. Dengan menggunakan sifat garis singgung dapat ditentukan beberapa garis singgung pada lingkaran dalam $\Delta ABC$ yang memiliki panjang yang sama yaitu:

$$B'A = AC' \tag{9.1.1}$$

$$BA' = C'B \tag{9.1.2}$$

$$A'C = CB' \tag{9.1.3}$$




Gambar 9.1.2.

Dengan mengalikan persamaan (9.1.1), (9.1.2), dan (9.1.3) diperoleh

$$B'A \cdot BA' \cdot A'C = AC' \cdot C'B \cdot CB'$$

Kemudian dengan menggunakan Teorema 5.1.1, persamaan tersebut menjadi

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{B'A} \cdot \frac{BA'}{C'B} \cdot \frac{CB'}{A'C}$$

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1. \qquad (9.1.4)$$

Karena persamaan (9.1.4) memenuhi teorema Ceva, maka terbukti titik Gergonne dari $\Delta ABC$ adalah konkuren. ■

**Cara 2.** Dengan menggunakan semiperimeter pada $\Delta ABC$.

Perhatikan Gambar 9.1.3, akan dibuktikan $AA'$, $BB'$, dan $CC'$ konkuren di titik Gergonne, dengan menggunakan semiperimeter pada $\Delta ABC$.

Misalkan $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, dan $BA' = x$.

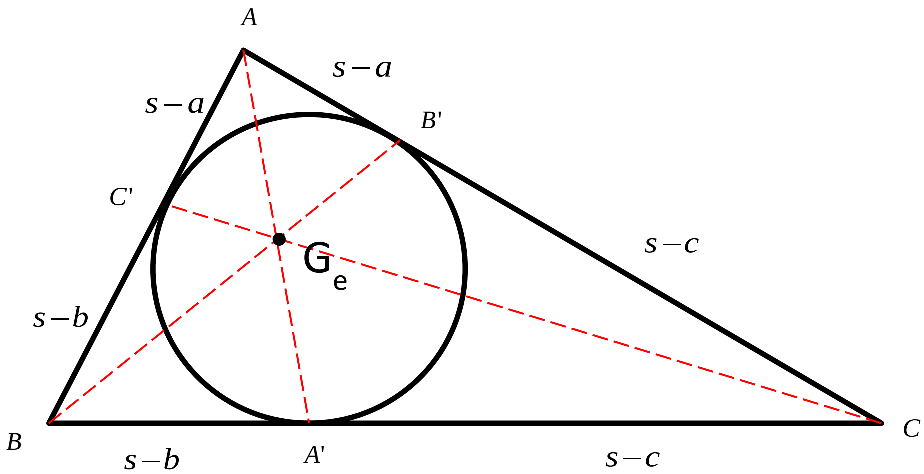
Pada $\Delta ABC$ terdapat garis-garis singgung pada lingkaran yaitu

$$BA' = C'B = x \qquad (9.1.5)$$

$$CA' = CB' = a - x \qquad (9.1.6)$$

dan

$$AC' = AB' = c - x \tag{9.1.7}$$




Gambar 9.1.3

karena keliling $\Delta ABC$ adalah

$$BA' + A'C + CB' + B'A + AC' + C'B = AB + AC + BC$$

maka subsitusikan persamaan (9.1.5), (9.1.6), dan (9.1.7) ke persamaan (9.1.8) sehingga diperoleh

$$x + (a - x) + (a - x) + (c - x) + (c - x) + x = c + a + b$$

$$2a + 2c - 2x = a + b + c$$

$$2x = 2a + 2c - a - b - c$$

$$x = \frac{1}{2}(a + c - b)$$

$$x = \frac{1}{2}(a + c - b) - b + b$$

$$x = s - b$$

sehingga

$$BA' = s - b \tag{9.1.9}$$

dengan cara yang sama memperoleh persamaan (9.1.9), maka

$$AB' = s - a \tag{9.1.10}$$

$$CB' = s - c \tag{9.1.11}$$

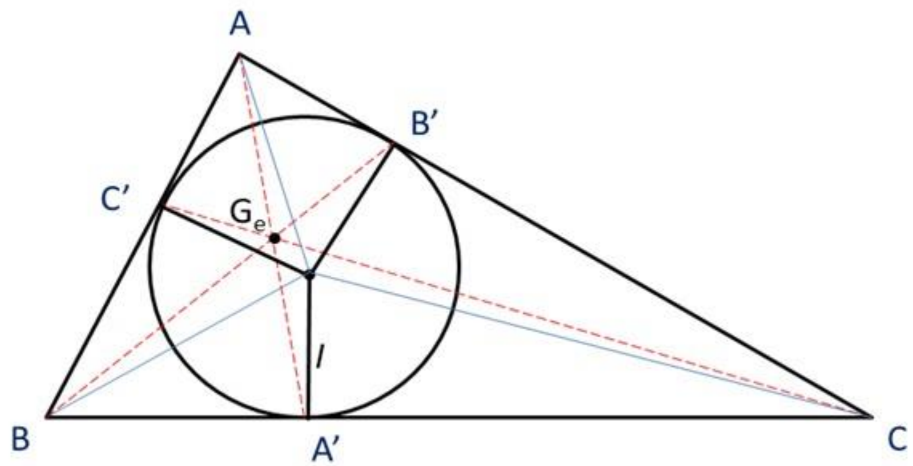
Dengen menggunakan Teorema 5.1.1 dan dari persamaan (9.1.9), (9.1.10), dan (9.1.11) sehingga diperoleh

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{s-a}{s-b} \cdot \frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-c}{s-a}$$

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1. \tag{9.1.12}$$

Karena persamaan (9.1.12) memenuhi teorema Ceva (Teorema 5.1.1), maka terbukti $AA', BB'$, dan $CC'$ konkuren di titik Gergonne. ■

**Cara 3.** Menggunakan segitiga kongruen.




Gambar 9.1.4.

Akan ditunjukkan $AA', BB'$ dan $CC'$ konkuren di titik Gergonne. Perhatikan Gambar 9.1.4, dengan $I$ merupakan *incenter* $\triangle ABC$, bentuk jari-jari lingkaran dari titik $I$ terhadap titik singgung. Kemudian perhatikan $\triangle IBA'$ dan $\triangle IBC'$, misalkan $\angle A'BC' = \theta$. Karena $IB$ bisektor sudut, maka

$$\angle IBA' \cong \angle IBC' = \frac{\theta}{2}$$

Selanjutnya karena $IA'$ merupakan jari-jari, sehingga diperoleh

$$\angle BIA' \cong \angle BIC' = 90 - \frac{\theta}{2}$$

maka pada $\Delta IBA'$ dan $\Delta IBC'$ diperoleh

| | | |
|---|---|---|
| $\angle IBA' \cong \angle IBC'$ | (sd) | (bisektor sudut) |
| $IB = IB$ | (s) | (garis yang sama) |
| $\angle BIA' \cong \angle BIC'$ | (sd) | (diketahui) |

Berdasarkan korespodensi (sd-s-sd) pada Postulat 15, dinyatakan bahwa

$$\Delta IBA' \cong \Delta IBC'$$

sehingga diperoleh

$$BA' = C'B \tag{9.1.13}$$

dengan cara yang sama pada $\Delta ICA', \Delta ICB', \Delta IAB'$, dan $\Delta IAC'$ maka diperoleh

$$\Delta ICA' \cong \Delta ICB'$$

$$\Delta IAB' \cong \Delta IAC'$$

sehingga

$$A'C = CB' \tag{9.1.14}$$

$$B'A = AC' \tag{9.1.15}$$

dengan menggunakan teorema Ceva, persamaan (9.1.13), (9.1.14), dan (9.1.15) menjadi

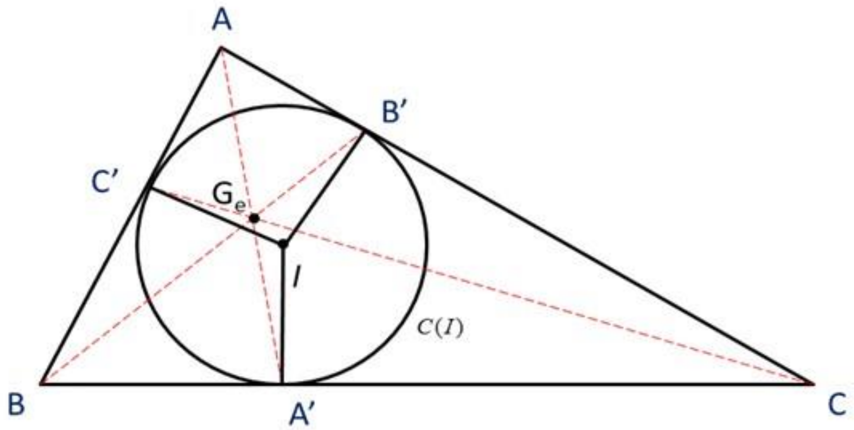
$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{BA'}{C'B} \cdot \frac{A'C}{CB'} \cdot \frac{B'A}{AC'}$$

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1 \tag{9.1.16}$$

karena persamaan (9.1.16) memenuhi teorema 5.1.1, maka terbukti titik Gergonne dari $\Delta ABC$ adalah konkuren. ■

**Cara 4.** Menggunakan lingkaran kosentrik.

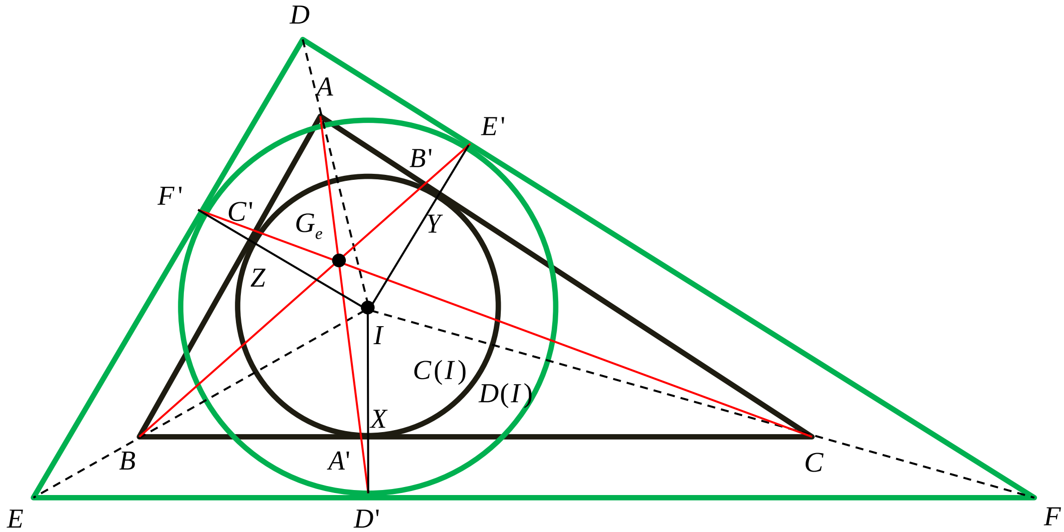
Lingkaran kosentrik adalah lingkaran yang memiliki pusat yang sama. Untuk menunjukkan konkurensi titik Gergonne dengan menggunakan lingkaran kosentrik, dapat ditunjukkan dengan mengkontruksi lingkaran kosentrik dari lingkaran dalam segitiga dengan *incenter* sebagai titik pusat kedua lingkaran tersebut, sehingga dapat dibentuk segitiga yang sebangun terhadap segitiga asalnya. Kemudian dengan mengkontruksi lingkaran dan segitiga tersebut dapat ditentukan panjang sisi segitiga untuk menunjukan konkurensi titik Gergonne.




Gambar 9.1.5

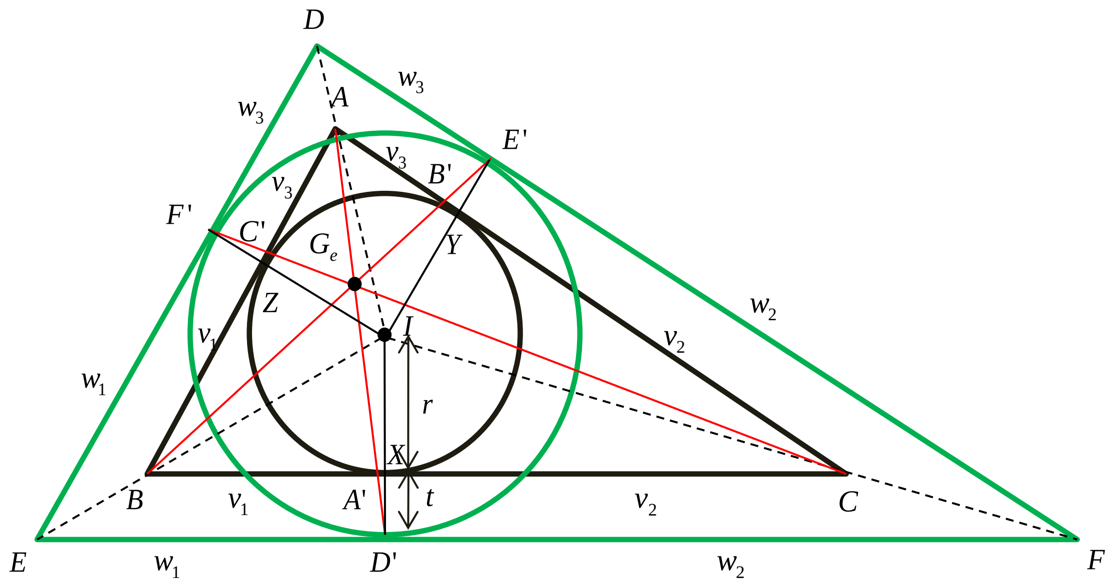
Perhatikan Gambar 9.1.5, dengan menggunakan lingkaran kosentrik akan ditunjukkan $AA', BB'$, dan $CC'$ konkuren di titik Gergonne. Langkah awal pembuktiannya adalah bentuk lingkaran $C(I)$ yang merupakan lingkaran dalam $\Delta ABC$ yang berpusat di *I*. Selanjutnya perpanjang garis dari titik *incenter* memotong sisi segitiga di titik *X*, *Y*, dan *Z* dan titik Gergonne memotong sisi segitiga di titik *A', B'*, dan *C'*, sehingga kedua garis tersebut berpotongan di titik *D', E'*, dan *F*.

Selanjutnya, dengan menghubungkan ketiga titik potong tersebut terbentuklah sebuah lingkaran, sebut lingkaran $D(I)$. $D(I)$ merupakan lingkaran kosentrik dari lingkaran $C(I)$. Dari lingkaran $D(I)$ dapat dibentuk segitiga baru yaitu dengan membentuk garis dari ke tiga titik perpotongan $D'$, $E'$, dan $F'$ sehingga membentuk $\Delta DEF$ . Seperti pada Gambar 9.1.6 berikut**.**



Gambar 9.1.6

Selanjutnya perhatikan Gambar 9.1.7 berikut.



Gambar 9.1.7

Perhatikan $\Delta ABC$ dan $\Delta DEF$ , misalkan panjang $BX = v_1$, $XC = v_2$, $YA = v_3$ dan misalkan panjang $ED' = w_1$, $D'F = w_2$, $E'D = w_3$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, perhatikan $\Delta IEF'$ dan $\Delta IBZ$ diperoleh

$$\angle IZB \cong \angle IF'E \qquad \text{(sd) (siku-siku)}$$

$$\angle EIF' \cong \angle BIF' \qquad \text{(sd) (siku-siku)}$$

berdasarkan *corollary* kesebangunan sd-sd diperoleh,

$$\Delta IEF' \sim \Delta IBZ'$$

sehingga

$$\angle IBA \cong \angle IED.$$

Selanjutnya pada $\Delta ABC$ dan $\Delta DEF$, berdasarkan bisektor sudut garis $EI$ dan $BI$ maka $\angle ABI \cong \angle CBI \cong \angle DEI \cong \angle FEI$ sehingga,

$$\angle ABC \cong \angle DEF$$

dengan cara yang sama pada $\Delta ABC$ dan $\Delta DEF$ diperoleh

$$\angle ACB \cong \angle DFE \text{ (sd)}$$

$$\angle BAC \cong \angle EDF \text{ (sd)}$$

berdasarkan *corollary* kesebangunan sd.sd diperoleh $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Perhatikan Gambar 9.1.8, untuk menentukan panjang $BA'$ akan digunakan perbandingan panjang sisi $\Delta BAA'$ dan $\Delta PAD'$ yaitu panjang sisi $BA'$ dan $PD'$, maka dari itu terlebih dahulu akan ditunjukkan panjang $PD'$ dan $BP$. Misalkan $D'X = t$ maka $D'I = r + t$ sehingga perbandingan panjang jari-jarinya adalah $(r+t):r$ dan diperoleh

$$\frac{r+t}{r} = \frac{w_1}{BX}$$

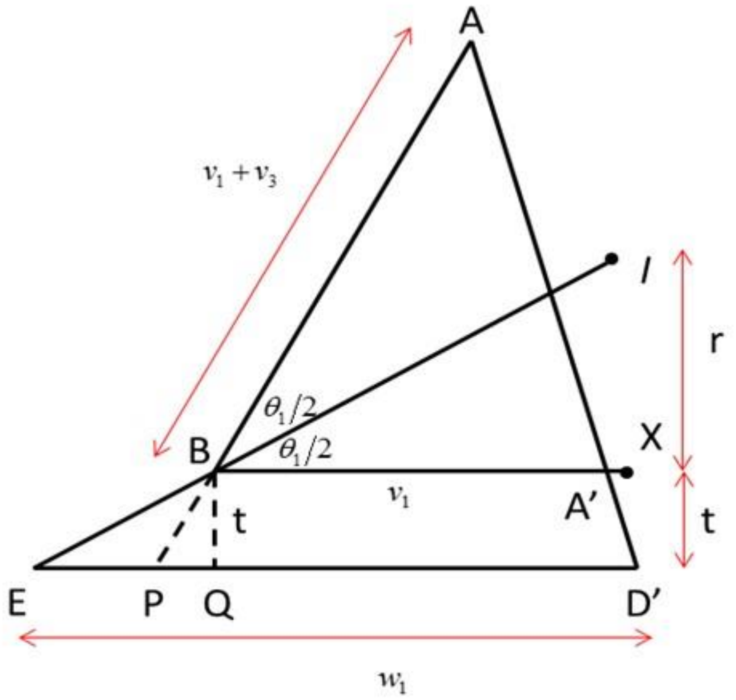
$$w_1 = \left(\frac{r+t}{r}\right)BX \tag{9.1.17}$$

Subsitusikan $BX = v_1$ ke persamaan (9.1.17), sehingga

$$w_1 = \left(\frac{r+t}{r}\right)v_1. \tag{9.1.18}$$

Akan ditunjukkan panjang $EP$ melalui $\Delta BEQ$, misalkan

$$\angle ABA' = \theta_1 \tag{9.1.19}$$




Gambar 9.1.8.

karena $BX \,//\, PD'$, maka diperoleh

$$\angle ABA' \cong \angle BPQ = \theta_1 \quad (9.1.20)$$

Perhatikan $\Delta BPQ$ pada Gambar 9.5.2, dengan menggunakan perbandingan trigonometri diperoleh

$$\frac{BP}{sin90^{\circ}} = \frac{t}{sin\theta_1}$$

$$BP = \frac{t}{sin\theta_1}$$

$$BP = t\ cosec\ \theta_1$$

karena $PD' = w_1 - BP$ maka diperoleh

$$PD' = w_1 - t(cosec\ \theta_1) \quad (9.1.21)$$

kemudian, karena panjang $EP = BP$ maka

$$EP = t(cosec\ \theta_1)$$

untuk mempermudah proses penghitungan misalkan

$m_1 = (cosec\ \theta_1)$

maka persamaan (9.1.21) menjadi

$$PD' = w_1 - t\,m_1 \tag{9.1.22}$$

dan

$$BP = t\,m_1$$

Selanjutnya dari persamaan (9.1.19) dan (9.1.20) diperoleh

$$\angle ABA' \cong \angle APD' \quad \text{(sd)}$$

Perhatikan $\Delta PAD'$ dan $\Delta BAA'$ diperoleh

$$\angle BAA' \cong \angle PAD' \quad \text{(sd) (sudut yang sama)}$$

Berdasarkan *corollary* kesebangunan sd.sd maka $\Delta PAD' \sim \Delta BAA'$, sehingga diperoleh

$$\frac{PD'}{BA'} = \frac{v_1 + v_3 + t\,m_1}{v_1 + v_3}$$

$$PD'(v_1 + v_3) = BA'(v_1 + v_2 + t\,m_1)$$

$$BA' = \frac{(v_1 + v_3)PD'}{v_1 + v_3 + t\,m_1} \tag{9.1.23}$$

Subsitusikan persamaan (9.1.22) ke persamaan (9.1.23) sehingga

$$BA' = \frac{(v_1 + v_3)w_1 - t\,m_1}{v_1 + v_3 + t\,m_1} \tag{9.1.24}$$

Kemudian subsitusikan persamaan (9.1.18) ke persamaan (9.1.24) maka

$$BA' = \frac{(v_1 + v_3)\left[((r+t)/r)v_1 - t\,m_1\right]}{v_1 + v_3 + t\,m_1} \tag{9.1.25}$$

dengan cara yang sama memperoleh $BA'$, maka diperoleh

$$CA' = \frac{(v_2 + v_3)\left[((r+t)/r)v_2 - t\,m_2\right]}{v_2 + v_3 + t\,m_2}$$

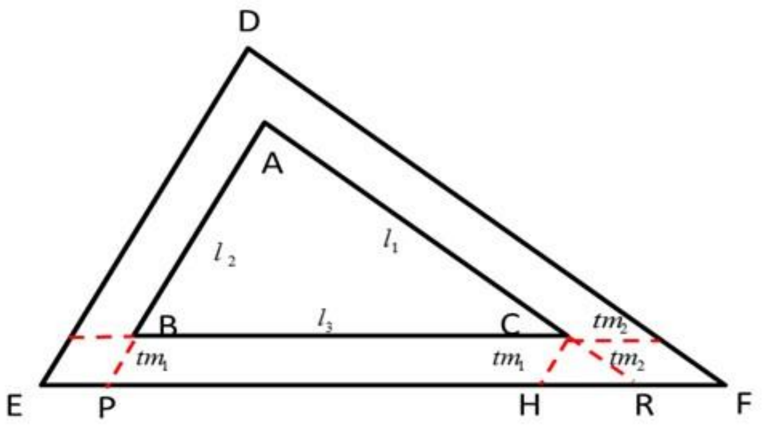
$$CB' = \frac{(v_1 + v_2)\left[((r+t)/r)v_2 - t\,m_2\right]}{v_1 + v_2 + t\,m_2}$$

$$AB' = \frac{(v_1 + v_3)\,[((r+t)/r)v_3 - t\,m_3]}{v_1 + v_3 + t\,m_3}$$

$$AC' = \frac{(v_2 + v_3)\,[((r+t)/r)v_3 - t\,m_3]}{v_2 + v_3 + t\,m_3} \qquad (9.1.26)$$

$$BC' = \frac{(v_1 + v_2)\,[((r+t)/r)v_1 - t\,m_1]}{v_1 + v_2 + t\,m_1}$$

Perhatikan segitiga yang sebangun berikut




Gambar 9.1.9

Pada Gambar 9.1.9, $\Delta ABC$ dan $\Delta DEF$ adalah segitiga yang sebangun. Kemudian untuk mempermudah proses perhitungan dibentuk segitiga lainnya yaitu dengan memperpanjang garis $AC$ hingga memotong sisi $EF$ di titik $R$ dan bentuk pula garis dari titik $C$ terhadap sisi $EF$ memotong di titik $H$ sehingga terbentuk $\Delta CHR$. Akan ditunjukkan $\Delta ABC \sim \Delta CHR$. Perhatikan $\Delta ABC$ dan $\Delta CHR$, karena $AB // CH$ dan $BC // EF$ diperoleh

$\angle BAC \cong \angle HCR$ (sd)

$\angle BCA \cong \angle HRC$ (sd)

berdasarkan *corollary* kesebangunan sd.sd maka $\Delta ABC \sim \Delta CHR$.

Kemudian perhatikan $\Delta ABC$, karena $\Delta ABC \sim \Delta CHR$ apabila dimisalkan $AC = l_1$, $AB = l_2$, dan $BC = l_3$ maka diperoleh

$$\frac{l_2}{tm_1} = \frac{l_1}{tm_2} \tag{9.1.27}$$

persamaan (9.1.27) dapat dinyatakan menjadi

$$tl_1m_1 = tl_2m_2 = k.$$

Pada Gambar 9.1.9 diketahui bahwa

$$l_1 = v_2 + v_3$$
$$l_2 = v_1 + v_3$$
$$l_3 = v_1 + v_2$$

subsitusikan $l_1$ ke persamaan (9.1.25), diperoleh

$$BA' = \frac{l_2\left[\left(\left(r+t\right)/r\right)v_1 - tm_1\right]}{l_2 + tm_1} \cdot \frac{l_1}{l_1}$$

$$BA' = \frac{l_2l_1\left[\left(\left(r+t\right)/r\right)v_1 - l_1tm_1\right]}{l_1l_2 + l_1tm_1}$$

$$BA' = \frac{l_2\left[l_1\left(\left(r+t\right)/r\right)v_1 - l_1tm_1\right]}{l_1l_2 + l_1tm_1}$$

$$BA' = \frac{l_2\left[l_1\left(\left(r+t\right)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1l_2 + k} \tag{9.1.28}$$

dengan cara yang sama memperoleh panjang sisi $BA'$, maka diperoleh

$$A'C = \frac{l_1\left[l_2\left(\left(r+t\right)/r\right)v_2 - k\right]}{l_1l_2 + k} \tag{9.1.29}$$

$$CB' = \frac{l_3\left[l_2\left(\left(r+t\right)/r\right)v_2 - k\right]}{l_2l_3 + k} \tag{9.1.30}$$

$$B'A = \frac{l_2\left[l_3\left(\left(r+t\right)/r\right)v_3 - k\right]}{l_2l_3 + k} \tag{9.1.31}$$

$$AC' = \frac{l_1\left[l_3\left(\left(r+t\right)/r\right)v_3 - k\right]}{l_1l_3 + k} \tag{9.1.32}$$

$$C'B = \frac{l_3\left[l_1\left(\left(r+t\right)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1 l_3 + k} \tag{9.1.33}$$

dengan menggunakan Ceva, maka persamaan (9.1.28), (9.1.29), (9.1.30), (9.1.31), (9.1.32) dan (9.1.33) menjadi

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{\dfrac{l_2\left[l_1\left(\left(r+t\right)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1 l_2 + k}}{\dfrac{l_1\left[l_2\left(\left(r+t\right)/r\right)v_2 - k\right]}{l_1 l_2 + k}} = \frac{l_2\left[l_1\left(\left(r+t\right)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1\left[l_2\left(\left(r+t\right)/r\right)v_2 - k\right]} \tag{9.1.34}$$

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{\dfrac{l_3\left[l_2\left(\left(r+t\right)/r\right)v_2 - k\right]}{l_2 l_3 + k}}{\dfrac{l_2\left[l_3\left(\left(r+t\right)/r\right)v_3 - k\right]}{l_2 l_3 + k}} = \frac{l_3\left[l_2\left(\left(r+t\right)/r\right)v_2 - k\right]}{l_2\left[l_3\left(\left(r+t\right)/r\right)v_3 - k\right]} \tag{9.1.35}$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{\dfrac{l_1\left[l_3\left(\left(r+t\right)/r\right)v_3 - k\right]}{l_1 l_3 + k}}{\dfrac{l_3\left[l_1\left(\left(r+t\right)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1 l_3 + k}} = \frac{l_1\left[l_3\left(\left(r+t\right)/r\right)v_3 - k\right]}{l_3\left[l_1\left(\left(r+t\right)/r\right)v_1 - k\right]} \tag{9.1.36}$$

dengan menggunakan Ceva, maka persamaan (9.1.34), (9.1.35), dan (9.1.36) menjadi

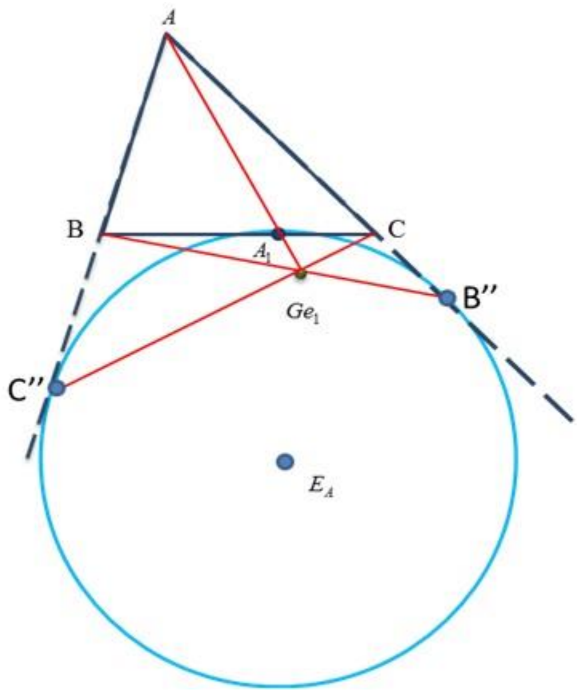
$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1. \tag{9.1.37}$$

Karena persamaan (9.1.37) memenuhi teorema Ceva, maka terbukti titik Gergonne dari $\Delta ABC$ adalah konkuren. ■

Pada bagian ini dijelaskan tentang konkurensi titik Gergonne yang berada di luar segitiga. Pada sebarang segitiga yang memuat titik *excenter*, dapat dibentuk suatu lingkaran singgung luar segitiga, sehingga terdapat tiga titik singgung lingkaran terhadap segitiga, apabila dibentuk garis dari sudut segitiga terhadap titik singgung akan berpotongan di satu titik konkurensi yaitu titik Gergonne pada luar segitiga.

Berikut ini pada sebarang $\Delta ABC$, jika pada sisi $BC$ dibentuk *excircle* dengan pusat $E_A$ maka terdapat tiga titik singgung yaitu titik $A_1$ pada sisi $BC$, $B''$ pada perpanjangan sisi $AC$ dan $C''$ pada perpanjangan sisi $AB$. Sehingga apabila dibentuk garis dari $\angle A$ terhadap titik $A_1$, $\angle B$ terhadap titik $B''$ dan $\angle C$ terhadap titik $C''$ maka ketiga garis tersebut berpotongan di satu titik $Ge_1$. Seperti Gambar berikut.

Perhatikan Gambar 9.1.10, $\Delta ABC$ dengan $E_A$ adalah titik pusat lingkaran singgung luar segitiga pada sisi $BC$, akan ditunjukkan $CC''$, $BB''$, dan $AA_1$ berpotongan pada satu titik (konkuren) di titik $Ge_1$, dengan menggunakan teorema Ceva pada kasus dua [1]. Misalkan $BC = a$, $AC = b$, dan $AB = c$, dengan menunjukkan bahwa $CB'' = CA_1$,




Gambar 9.1.10.

Misalkan

$$CB'' = n \qquad (9.1.38)$$

Karena $BC = a$, maka diperoleh

$$BA_1 = BC - CA_1$$

$$BA_1 = a - n \qquad (9.1.39)$$

Kemudian dengan menggunakan teorema garis singgung lingkaran pada sisi $BC$ diketahui bahwa

$$B''A = C''A$$

$$AC + CB'' = AB + BC'' \qquad (9.1.40)$$

dengan menggunakan persamaan (9.1.38) dan (9.1.39), maka persamaan (9.1.40) menjadi

$$b + n = c + a - n$$

$$b + 2n = c + a$$

$$2n = c + a - b$$

$$n = \frac{1}{2}(c + a - b)$$

karena

$$B''A = AC + AB''$$

maka

$$B''A = b + \frac{1}{2}(c + a - b)$$

$$B''A = b - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$$

$$B''A = \frac{1}{2}(a + b + c), \tag{9.1.41}$$

Selanjutnya maka persamaan (9.1.41) menjadi

$$AB'' = s \tag{9.1.42}$$

dengan menggunakan cara yang sama memperoleh persamaan (9.1.49), juga diperoleh

$$AC'' = BA' = BC' = CA'' = CB' = s$$

sehingga diperoleh

$$C''B = BA_1 = s - c \tag{9.1.43}$$

$$CB'' = CA_1 = s - b \tag{9.1.44}$$

dengan menggunakan teorema Ceva kasus dua, maka persamaan (9.1.42), (9.1.43), dan (9.1.44) menjadi

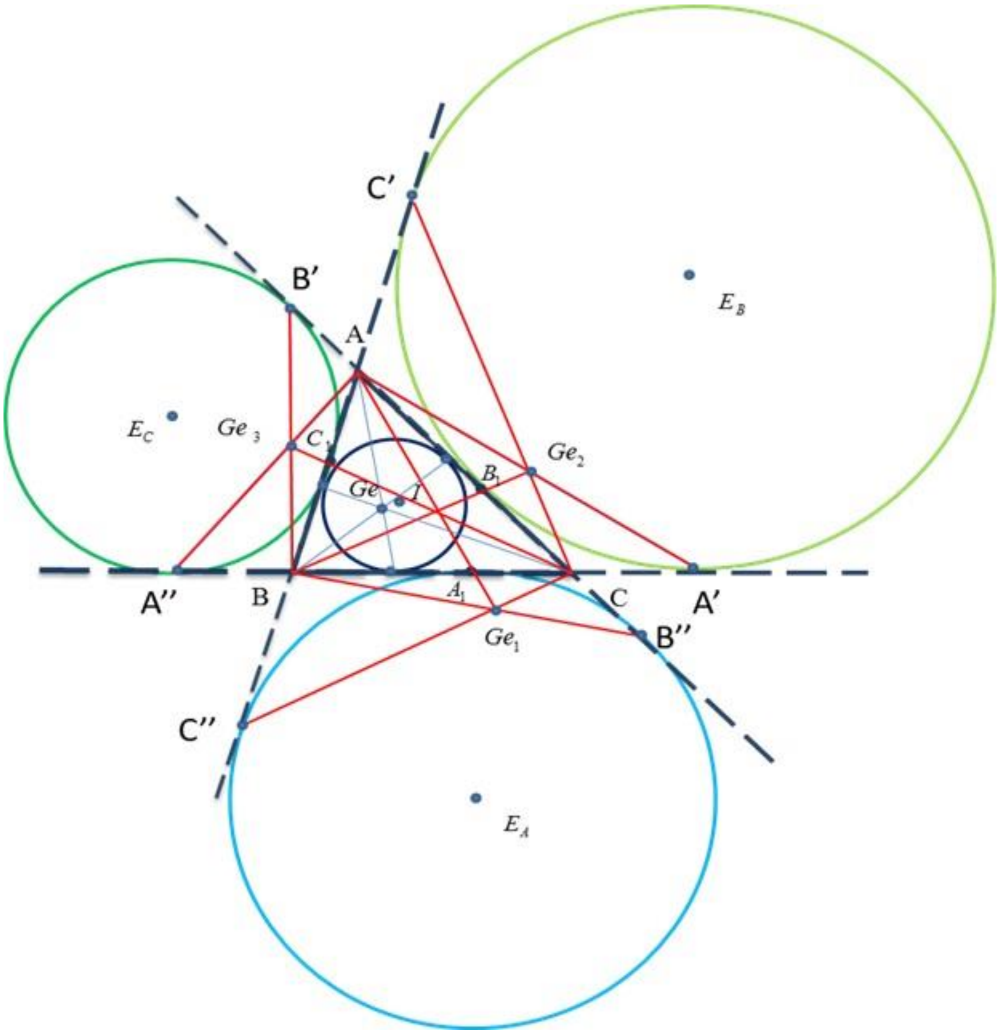
$$\frac{AC''}{C''B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = \frac{AC''}{B''A} \cdot \frac{BA_1}{C''B} \cdot \frac{CB''}{A_1C}$$

$$\frac{AC''}{C''B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = \frac{s}{s} \cdot \frac{s-c}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-b}$$

$$\frac{AC''}{C''B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = 1 \tag{9.1.45}$$

Karena persamaan (9.1.45) memenuhi teorema Ceva kasus dua, yaitu persamaan (2.13), maka terbukti titik $Ge_1$ dari $\Delta ABC$ adalah konkuren. ■

Dengan menggunakan cara yang sama, maka juga akan berlaku terhadap pembuktian konkurensi dari $Ge_2$ dan $Ge_3$ untuk sisi segitiga yang lainnya. Sehingga pada segitiga sebarang terdapat empat titik Gergonne. Satu titik Gergonne yang berada di dalam segitiga dan tiga titik Gergonne lainnya berada di luar segitiga. Perhatikan Gambar 9.1.11.



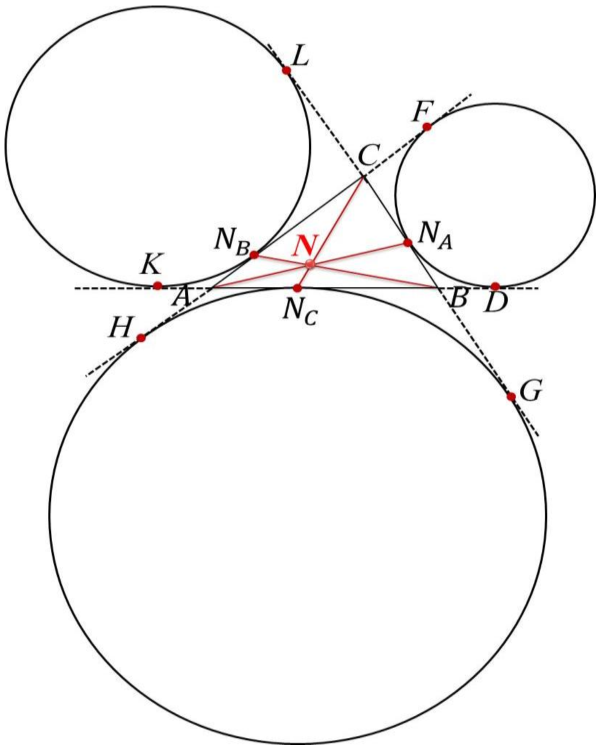

Gambar 9.1.11.

Pada Gambar 9.1.11, $\Delta ABC$ memuat lingkaran dalam segitiga dengan titik pusatnya adalah $I$ dan tiga lingkaran singgung luar segitiga dengan masing-masing titik pusatnya adalah $E_A$, $E_B$, dan $E_C$. Titik $Ge$ merupakan titik Gergonne dalam $\Delta ABC$ , titik $Ge_1$ merupakan titik Gergonne luar segitiga pada lingkaran yang menyinggung sisi $BC$ di titik $A_1$, titik $Ge_2$ merupakan titik Gergonne luar segitiga pada lingkaran yang menyinggung sisi $AC$ di titik $B_1$ dan titik $Ge_3$ merupakan titik Gergonne luar segitiga pada lingkaran yang sisi $AC$ di titik $C_1$.

## 9.2. Titik Nagel dan Segitiga Nagel

Titik Nagel adalah titik konkurensi yang dihasilkan dari menghubungkan ketiga sudut segitiga terhadap masing-masing sisi di hadapannya yang menyinggung lingkaran singgung luar segitiga.

Pada sebarang $\Delta ABC$ memuat tiga lingkaran singgung luar masing-masing menyinggung sisi $BC$ di titik $N_A$, sisi $AC$ di titik $N_B$ dan sisi $AB$ di titik $N_C$. Jika dihubungkan ketiga titik sudut segitiga terhadap titik singgung $N_A$, $N_B$ dan $N_C$, maka ketiga garis $AN_A$, $BN_B$ dan $CN_C$ akan berpotongan di satu titik yaitu titik Nagel *(Nagel point)*. Perhatikan Gambar 9.2.1.




Gambar 9.2.1.

**Teorema 9.2.1 (Teorema Nagel)** Jika ketiga titik sudut segitiga dihubungkan dengan titik singgung lingkaran singgung luar di hadapannya, maka ketiga garis tersebut konkuren di titik Nagel.

**Bukti :** Pada gambar 9.2.1, misalkan titik $N_A$ ,$N_B$, dan $N_C$ merupakan titik-titik singgung lingkaran singgung luar yang menyinggung $BC$, $CA$ dan $AB$ pada $\Delta ABC$. dari hubungan

$$AD = DB + BA$$

$$s = DB + c \qquad \text{atau } DB = s - c$$

dan

$$AF = FC + CA$$

$$s = FC + b$$

$$FC = s - b.$$

Sehingga diperoleh

$$DB = BN_A = s - c, \tag{9.2.1}$$

$$FC = N_AC = s - b. \tag{9.2.2}$$

Dengan cara yang sama untuk garis singgung $CL$ dan $AK$, diperoleh

$$CL = CN_B = s - a, \tag{9.2.3}$$

$$AK = N_BA = s - c, \tag{9.2.4}$$

dan untuk garis singgung $AH$ dan $BG$, juga diperoleh

$$AH = AN_C = s - b, \tag{9.2.5}$$

$$BG = N_CB = s - a, \tag{9.2.6}$$

Dari persamaan (9.2.1), (9.2.2), (9.2.3), (9.2.4), (9.2.5), dan (9.2.6), maka diperoleh perbandingan sisinya

$$\frac{AN_C}{N_CB} = \frac{(s-b)}{(s-a)} \tag{9.2.7}$$

$$\frac{BN_A}{N_AC} = \frac{(s-c)}{(s-b)} \tag{9.2.8}$$

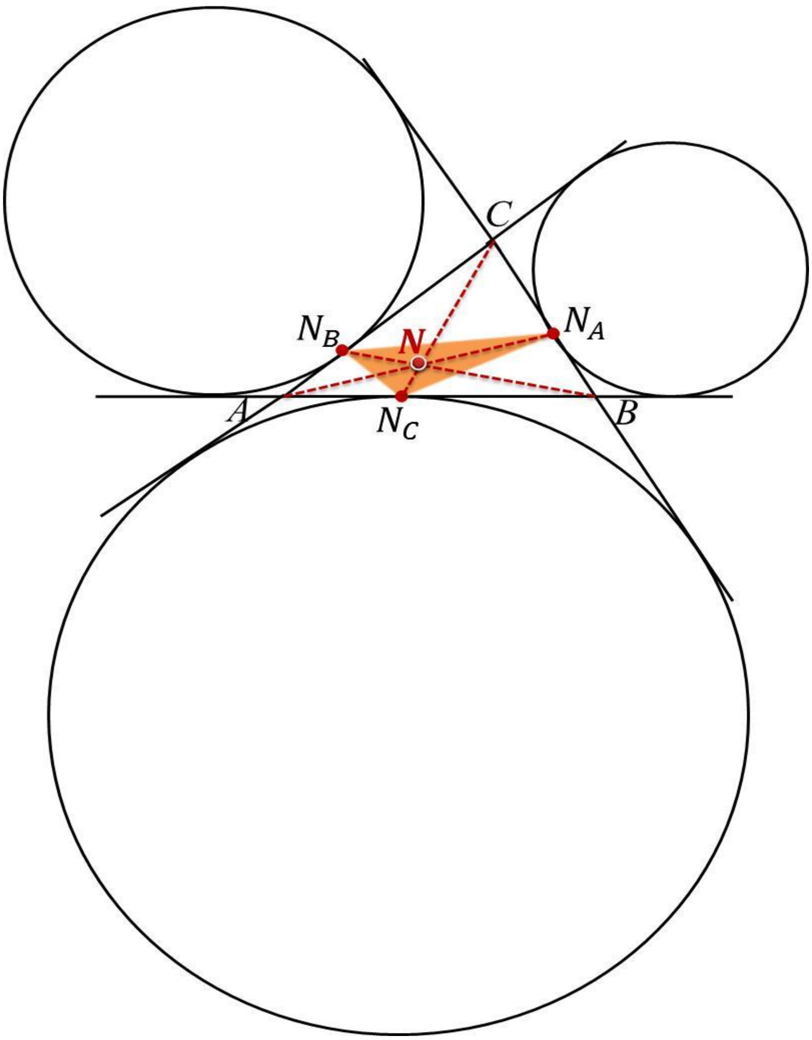
$$\frac{CN_B}{N_BA} = \frac{(s-a)}{(s-c)} \tag{9.2.9}$$

Dengan mengalikan persamaan (9.2.7), (9.2.8), dan (9.2.9), maka diperoleh

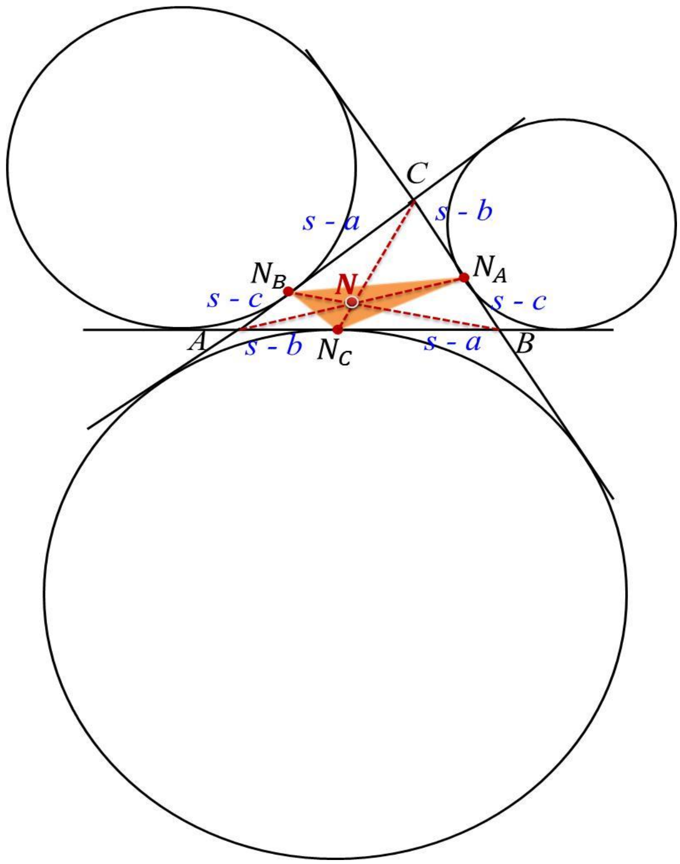
$$\frac{AN_C}{N_CB}\cdot\frac{BN_A}{N_AC}\cdot\frac{CN_B}{N_BA} = \frac{(s-b)}{(s-a)}\cdot\frac{(s-c)}{(s-b)}\cdot\frac{(s-a)}{(s-c)} = 1.$$

Maka ketiga garis $AN_A$, $BN_B$, dan $CN_C$ konkuren di titik Nagel *(N)*. ♥

Jika dibentuk sebuah segitiga dalam dengan menghubungkan titik$N_A$, $N_B$, dan $N_C$ yang menyinggung lingkaran singgung luar pada sisi-sisi $\Delta ABC$ yaitu $\Delta N_AN_BN_C$ atau disebut dengan segitiga Nagel. Persoalan berikutnya adalah menentukan luas segitiga Nagel. Untuk lebih jelasnya Perhatikan Gambar 9.2.2 dan gambar 9.2.3




Gambar 9.2.2




Gambar 9.2.3.

Luas segitiga Nagel sering dihitung menggunakan koordinat barisentrik. Dalam tulisan ini, penulis menentukan luas segitiga Nagel berdasarkan hubungan segitiga asal $\Delta ABC$ yang memuat segitiga Nagel dengan mengurangi $L\Delta ABC$ dengan $L\Delta AN_CN_B$ ,$L\Delta N_CBN_A$, dan $L\Delta N_ACN_B$. Dari persamaan (9.2.1), (9.2.2), (9.2.3), (9.2.4), (9.2.5), dan (9.2.6) masing-masing diperoleh perbandingan sisinya

$$\frac{BN_A}{BC}, \frac{N_AC}{BC}, \frac{CN_B}{AC}, \frac{N_BA}{AC}, \frac{AN_C}{AB}, \text{ dan } \frac{N_CB}{AB}.$$

misalkan

$$x = \frac{BN_A}{BC}, \tag{9.2.10}$$

$$x' = \frac{N_AC}{BC}, \tag{9.2.11}$$

$$y = \frac{CN_B}{AC}, \tag{9.2.12}$$

$$y' = \frac{N_B A}{AC}, \tag{9.2.13}$$

$$z = \frac{AN_C}{AB}, \tag{9.2.14}$$

$$z' = \frac{N_C B}{AB}, \tag{9.2.15}$$

dengan menjumlahkan persamaan (9.2.10) dan (9.2.11), diperoleh

$$x + x' = \frac{BN_A}{BC} + \frac{N_A C}{BC} \tag{9.2.16}$$

kemudian substitusi persamaan (9.2.1) dan (9.2.2) ke persamaan (9.2.16), sehingga diperoleh

$$x + x' = \frac{s-c}{a} + \frac{s-b}{a} \quad = \frac{2s-c-b}{a}$$

$$= \frac{(a+b+c)-c-b}{a}$$

$$x + x' = 1. \tag{9.2.17}$$

Dengan cara yang sama untuk persamaan (9.2.12) dan (9.2.13), kemudian (9.2.14) dan (9.2.15) juga diperoleh

$$y + y' = 1, \tag{9.2.18}$$

dan

$$z + z' = 1. \tag{9.2.19}$$

Dari $\Delta ABC$ berlaku luasnya

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \sin \angle A$$

$$\sin \angle A = \frac{2\ L\Delta ABC}{AB \cdot AC}. \tag{9.2.20}$$

Pada $\Delta AN_CN_B$ juga berlaku

$$L\Delta AN_CN_B = \frac{1}{2} \cdot N_AC \cdot N_BA\ \sin \angle A. \tag{9.2.21}$$

Substitusi persamaan (9.2.20) ke persamaan (9.2.21), menjadi

$$L\Delta AN_CN_B = \frac{N_AC}{AB} \cdot \frac{N_BA}{AC} \cdot L\Delta ABC, \tag{9.2.22}$$

berdasarkan persamaan (9.2.13) dan (9.2.14), persamaan (9.2.22) menjadi

$$L\Delta AN_CN_B = z \cdot y' (L\Delta ABC). \tag{9.2.23}$$

Dengan cara yang sama terhadap sin $\angle B$ dan sin $\angle C$, diperoleh

$$L\Delta N_CBN_A = \frac{N_CB}{AB} \cdot \frac{BN_A}{BC} \cdot L\Delta ABC$$

$$L\Delta N_CBN_A = z' \cdot x \ \ (L\Delta ABC) \tag{9.2.24}$$

dan

$$L\Delta N_BN_AC = \frac{CN_B}{AC} \cdot \frac{N_AC}{BC} \cdot L\Delta ABC$$

$$L\Delta N_BN_AC = y \cdot x' \ \ (L\Delta ABC). \tag{9.2.25}$$

Dari Gambar 9.5.3, $L\Delta N_AN_BN_C$ dapat dinyatakan

$$L\Delta N_AN_BN_C = L\Delta ABC - (L\Delta AN_CN_B + \ L\Delta N_CBN_A + \ L\Delta N_BN_AC). \tag{9.2.26}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (9.2.23), (9.2.24), (9.2.25) ke persamaan (9.2.26) sehingga diperoleh

$$L\Delta N_AN_BN_C = L\Delta ABC - (z \cdot y' (L\Delta ABC) \ +z' \cdot x \ (L\Delta ABC) + y \cdot x' \ (L\Delta ABC)$$

$$L\Delta N_AN_BN_C = L\Delta ABC \ [1 - (z \cdot y') - (z' \cdot x) - (y \cdot x')]$$

$$\frac{L\Delta N_AN_BN_C}{L\Delta ABC} = 1 - (z \cdot y') - (z' \cdot x) - (y \cdot x')$$

$$= 1 - \left(\frac{z}{z+z'} \cdot \frac{y'}{y+y'} + \frac{z'}{z+z'} \cdot \frac{x}{x+x'} + \frac{y}{y+y'} \cdot \frac{x'}{x+x'}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{z\,y'}{(z+z')(y+y')} + \frac{z'x}{(z+z')(x+x')} + \frac{y\,x'}{(y+y')(x+x')}\right)$$

$$\frac{L\Delta N_AN_BN_C}{L\Delta ABC} = \frac{(x+x')(y+y')(z+z')}{(x+x')(y+y')(z+z')}$$

$$- \frac{z\,y'\,x + z\,y'\,x' + z'\,x\,y + z'\,x\,y' + y\,x'\,z + y\,x'\,z'}{(x+x')(y+y')(z+z')}$$

$$\frac{L\Delta N_AN_BN_C}{L\Delta ABC} = \frac{x\,y\,z + x\,y\,z' + x\,y'\,z + xy'\,z' + x'\,y\,z + x'\,y\,z' + x'\,y'\,z + x'\,y'\,z'}{(x+x')(y+y')(z+z')}$$

$$- \frac{z\,y'\,x + z\,y'\,x' + z'\,x\,y + z'\,x\,y' + y\,x'\,z + y\,x'\,z'}{(x+x')(y+y')(z+z')}$$

$$\frac{L\Delta N_AN_BN_C}{L\Delta ABC} = \frac{x\,y\,z + x'\,y'\,z'}{(x+x')(y+y')(z+z')} \tag{9.2.27}$$

Substitusi persamaan (9.2.17), (9.2.18), dan (9.2.19) kepersamaan (9.2.27), diperoleh

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = \frac{x\,y\,z + x'y'z'}{1\cdot 1\cdot 1}$$

atau

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = x\,y\,z + x'y'z', \qquad (9.2.28)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (9.2.10), (9.2.11), (9.2.12), (9.2.13),(9.2.14), dan (9.2.15), ke persamaan (9.2.28) sehingga diperoleh

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = \left(\frac{BN_A}{BC}\cdot\frac{CN_B}{AC}\cdot\frac{AN_C}{AB}\right) + \left(\frac{N_AC}{BC}\cdot\frac{N_BA}{AC}\cdot\frac{N_CB}{AB}\right). \qquad (9.2.29)$$

Kemudian, substitusi persamaan (9.2.1), (9.2.2), (9.2.3), (9.2.4), (9.2.5), dan (9.2.6), diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} &= \left(\frac{s-c}{a}\cdot\frac{s-a}{b}\cdot\frac{s-b}{c}\right) + \left(\frac{s-b}{a}\cdot\frac{s-c}{b}\cdot\frac{s-a}{c}\right)\\ &= \left(\frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\right)\end{aligned}$$

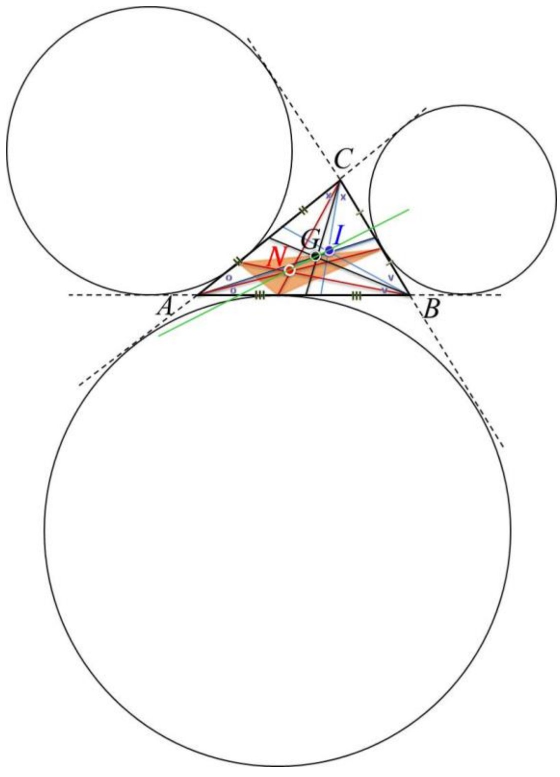
$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = \frac{1}{abc}\,[2\,(s-a)(s-b)(s-c)]$$

$$L\Delta N_A N_B N_C = \frac{2\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{abc}\,L\Delta ABC \qquad (9.2.30)$$

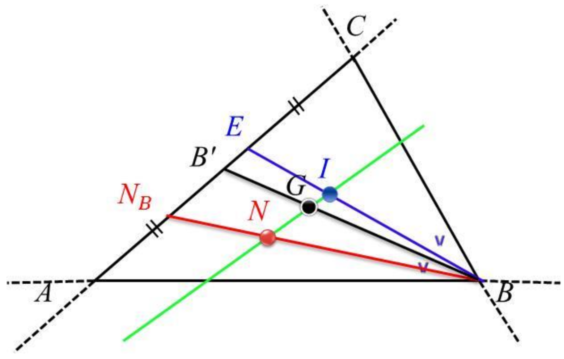
Dari persamaan (9.2.30) dapat dilihat luas segitiga Nagel dengan segitiga asal $\Delta ABC$ berbanding lurus, artinya semakin besar luas segitiga asal maka semakin besar luas segitiga Nagel. Dan luas segitiga Nagel dapat ditentukan berdasarkan luas segitiga asal yang memuat segitiga Nagel.

Selanjutnya, akan dibuktikan titik *centroid*, *incenter* dan Nagel segaris menggunakan teorema Menelaus. Perhatikan Gambar 9.2.4. Pada $\Delta ABC$, jika $BB'$ merupakan cevian dari titik *centroid (G)*, $BE$ merupakan cevian dari titik *incenter (I)*, dan $BN_B$ merupakan cevian dari titik Nagel *(N)*.

Perhatikan Gambar 9.2.5.



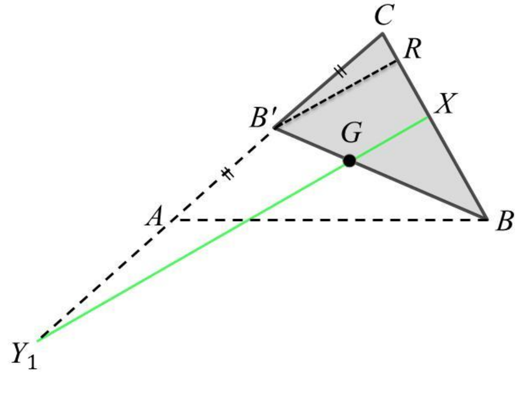

Gambar 9.2.4




Gambar 9.2.5.

Dari gambar 9.2.5, $\Delta ABC$ memuat titik *centroid*, *incenter*, dan Nagel. Untuk membuktikan ketiga titik tersebut segaris, maka

1. Perhatikan $\Delta BB'C$ pada $\Delta ABC$.




Gambar 9.2.6.

Tarik garis dari sisi $BC$ di titik $X$, sehingga berpotongan dengan perpanjangan sisi $CA$ dititik $Y_1$, maka $X$ terletak pada sisi $BC$, $G$ pada sisi $BB'$, dan $Y_1$ pada sisi $CA$. Akan ditunjukkan titik $X$, $G$, dan $Y_1$ adalah segaris.

Misalkan titik $R$ pada $BC$ dan $RB' \,//\, XY_1$, maka pada $\Delta BXG$ dan $\Delta BRB'$, diperoleh

$$\angle XBG = \angle CBB' \qquad \text{(sudut yang sama)}$$

$$\angle BXG = \angle BRB' \qquad (RB' \,//\, XY_1),$$

sehingga $\Delta BXG \sim \Delta BRB'$, mengakibatkan

$$\frac{BG}{BB'} = \frac{BX}{BR}. \qquad (9.2.31)$$

Karena

$$BB' = BG + GB' \qquad (9.2.32)$$

$$GB' = BB' - BG \qquad (9.2.33)$$

dan

$$BR = BX + XR \qquad (9.2.34)$$

$$XR = BR - BX, \qquad (9.2.35)$$

maka berdasarkan persamaan (9.2.32), (9.2.33), (9.2.34), dan (9.2.35), persamaan (9.2.31) menjadi,

$$\frac{BG}{BB' - BG} = \frac{BX}{BR - BX}$$

atau

$$\frac{BG}{GB'} = \frac{BX}{XR} \qquad (9.2.36)$$

Dengan cara yang sama $\Delta B'CR \sim \Delta Y_1CX$, juga diperoleh

$$\frac{B'Y_1}{Y_1C} = \frac{XR}{XC}. \qquad (9.2.37)$$

Dengan mengalikan persamaan (9.2.36) dan (9.2.37), diperoleh

$$\frac{BG}{GB'} \cdot \frac{B'Y_1}{Y_1C} = \frac{BX}{XR} \cdot \frac{XR}{XC}. \qquad (9.2.38)$$

Pada persamaan (9.2.38) dengan mengalikan $\frac{XC}{BX}$ diruas kiri dan kanan, sehingga diperoleh

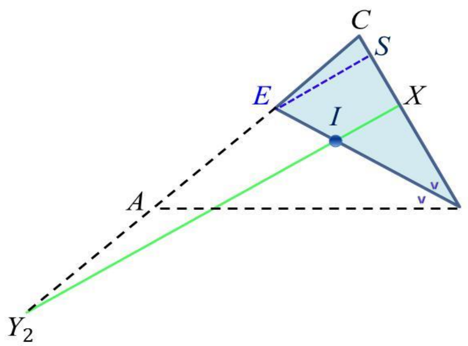
$$\frac{BG}{GB'} \cdot \frac{B'Y_1}{Y_1C} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BX}{XR} \cdot \frac{XR}{XC} \cdot \frac{XC}{BX}$$

$$\frac{BG}{GB'} \cdot \frac{B'Y_1}{Y_1C} \cdot \frac{XC}{BX} = -1. \qquad (9.2.39)$$

Berdasarkan teorema 3.2.1, maka ketiga titik $X$, $G$, dan $Y_1$ segaris.

2. Perhatikan $\Delta BEC$ pada $\Delta ABC$.

Tarik garis dari sisi $BC$ di titik $X$, sehingga berpotongan dengan perpanjangan sisi $CA$ di titik $Y_2$, maka $X$ terletak pada sisi $BC$, $I$ pada sisi $BE$, dan $Y_2$ pada sisi $CA$. Akan ditunjukkan titik $X$, $I$, dan $Y_2$ adalah segaris. Misalkan titik $S$ pada $BC$ dan $SE \,//\, XY_2$, maka pada $\Delta BXI$ dan $\Delta BSE$, diperoleh




Gambar 9.2.7

$$\angle XBI = \angle SBE \text{ dan } \angle BXI = \angle BSE$$

sehingga $\Delta BXI \sim \Delta BSE$, mengakibatkan

$$\frac{BI}{BE} = \frac{BX}{BS}. \qquad (9.2.40)$$

Karena

$$BE = BI + IE \qquad (9.2.41)$$

$$IE = BE - BI \qquad (9.2.42)$$

dan

$$BS = BX + XS \qquad (9.2.43)$$

$$XS = BS - BX, \qquad (9.2.44)$$

maka, berdasarkan persamaan (9.2.41), (9.2.42), (9.2.43), dan (9.2.44), persamaan (9.2.40) menjadi

$$\frac{BI}{BE - BI} = \frac{BX}{BS - BX}$$

atau

$$\frac{BI}{IE} = \frac{BX}{XS}. \tag{9.2.45}$$

Dengan cara yang sama $\Delta ECS \sim \Delta Y_2CX,$ juga diperoleh

$$\frac{EY_2}{Y_2C} = \frac{XS}{XC}. \tag{9.2.46}$$

Dengan mengalikan persamaan (9.2.45) dan (9.2.46) diperoleh

$$\frac{BI}{IE} \cdot \frac{EY_2}{Y_2C} = \frac{BX}{XS} \cdot \frac{XS}{XC}. \tag{9.2.47}$$

Pada persamaan (9.2.47) dengan mengalikan $\frac{XC}{BX}$ diruas kiri dan kanan, sehingga diperoleh

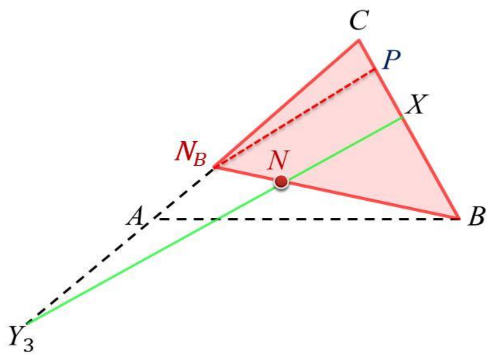
$$\frac{BI}{IE} \cdot \frac{EY_2}{Y_2C} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BX}{XS} \cdot \frac{XS}{XC} \cdot \frac{XC}{BX}$$

$$\frac{BI}{IE} \cdot \frac{EY_2}{Y_2C} \cdot \frac{CX}{XB} = -1. \tag{9.2.48}$$

Berdasarkan teorema 3.2.1, maka ketiga titik $X$, $I$, dan $Y_2$ segaris.

3. Perhatikan $\Delta BN_BC$ pada $\Delta ABC$.

Tarik garis dari sisi $BC$ di titik $X$, sehingga berpotongan dengan perpanjangan sisi $CA$ di titik $Y_3$, maka $X$ terletak pada sisi $BC, N$ pada sisi $BN_B$, dan $Y_3$ pada sisi $CA$. Akan ditunjukkan titik $X$, $I$, dan $Y_3$ adalah segaris.




Gambar 9.2.8.

Misalkan titik $P$ pada $BC$ dan $PN_B \,//\, XY_3$, maka pada $\Delta BXN$ dan $\Delta BPN_B$, diperoleh

$\angle XBN = \angle PBN_B$ (sudut yang sama)

$\angle BXN = \angle BPN_B$ $(PN_B \,//\, XY_3)$,

sehingga $\Delta BXN \sim \Delta BPN_B$, mengakibatkan

$$\frac{BN}{BN_B} = \frac{BX}{BP}. \tag{9.2.49}$$

Karena

$$BN_B = BN + NN_B \tag{9.2.50}$$

$$NN_B = BN_B - BN \tag{9.2.51}$$

dan

$$BP = BX + XP \tag{9.2.52}$$

$$XP = BP - BX. \tag{9.2.53}$$

maka berdasarkan persamaan (9.2.50), (9.2.51), (9.2.52), dan (9.2.53), persamaan (9.2.49) menjadi

$$\frac{BN}{BN_B - BN} = \frac{BX}{BP - BX}$$

atau

$$\frac{BN}{NN_B} = \frac{BX}{XP}. \tag{9.2.54}$$

Dengan cara yang sama $\Delta N_B CP \sim \Delta YCX$, juga diperoleh

$$\frac{N_B Y_3}{Y_3 C} = \frac{XP}{XC}. \tag{9.2.55}$$

Dengan mengalikan persamaan (9.2.54) dan (9.2.55) diperoleh

$$\frac{BN}{NN_B} \cdot \frac{N_B Y_3}{Y_3 C} = \frac{BX}{XP} \cdot \frac{XP}{XC}. \tag{9.2.56}$$

Pada persamaan (9.2.56) dengan mengalikan $\frac{XC}{BX}$ diruas kiri dan kanan, sehingga diperoleh

$$\frac{BN}{NN_B} \cdot \frac{N_B Y_3}{Y_3 C} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BX}{XP} \cdot \frac{XP}{XC} \cdot \frac{XC}{BX}$$

$$\frac{BN}{NN_B} \cdot \frac{N_B Y_3}{Y_3 C} \cdot \frac{XC}{BX} = -1. \tag{9.2.57}$$

Maka ketiga titik $X$, $N$, dan $Y_3$ segaris.

Dari persamaan (9.2.39), (9.2.48), dan (9.2.57), diperoleh titik $X, G, Y_1$ segaris, $X, I, Y_2$ segaris, dan $X, N, Y_3$ segaris. Untuk membuktikan titik $G, I,$ dan $N$ juga segaris, maka akan ditunjukkan $XY_1 = XY_2 = XY_3$.

Dari persamaan (9.2.39) dan (9.2.48), diperoleh perbandingan sisinya

$$\frac{BG}{GB'} \cdot \frac{B'Y_1}{Y_1C} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BI}{IE} \cdot \frac{EY_2}{Y_2C} \cdot \frac{XC}{BX}. \tag{9.2.58}$$

Karena

$$B'Y_1 = Y_1C - CB'$$

$$B'Y_1 = (CA + AY_1) \tag{9.2.59}$$

$$CA = (B'Y_1 - AY_1) + CB' \tag{9.2.60}$$

dan

$$Y_1C = CA + AY_1 \tag{9.2.61}$$

$$CA = Y_1C - AY_1. \tag{9.2.62}$$

Kemudian,

$$EY_2 = Y_2C - CE$$

$$EY_2 = (CA + AY_2) - CE \tag{9.2.63}$$

$$CA = (EY_2 - AY_2) + CE \tag{9.2.64}$$

dan

$$Y_2C = CA + AY_2 \tag{9.2.65}$$

$$CA = Y_2C - AY_2, \tag{9.2.66}$$

maka berdasarkan persamaan (9.2.59), (9.2.60), (9.2.61), (9.2.62), (9.2.63), (9.2.64), (9.2.65), dan (9.2.66), persamaan (9.2.57) menjadi

$$\frac{BG}{GB'} \cdot \frac{(B'Y_1 - AY_1) + CB'}{Y_1C - AY_1} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BI}{IE} \cdot \frac{(EY_2 - AY_2) + CE}{Y_2C - AY_2} \cdot \frac{XC}{BX}$$

atau

$$\frac{BG}{GB'} \cdot \frac{CA}{CA} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BI}{IE} \cdot \frac{CA}{CA} \cdot \frac{XC}{BX}. \tag{9.2.67}$$

Dari persamaan (9.2.67), karena $B'$ dan $E$ berada pada garis yang sama, maka haruslah $G$ dan $I$ juga berada pada garis yang sama, artinya $XY_1 = XY_2$.

Dengan cara yang sama untuk persamaan (9.2.48) dan (9.2.57), perbandingan sisi dari kedua persamaan tersebut menjadi

$$\frac{BI}{IE}\cdot\frac{(EY_2 - AY_2) + CE}{Y_2C - AY_2}\cdot\frac{XC}{BX} = \frac{BN}{NN_B}\cdot\frac{(N_BY_3 - AY_3) + CN_B}{Y_3C - AY_3}\cdot\frac{XC}{BX}$$

atau

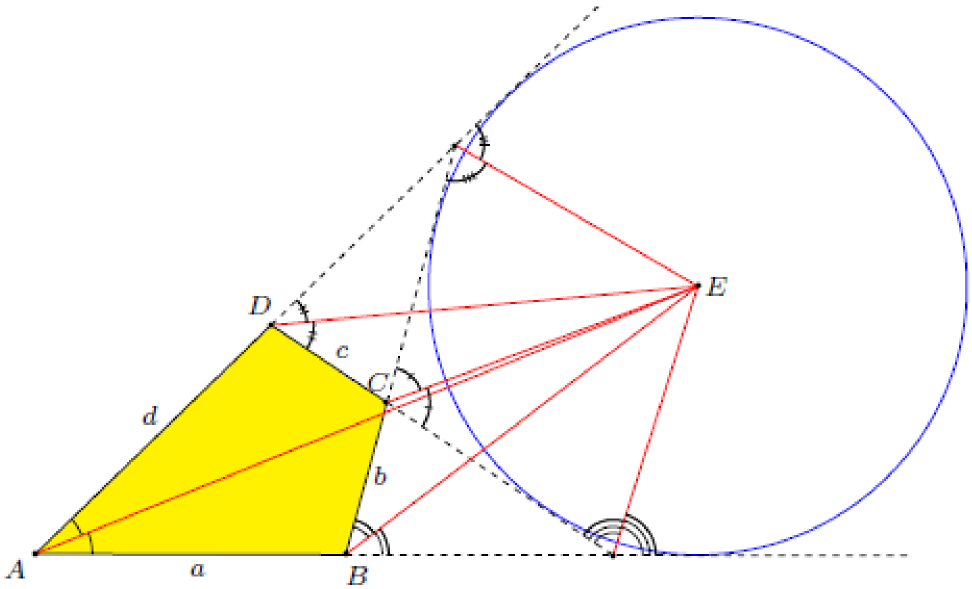
$$\frac{BI}{IE}\cdot\frac{CA}{CA}\cdot\frac{XC}{BX} = \frac{BN}{NN_B}\cdot\frac{CA}{CA}\cdot\frac{XC}{BX}. \qquad (9.2.68)$$

Dari persamaan (9.2.68), karena $E$ dan $N_B$ berada pada garis yang sama, maka haruslah $I$ dan $N$ juga berada pada garis yang sama, artinya $XY_2 = XY_3$. Berdasarkan persamaan (9.2.67) dan (9.2.68), karena $G$ dan $I$ berada pada garis $XY_1 = XY_2$, $I$ dan $N$ berada pada garis $XY_2 = XY_3$, dengan kata lain $G$, $I$, dan $N$ adalah segaris. Hubungan yang diperoleh dari pembuktian ini adalah titik-titik konkurensi pada segitiga asal seperti titik *centroid* dan *incenter* segaris dengan titik konkuren sipada segitiga Nagel yaitu titik Nagel atau ketiga titik tersebut merupakan segmen Nagel.

## Latihan 12.

1. Buatlah semua titik Gergonne luar dari suatu segitiga ABC, kemudian buktikan konkurensinya
2. Perhatikan gambar 9.1.6 dan gambar 9.1.7, tentukanlah perbandingan luas lingkaran kecil dan lingkaran besarnya.
3. Perhatikan gambar 9.1.11 tunjukkan bahwa titik-titik berikut adalah segaris
   a. $E_B$, A dan $E_C$
   b. $E_C$, B dan $E_A$
   c. $E_A$, C dan $E_C$.

4. Juga pada gambar 9.1.11 hitunglah luas segitiga $E_AE_BE_C$.
5. Juga pada gambar 9.1.11 hitunglah luas segitiga AA'A", BB'B" dan CC'C"
6. Berikan bukti alternatif lain dari teorema 9.1.1
7. Berikan bukti alternatif lain untuk luas segitiga Nagel.
8. Perhatikan gambar berikut :

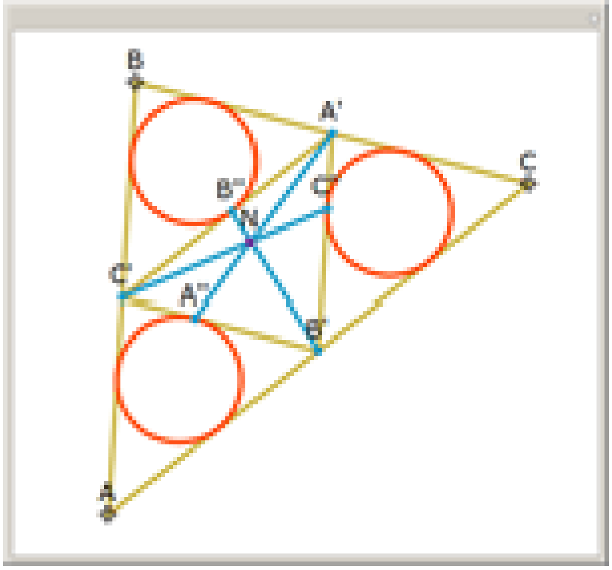



Gambar di atas merupakan salah satu cara membentuk lingkaran singgung luar untuk segi empat

a. Bisakah anda jelaskan cara mengkontruksi lingkarang singgung luarnya
b. Berapakah panjang Jari-jarinya
c. Tunjukkan garis bagi luar dari ∠B, garis bagi luar ∠C dan garis bari ∠A, berpotongan di satu titik.

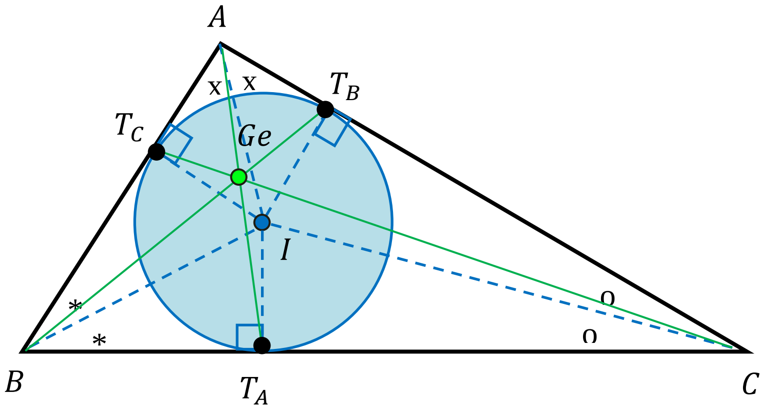
9. *) Buktikan teorema semiGergonne dengan cara yang sesederhana mungkin.

10. Perhatikan gambar disebelah. Bagaimanakah cara mengkontruksi $\Delta A'B'C'$ dan $\Delta A"B"C"$




### 9.3. Luas Segitiga Gergonne

Beberapa penulis telah membahas luas dari segitiga singgung dalam dengan menggunakan koordinat barisentrik. Dalam subbab ini, luas segitiga Gergonne ditentukan berdasarkan panjang sisi-sisinya dengan menggunakan aturan kosinus.




Gambar 9.3.1.

Misalkan panjang sisi-sisi $\Delta ABC$ adalah $BC = a$, $AC = b$, dan $AB = c$, serta semi-perimeter segitiga, yaitu $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Perhatikan $\Delta AT_BT_C$, $\Delta BT_AT_C$, dan $\Delta CT_AT_B$ pada Gambar 9.3.1, jelas berlaku bahwa $AT_C = AT_B$, $BT_A = BT_C$, dan $CT_B = CT_A$, sehingga ketiga segitiga tersebut adalah segitiga sama kaki. Sebelum menentukan panjang sisi segitiga Gergonne, terlebih dahulu ditunjukkan bahwa

$$AT_C = AT_B = s - a$$

ditunjukkan juga bahwa

$$BT_A = BT_C = s - b$$

$$CT_B = CT_A = s - c.$$

Misalkan $AT_C = k$, maka

$$BT_C = c - k = BT_A \qquad (9.3.1)$$

$$CT_B = b - k = CT_A, \qquad (9.3.2)$$

sehingga penjumlahan sisi-sisi $\Delta ABC$ dapat dinyatakan dengan menjumlahkan persamaan $AT_C = AT_B = k$, (9.3.1), dan (9.3.2), yaitu

$$\begin{aligned} AB + BC + CA &= AT_C + BT_C + BT_A + CT_B + CT_A + AT_B \\ c + a + b &= k + (c - k) + (c - k) + (b - k) + (b - k) + k \\ a + b + c &= 2c + 2b - 2k \\ 2k &= 2b + 2c - a - b - c \\ 2k &= b + c - a \\ k &= \frac{1}{2}(b + c - a) \\ k &= \frac{1}{2}(a + b + c) - a. \qquad (9.3.3) \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $s = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$ ke persamaan (9.3.3) diperoleh $k = s - a$, sehingga terpenuhi bahwa $AT_C = AT_B = s - a$.

Dengan cara yang sama seperti menunjukkan $AT_C = AT_B = s - a$, maka diperoleh

$$BT_A = BT_C = s - b$$

$$CT_B = CT_A = s - c.$$

Selanjutnya, panjang sisi-sisi dari segitiga Gergonne ditentukan berdasarkan aturan kosinus. Perhatikan $\Delta AT_BT_C$ pada Gambar 9.3.1, maka panjang $T_BT_C$ adalah

$$T_BT_C{}^2 = AT_B{}^2 + AT_C{}^2 - 2\, AT_B\, AT_C\, \cos A. \qquad (9.3.4)$$

Dengan mensubstitusikan nilai $AT_C = AT_B = s - a$ ke persamaan (9.3.4) maka persamaan (9.3.4) menjadi

$$\begin{aligned} T_BT_C{}^2 &= (s-a)^2 + (s-a)^2 - 2(s-a)(s-a)\cos A \\ &= 2(s-a)^2 - 2(s-a)^2 \cos A \\ &= 2(s-a)^2(1-\cos A) \\ T_BT_C &= \sqrt{2(s-a)^2\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)2} \\ &= \sqrt{4(s-a)^2}\,\sqrt{\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)} \\ T_BT_C &= 2(s-a)\sqrt{\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)}. \qquad (9.3.5) \end{aligned}$$

Nilai $\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)$ dari persamaan (3.8) dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-\cos A}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1-\cos A) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)}{2bc}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}\right) \\ \left(\frac{1-\cos A}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc}\right), \qquad (9.3.6) \end{aligned}$$

karena $b^2 - 2bc + c^2 = (b-c)^2$, sehingga persamaan (9.3.6) menjadi

$$\left(\frac{1-\cos A}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right)$$

$$\left(\frac{1-\cos A}{2}\right) = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}. \qquad (9.3.7)$$

Semi-perimeter segitiga dinyatakan dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, maka

$$a + b + c = 2s, \tag{9.3.8}$$

kurangkan kedua ruas dengan $2b$, maka diperoleh

$$a + b + c - 2b = 2s - 2b$$

$$a - b + c = 2(s - b). \tag{9.3.9}$$

Jika kedua ruas pada persamaan (9.3.8) dikurangkan dengan $2c$, maka diperoleh

$$a + b - c = 2(s - c). \tag{9.3.10}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (9.3.9) dan (9.3.10) ke persamaan (9.3.7), maka diperoleh

$$\left(\frac{1 - \cos A}{2}\right) = \frac{2(s-c)2(s-b)}{4bc}$$

$$\left(\frac{1 - \cos A}{2}\right) = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}. \tag{9.3.11}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (9.3.11) ke persamaan (9.3.5), maka persamaan (9.3.5) menjadi

$$T_B T_C = 2(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}. \tag{9.3.12}$$

Dengan cara yang sama untuk memperoleh persamaan (9.3.12), maka diperoleh

$$T_A T_C = 2(s-b)\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

sedangkan panjang sisi $T_A T_B$ adalah

$$T_A T_B = 2(s-c)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Selanjutnya akan ditentukan $L\Delta T_A T_B T_C$, karena lingkaran dalam $\Delta ABC$ merupakan lingkaran luar untuk $\Delta T_A T_B T_C$. Pada persamaan tersebut $R$ merupakan jari-jari lingkaran luar $\Delta ABC$ sedangkan jari-jari lingkaran luar untuk $\Delta T_A T_B T_C$ adalah jari-jari lingkaran dalam $\Delta ABC$ yang disimbolkan dengan $r$, maka $L\Delta T_A T_B T_C$ adalah

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{T_B T_C \;\; T_A T_C \;\; T_A T_B}{4r}. \tag{9.3.13}$$

Dengan mensubstitusikan panjang sisi-sisi $\Delta T_A T_B T_C$ dan nilai $r$ ke persamaan (9.3.13), maka persamaan (9.3.13) menjadi

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{2(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\; 2(s-b)\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}}{4}$$

$$\times \frac{2(s-c)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}{\frac{L\Delta ABC}{s}}$$

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\;\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}}{4}$$

$$\times \frac{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}{L\Delta ABC}. \qquad (9.3.14)$$

Jika $L\Delta ABC$ dinyatakan dengan rumus $L\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, maka $s(s-a)(s-b)(s-c) = L\Delta ABC^2$, sehingga persamaan (9.3.14) menjadi

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{2\, L\Delta ABC^2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\frac{(s-a)(s-c)}{ac}\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}{L\Delta ABC}$$

atau dapat ditulis

$$L\Delta T_A T_B T_C = 2\sqrt{\frac{(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}{a^2b^2c^2}}\, L\Delta ABC$$

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} L\Delta ABC. \qquad (9.3.15)$$

Dari persamaan (9.3.15) dapat dilihat bahwa luas segitiga Gergonne dapat ditentukan berdasarkan panjang sisi-sisi segitiga asal yang telah diketahui.

**Teladan 9.3.1** Sebarang $\Delta ABC$ seperti pada Gambar 9.3.1, dengan panjang sisi $AB = 14\ cm$, $BC = 15\ cm$, dan $AC = 13\ cm$. Hitunglah $L\Delta T_A T_B T_C$.

**Penyelesaian:** Karena $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, maka diperoleh $s = 21\ cm$. Untuk menghitung $L\Delta ABC$ digunakan formula Heron [6], maka diperoleh

$$L\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$L\Delta ABC = \sqrt{21(21-15)(21-13)(21-14)}$$

$$L\Delta ABC = \sqrt{7056} = 84\ cm^2.$$

Adapun $L\Delta T_A T_B T_C$ dihitung berdasarkan persamaan (9.3.15), maka diperoleh

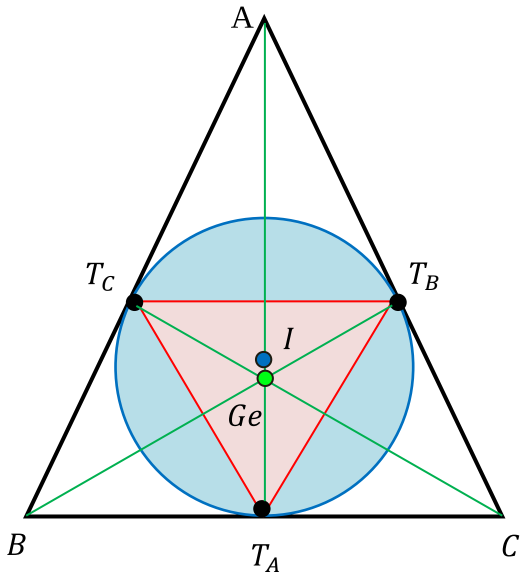
$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} L\Delta ABC$$

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{2(21-15)(21-13)(21-14)}{15 \times 13 \times 14} \times 84$$

$$L\Delta T_A T_B T_C = 20{,}67692308\ cm^2.$$

**Teladan 9.3.2** Terdapat $\Delta ABC$ sama kaki dengan panjang sisi $AB = AC = 26\ cm$ dan $BC = 20\ cm$. Hitunglah $L\Delta T_A T_B T_C$.

Perhatikan Gambar 9.3.2




Gambar 9.3.2.

**Penyelesaian:** Dengan cara yang sama pada teladan 9.3.1, maka diperoleh

$$s = 36\ cm$$

$$L\Delta ABC = 240\ cm^2,$$

sehingga $L\Delta T_A T_B T_C$ adalah $A$

$$L\Delta T_A T_B T_C = 56{,}80473373\ cm^2.$$

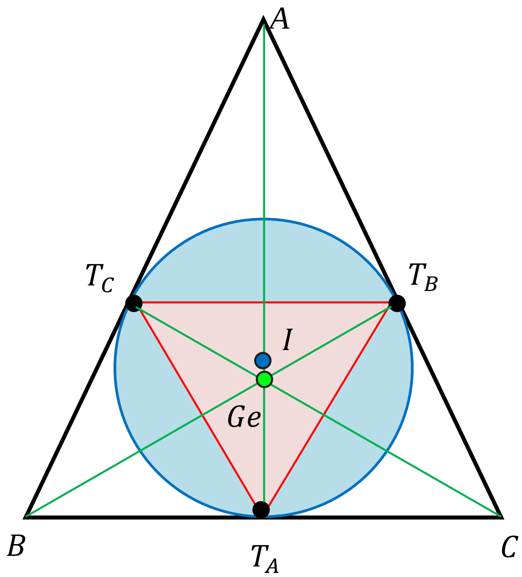
**Teladan 9.3.3** Sebuah $\Delta ABC$ sama sisi dengan panjang $AB = BC = AC = 18\ cm$. Hitunglah $L\Delta T_A T_B T_C$. Perhatikan Gambar 9.3.3.

**Penyelesaian:** Dengan cara yang sama pada Contoh 3.2.1, maka diperoleh $s = 27\ cm$. Adapun $L\Delta ABC$ adalah

$$L\Delta ABC = 81\sqrt{3}\ cm^2,$$

sehingga

$$L\Delta T_A T_B T_C \frac{81}{4}\sqrt{3}\ cm^2.$$



Gambar 9.3.3

**Teladan 9.3.4** Sebuah $\Delta ABC$ siku-siku sebarang seperti pada Gambar 11, dengan panjang sisi $AB = 20\ cm$, $BC = 15\ cm$ dan $AC = 25\ cm$. Hitunglah $L\Delta T_A T_B T_C$. Perhatikan Gambar 9.3.4

**Penyelesaian:**

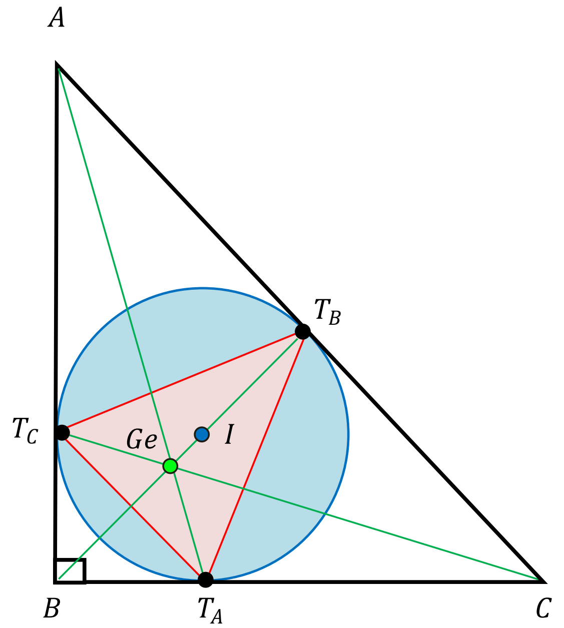
Dengan cara yang sama pada Contoh 3.2.1, maka diperoleh

$$s = 30\ cm$$

$$L\Delta ABC = 150\ cm^2,$$

sehingga

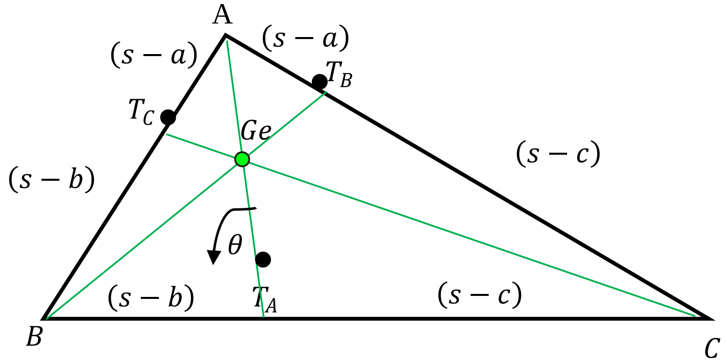
$$L\Delta T_A T_B T_C = 30\ cm^2.$$




Gambar 9.3.4.

- **Panjang Garis Gergonne**

Perhatikan Gambar 9.3.5




Gambar 9.3.5

Pembahasan dalam bagian ini adalah menentukan hubungan antara panjang garis Gergonne dengan panjang sisi segitiga asal yaitu $\Delta ABC$. Adapun garis Gergonne yang dimaksud adalah ketiga garis yang berpotongan di titik Gergonne yaitu garis $AT_A$, $BT_B$ dan $CT_C$.

Misalkan panjang sisi-sisi $\Delta ABC$ pada Gambar 9.3.5, adalah $BC = a$, $AC = b$ dan $AB = c$. Pada bagian terdahulu telah ditunjukkan bahwa $BT_A = (s - b)$ dan $CT_A = (s - c)$. Dimisalkan juga $m\angle AT_AB = \theta$, dengan menggunakan aturan kosinus untuk $\Delta AT_AB$, maka panjang garis $AT_A$ dijabarkan sebagai berikut

$$AB^2 = {AT_A}^2 + {BT_A}^2 - 2AT_ABT_A \cos\theta$$

$$2AT_ABT_A \cos\theta = {AT_A}^2 + {BT_A}^2 - AB^2$$

$$\cos\theta = \frac{{AT_A}^2 + {BT_A}^2 - AB^2}{2AT_ABT_A} \qquad (9.3.16)$$

Dengan mensubstitusikan nilai $BT_A = (s - b)$ dan $AB = c$ ke persamaan (9.3.16), maka diperoleh

$$\cos\theta = \frac{AT_A^2 + (s-b)^2 - c^2}{2AT_A(s-b)}. \qquad (9.3.17)$$

Perhatikan juga $\Delta AT_AC$, karena $m\angle AT_AC = 180^\circ - \theta$, dapat dinyatakan bahwa

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta.$$

Dengan menggunakan aturan kosinus untuk $\Delta AT_AC$, maka diperoleh

$$-\cos\theta = \frac{AT_A^2 + CT_A^2 - AC^2}{2AT_A\, CT_A}. \qquad (9.3.18)$$

Jika ruas kiri dan kanan dari persamaan (9.3.18) dikalikan -1, maka

$$\cos\theta = \frac{AC^2 - AT_A^2 - CT_A^2}{2AT_A\, CT_A}$$

$$\cos\theta = \frac{b^2 - AT_A^2 - (s-c)^2}{2AT_A(s-c)}. \qquad (9.3.19)$$

Dari persamaan (9.3.17) dan (9.3.19) diperoleh

$$\frac{AT_A^2 + (s-b)^2 - c^2}{2AT_A(s-b)} = \frac{b^2 - AT_A^2 - (s-c)^2}{2AT_A(s-c)}$$

$$(s-b)(b^2 - AT_A^2 - (s-c)^2) = (s-c)(AT_A^2 + (s-b)^2 - c^2)$$

$$b^2(s-b) - AT_A^2(s-b) - (s-b)(s-c)^2 = AT_A^2(s-c) + (s-b)^2(s-c) - c^2(s-c)$$

$$b^2(s-b) + c^2(s-c) = AT_A^2(s-c) + AT_A^2(s-b) + (s-b)^2(s-c)$$
$$+(s-b)(s-c)^2$$

atau dapat ditulis

$$b^2(s-b) + c^2(s-c) = AT_A^2\big((s-b)+(s-c)\big)$$
$$+(s-b)(s-c)\big((s-b)+(s-c)\big), \qquad (9.3.20)$$

karena $a = (s-b) + (s-c)$, maka persamaan (9.3.20) menjadi

$$aAT_A^2 + a(s-b)(s-c) = b^2(s-b) + c^2(s-c)$$
$$aAT_A^2 = b^2(s-b) + c^2(s-c) - a(s-b)(s-c),$$

sehingga diperoleh panjang garis Gergonne yang berpotongan dengan sisi $BC$ adalah

$$AT_A^2 = \frac{b^2(s-b) + c^2(s-c) - a(s-b)(s-c)}{a}. \qquad (9.3.21)$$

Dengan cara yang sama untuk memperoleh persamaan (9.3.21), maka panjang garis Gergonne yang memotong sisi $AC$ adalah

$$BT_B^2 = \frac{a^2(s-a) + c^2(s-c) - b(s-a)(s-c)}{b}.$$

Adapun garis Gergonne yang memotong sisi $AB$, yaitu

$$CT_C^2 = \frac{a^2(s-a) + b^2(s-b) - c(s-a)(s-b)}{c}.$$

## 9.4. Kontruksi Titik Nagel Melalui *Incircle*

Untuk mengkontruksi titik Nagel melalui *incircle*, dilakukan langkah-langkah seperti yang terdapat pada Gambar 9.4.1.

1. Pada sebarang $\Delta ABC$, bentuk suatu lingkaran dalam (*incircle*) dengan cara membentuk bisektor sudut dalam segitiga di setiap titik sudut, sehingga ketiga garis tersebut konkuren di titik *incenter*, yaitu titik $I$. Titik $I$ merupakan titik

pusat *incircle* yang menyinggung semua sisi $\Delta ABC$, yaitu pada titik $D$, $E$, dan $F$ masing-masing berada pada sisi $BC$, $CA$, dan $AB$.

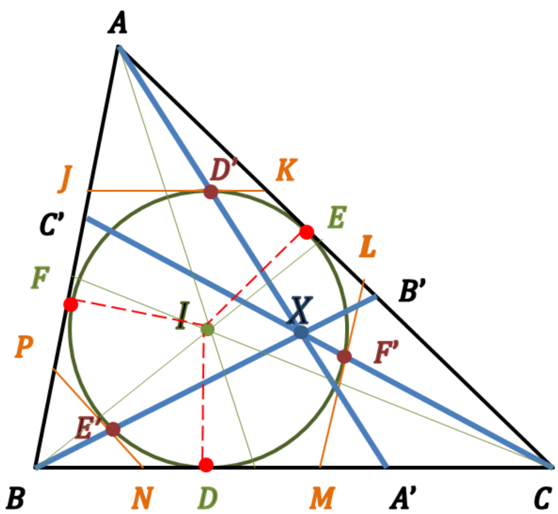
2. Pada setiap sisi segitiga, buat garis sejajar yaitu sisi $BC // JK$ yang mana garis $JK$ menyinggung *incircle* di titik $D'$, sisi $CA // NP$ dengan garis $NP$ menyinggung *incircle* di titik $E'$ dan sisi $AB // LM$ dengan garis $LM$ menyinggung *incircle* di titik $F'$.
3. Pada $\Delta ABC$ hubungkan titik sudut $A$ terhadap titik $D'$, titik sudut $B$ terhadap $E'$, dan titik sudut $C$ terhadap $F'$, maka perpanjangan dari ketiga garis $AD'$, $BE'$, dan $CF'$ akan konkuren, konkurensi ini disebut juga dengan titik Nagel [6].

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa perpanjangan dari garis $AD'$, $BE'$, dan $CF'$ konkuren pada titik Nagel. Pada Gambar 9.4.1, perhatikan $\Delta ABA'$ dan $\Delta AJD'$, karena $BA' // JD'$, maka

$$\angle ABA' = \angle AJD' \quad \text{(sd)}$$

dan

$$\angle AA'B = \angle AD'J \quad \text{(sd)}$$




Gambar 9.4.1.

karena kesebangunan pada dua segitiga terpenuhi (sd-sd), maka $\Delta ABA' \sim \Delta AJD'$, dengan perbandingan sisi

$$\frac{BA'}{JD'} = \frac{AA'}{AD'} \ , \qquad (9.4.1)$$

sedangkan pada $\Delta AA'C$ dan $\Delta AD'K$, karena $A'C // D'K$, maka

$$\angle AA'C = \angle AD'K \quad \text{(sd)}$$

dan

$$\angle ACA' = \angle AKD' \quad \text{(sd)}$$

kesebangunan pada dua segitiga terpenuhi (sd-sd), sehingga $\Delta AA'C \sim \Delta AD'K$,

dengan perbandingan sisi adalah

$$\frac{A'C}{D'K} = \frac{AA'}{AD'} \ . \qquad (9.4.2)$$

Dari persamaan (9.4.1) dan (9.4.2) diperoleh

$$\frac{BA'}{JD'} = \frac{A'C}{D'K}$$

atau

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{JD'}{D'K} \ . \qquad (9.4.3)$$

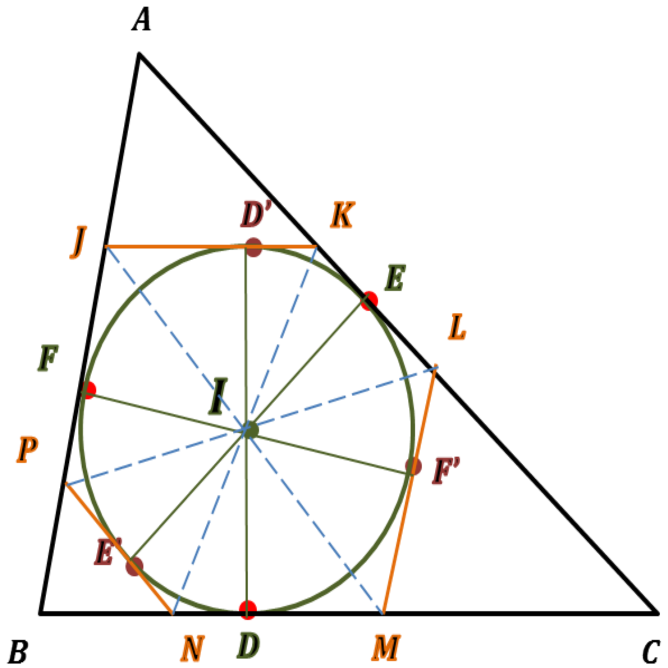
Dengan menggunakan cara yang sama, pada $\Delta BCB'$ dan $\Delta BB'A$ diperoleh $\Delta BCB' \sim \Delta BNE'$ dan $\Delta BB'A \sim \Delta BE'P$, sehingga diperoleh perbandingan sisi

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{NE'}{E'P} \ , \qquad (9.4.4)$$

pada $\Delta CAC'$ dan $\Delta CC'B$, diperoleh $\Delta CAC' \sim \Delta CLF'$ dan $\Delta CC'B \sim \Delta CF'M$, sehingga diperoleh perbandingan

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{LF'}{F'M} \ . \qquad (9.4.5)$$

Pada Gambar 9.4.2, titik $I$ merupakan titik *incenter* dan juga titik tengah dari diameter $DD'$, $EE'$, dan $FF'$. Jika titik $I$ dihubungkan terhadap titik $K$, maka dari $\Delta KD'I$ dan $\Delta KEI$, diperoleh :



Gambar 9.4.2.

$$ID' = IE \qquad \text{(s)} \qquad \text{(jari-jari } incircle\text{)}$$

$$D'K = EK \qquad \text{(s)} \qquad \text{(garis singgung)}$$

$$IK = IK \qquad \text{(s)} \qquad \text{(garis yang sama)}$$

karena kongruensi pada dua segitiga terpenuhi (s-s-s) [4], maka

$$\Delta KD'I \cong \Delta KEI \; , \qquad (9.4.6)$$

selanjutnya dengan menggunakan cara yang sama, yaitu titik $I$ dihubungkan terhadap titik $N$, pada $\Delta NE'I$ dan $\Delta NDI$, maka berlaku

$$\Delta NE'I \cong \Delta NDI \; . \qquad (9.4.7)$$

Karena garis $KN$ merupakan bisektor $\angle D'IE$ dan $\angle DIE'$, maka pada $\Delta KD'I$ dan $\Delta NDI$, diperoleh

$$\angle D'IK = \angle DIN \qquad \text{(sd)} \qquad \text{(sudut bertolak belakang)}$$

$$ID' = ID \qquad \text{(s)} \qquad \text{(jari-jari } incircle\text{)}$$

$$\angle KD'I = \angle NDI \qquad \text{(sd)} \qquad \text{(sudut siku-siku)}$$

karena kongruensi pada dua segitiga terpenuhi(s-s-s), maka

$$\Delta KD'I \cong \Delta NDI \; , \qquad (9.4.8)$$

dengan menggunakan cara yang sama, pada $\Delta KEI$ dan $\Delta NE'I$, maka berlaku

$$\Delta KEI \cong \Delta NE'I\ . \qquad (9.4.9)$$

Dari persamaan (9.4.6), (9.4.7), (9.4.8), dan (9.4.9), diperoleh

$$\Delta NE'I \cong \Delta NDI \cong \Delta KD'I \cong \Delta KEI\ ,$$

sehingga

$$NE' = DN = D'K = EK\ . \qquad (9.4.10)$$

Dengan menggunakan cara yang sama yaitu jika ditarik garis dari titik $I$ terhadap titik $P$ dan $L$, maka berlaku

$$LF' = EL = E'P = FP \qquad (9.4.11)$$

dan dari titik $I$ terhadap titik $J$ dan $M$ berlaku

$$JD' = FJ = F'M = DM \qquad (9.4.12)$$

Dari perkalian persamaan (9.4.3), (9.4.4), dan (9.4.5) diperoleh

$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{JD'}{D'K}\frac{NE'}{E'P}\frac{LF'}{F'M}$$

dan berdasarkan persamaan (9.4.10), (9.4.11), dan (9.4.12), diperoleh

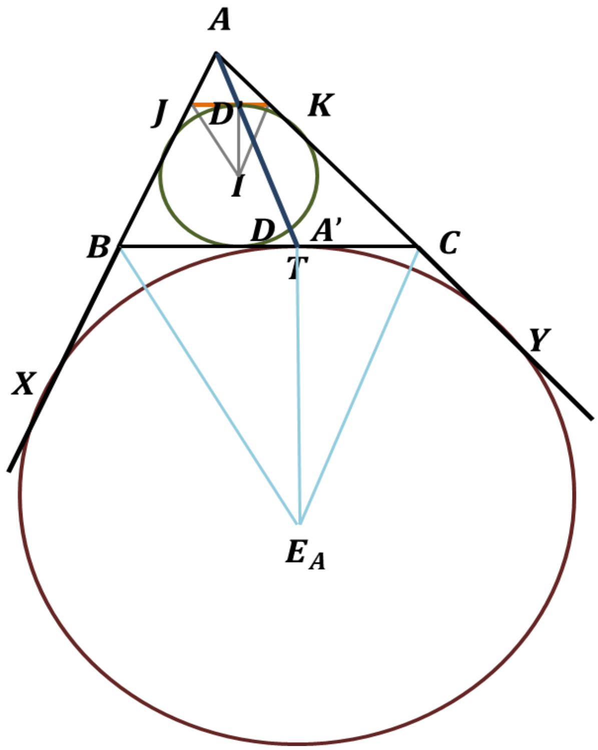
$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = \frac{DM}{EK}\frac{EK}{FP}\frac{FP}{DM}$$

$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = 1\ .$$

Karena hasil perbandingan sisi-sisi pada segitiga bernilai 1, maka terbukti bahwa ketiga perpanjangan garis $AD'$, $BE'$, dan $CF'$ konkuren.

Jika konkurensi yang diperoleh tersebut dimisalkan dengan titik $X$, maka titik ini belum dapat dikatakan sebagai titik Nagel. Karena titik Nagel terbentuk melalui titik singgung dari *excircle*, maka akan ditunjukkan bahwa titik $X$ merupakan sebuah titik Nagel.

Perhatikan $\Delta ABC$ pada Gambar 9.4.4, jika pada sisi $BC$ dikontruksi *excircle* dengan pusat $E_A$, dengan titik singgung $T$, sedangkan $A'$ merupakan titik potong dari perpanjangan garis $AD$ terhadap sisi $BC$, maka akan dibuktikan bahwa $T = A'$ sedemikian sehingga $A'$ merupakan titik singgung *excircle*.




Gambar 9.4.3.

Perhatikan $\Delta BE_AC$ dan $\Delta JIK$ pada Gambar 9.4.3. Jika $BC//JK$, maka $\angle KJB \cong \angle CBX$. Karena $BE_A$ merupakan bisektor dari $\angle CBX$ dan $JI$ bisektor $\angle KJB$, maka

$$\angle KJI \cong \angle CBE_A \quad \text{(sd)} \quad \text{(bisektor sudut)}$$

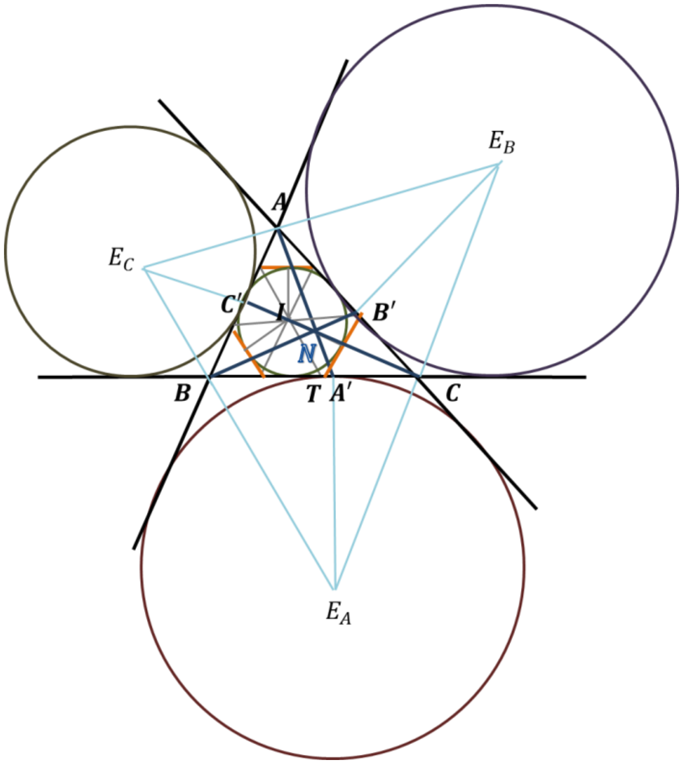
kemudian pada garis $BC//JK$ juga diperoleh, $\angle JKC \cong \angle BCY$. Karena $CE_A$ merupakan bisektor dari $\angle BCY$ dan $KI$ bisektor $\angle JKC$, maka

$$\angle JKI \cong \angle BCE_A \quad \text{(sd)} \quad \text{(bisektor sudut)}$$

kesebangunan dari dua buah segitiga terpenuhi (sd-sd), sehingga diperoleh $\Delta BE_AC \sim \Delta JIK$, maka tinggi $TE_A$ dan $D'I$ bersesuaian, sehingga

$$\frac{BT}{JD'} = \frac{TC}{D'K}$$

$$\frac{BT}{TC} = \frac{JD'}{D'K} \ . \qquad (9.4.13)$$




Gambar 9.4.4.

Dari persamaan (9.4.3) dan (9.4.13), diperoleh

$$\frac{BT}{TC} = \frac{BA'}{A'C}$$

$$\frac{BT}{TC} + 1 = \frac{BA'}{A'C} + 1$$

$$\frac{BT + TC}{TC} = \frac{BA' + A'C}{A'C}$$

$$\frac{BC}{TC} = \frac{BC}{A'C}$$

$$TC = A'C\,.$$

Karena $TC = A'C$, maka $T = A'$, dapat dikatakan bahwa $A'$ merupakan titik singgung *excircle*. Dengan cara yang sama yaitu dengan mengkontruksi *excircle* pada sisi segitiga lainnya, diperoleh titik $B'$ dan $C'$ yang merupakan titik singgung *excircle* pada sisi segitiga lainnya, seperti terdapat pada Gambar 9.4.4.

Karena titik $A'$, $B'$, dan $C'$ masing-masing merupakan titik singgung lingkaran singgung luar (*excircle*), maka terbukti bahwa konkurensi dari perpanjangan garis $AD'$, $BE'$, dan $CF'$ merupakan titik Nagel.

Titik Nagel tidak hanya terdapat di dalam segitiga, namun dapat juga dibentuk di luar suatu segitiga [4,8].

## 9.5. Semi Titik Nagel

Suatu $\Delta ABC$ yang memuat *incircle* $I$ menyinggung sisi $BC$ di titik $D$, *excircle* $E_B$ menyinggung perpanjangan sisi $BA$ di titik $Q$, dan *excircle* $E_C$ menyinggung perpanjangan sisi $CA$ di titik $U$. Jika titik sudut $B$ pada segitiga dihubungkan terhadap titik $U$, titik sudut $C$ dihubungkan terhadap titik $Q$, dan titik sudut $A$ dihubungkan terhadap titik $D$, maka perpanjangan dari garis $BU$, $DA$, dan $CQ$ konkuren [4]. Titik konkurensi ini disebut dengan semi titik Nagel atau titik Nagel yang berada di luar segitiga.

Akan ditunjukkan bahwa perpanjangan dari garis $BU$, $DA$, dan $CQ$ konkuren. Pada Gambar 9.5.1, *incircle* pada $\Delta ABC$ terdapat beberapa garis singgung yang sama panjang, yaitu

$$BD = FB$$
$$DC = CE$$
$$EA = AF\ .$$

Misalkan,

$$BD = FB = x\ , \tag{9.5.1}$$

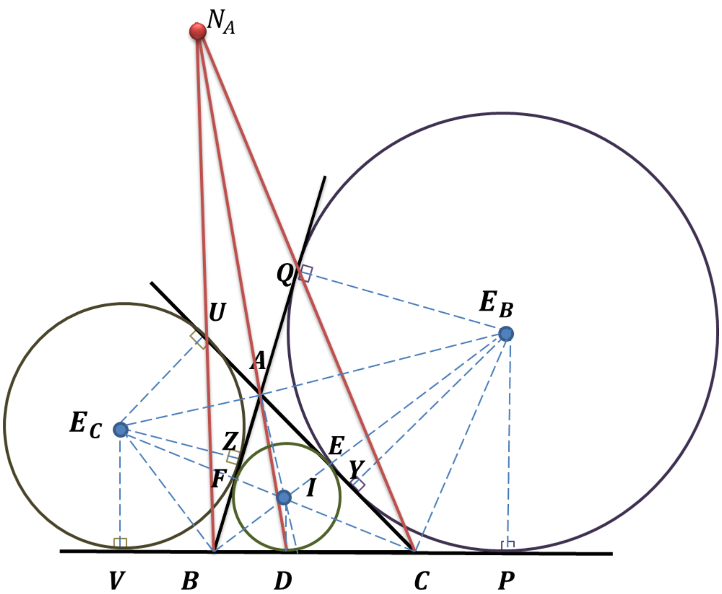
maka

$$BC = BD + DC$$
$$a = x + DC$$

$$DC = a - x\,,$$

diperoleh

$$DC = CE = a - x \qquad (9.5.2)$$




Gambar 9.5.1.

dan

$$AB = AF + FB$$

$$c = AF + x$$

$$AF = c - x\,,$$

diperoleh

$$EA = AF = c - x\,. \qquad (9.5.3)$$

Karena

$$BC + CA + AB = BD + DC + CE + EA + AF + FB\,. \qquad (9.5.4)$$

Substitusikan persamaan (9.5.1), (9.5.2), dan (9.5.3) ke persamaan (9.5.4), diperoleh

$$a + b + c = x + (a - x) + (a - x) + (c - x) + (c - x) + x\,,$$

sehingga

$$a + b + c = 2a + 2c - 2x$$

$$2x = a - b + c$$

$$2x = a - b + c + b - b$$

$$x = \frac{1}{2}(a + b + c) - b$$

$$x = s - b \,.$$

Persamaan (9.5.1) menjadi

$$BD = FB = s - b \,. \tag{9.5.5}$$

Untuk mendapatkan panjang sisi yang lainnya, maka digunakan cara yang sama, sehingga diperoleh

$$DC = CE = s - c \,. \tag{9.5.6}$$

Dengan membandingkan persamaan (9.5.5) dan (9.5.6), diperoleh

$$\frac{BD}{DC} = \frac{s - b}{s - c} \quad . \tag{9.5.7}$$

Sedangkan pada *excircle* yang terdapat pada sisi $CA$ dan $AB$, juga terdapat beberapa garis singgung yang sama panjang.

Dengan membandingkan persamaan (3.11) dan persamaan (3.12), diperoleh

$$\frac{CU}{UA} = \frac{s}{s - b} \quad . \tag{9.5.8}$$

Selanjutnya, dengan membandingkan persamaan (3.9) dan (3.7), diperoleh

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{s - c}{s} \quad . \tag{9.5.9}$$

Dengan mengalikan persamaan (9.5.7), (9.5.8), dan (9.5.9), diperoleh

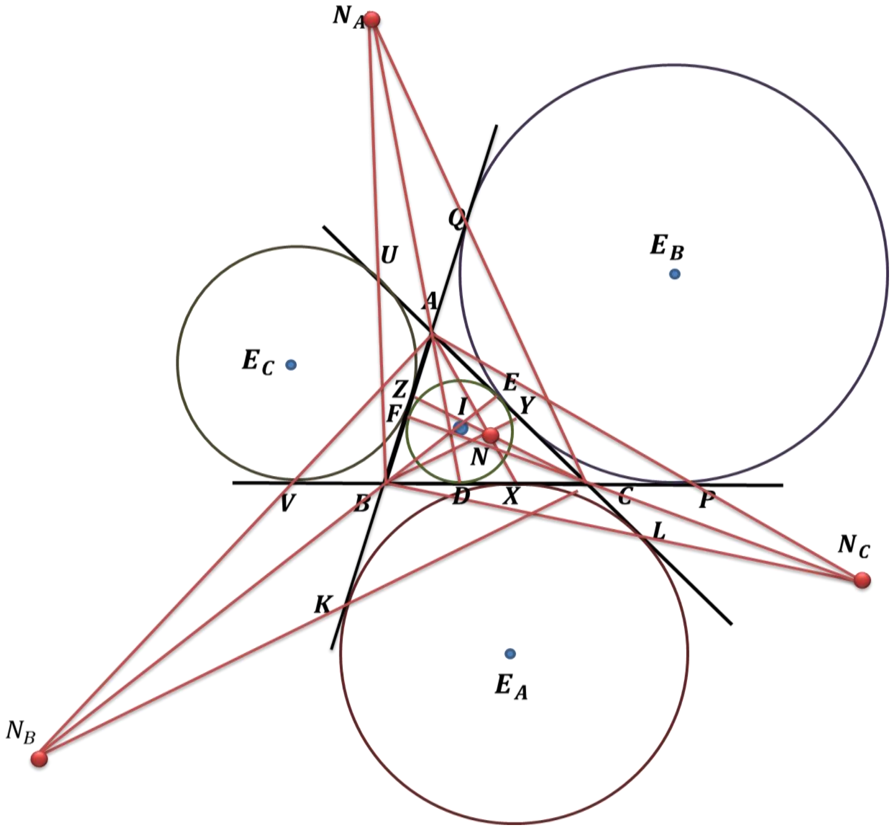
$$\frac{BD}{DC}\frac{CU}{UA}\frac{AQ}{QB} = \frac{s - b}{s - c}\frac{s}{s - b}\frac{s - c}{s} \ ,$$

sehingga

$$\frac{BD}{DC}\frac{CU}{UA}\frac{AQ}{QB} = 1 \,.$$

Karena hasil perbandingan sisi-sisi pada segitiga bernilai 1 dan teorema Ceva pada kasus 3 terpenuhi, maka terbukti bahwa ketiga perpanjangan dari garis $BU$, $DA$, dan $CQ$ konkuren, yaitu di titik $N_A$ yang berada di luar segitiga.

**Teorema 3.3.1** Sebarang $\Delta ABC$ memiliki empat titik Nagel.

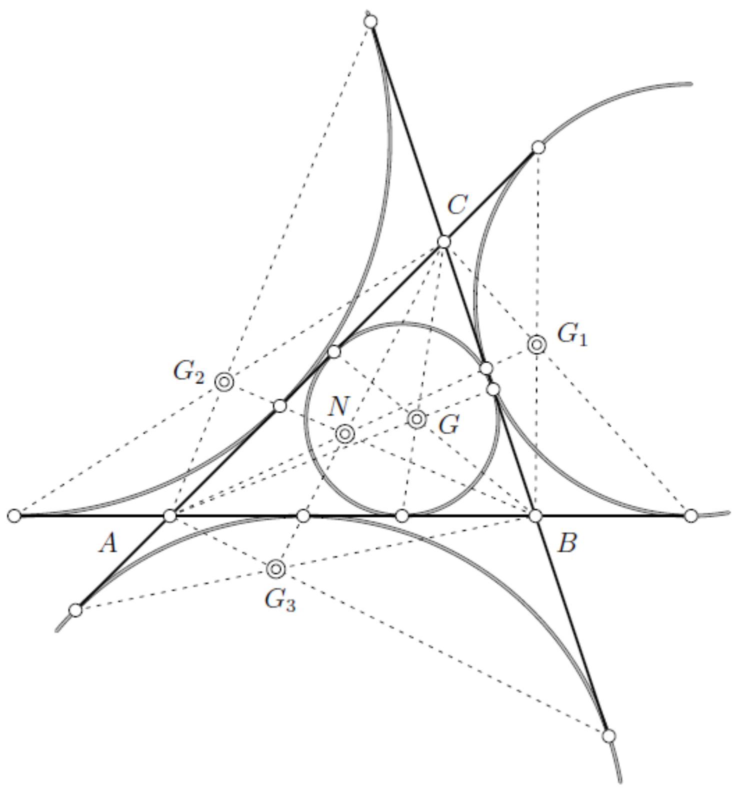



Gambar 9.5.2

**Bukti:** Secara geometri dapat dilihat pada Gambar 9.5.2 dan terbukti bahwa pada sebarang segitiga memiliki empat buah titik Nagel, satu berada di dalam segitiga sedangkan tiga titik Nagel yang lainnya berada di luar segitiga. ■

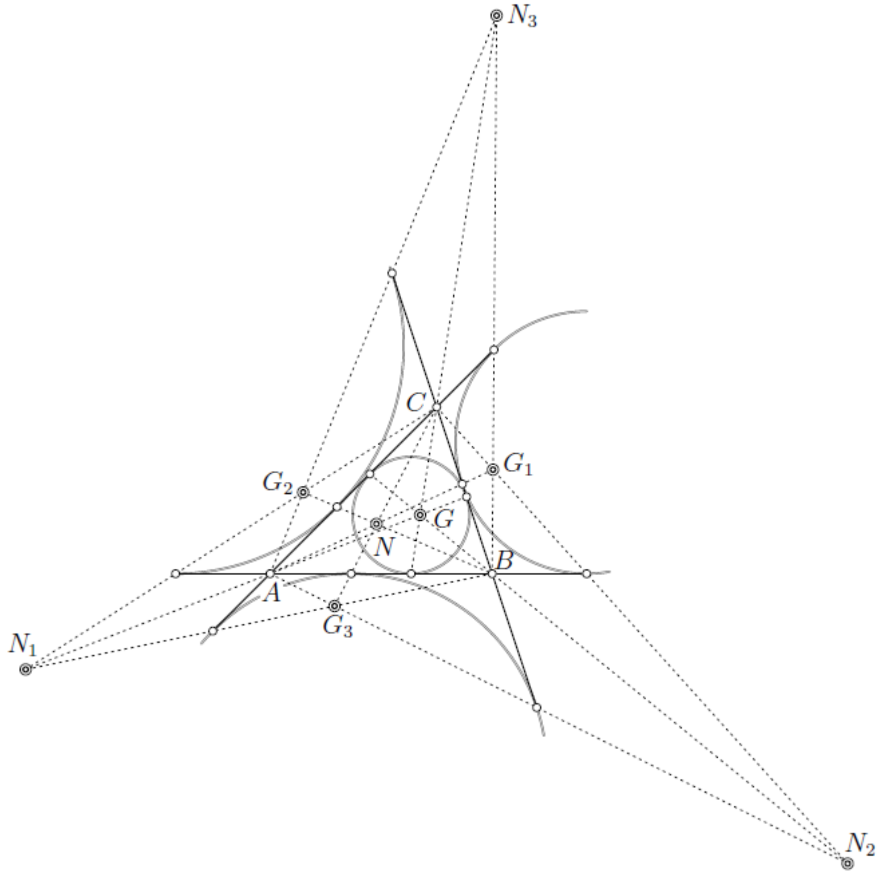
**Latihan 13.**

1. Buatlah sebarang segitiga siku-siku sama kaki, dan hitunglah panjang garis Gergonnenya.
2. Buatlah sebarang segitiga siku-siku sama kaki dan kontruksilah sebuah titik semi nagelnya dan hitunglah luas yang terbentuk dengan ke dua titik sudut segitiga lainnya.
3. *) Perhatikan gambar dibawah ini



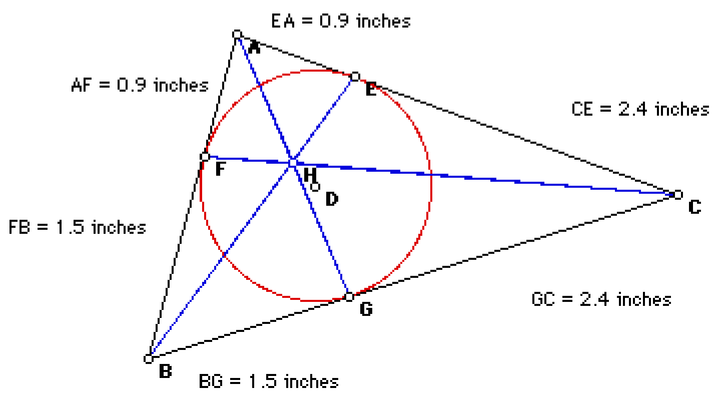

Tunjukkan bahwa $ANG_1$, $BNG_2$ dan $CNG_3$ masing-masing adalah segaris

4. Kembali pada gambar soal nomor 3. Hitunglah luas segitiga $ABG_1$, $BCG_2$ dan segitiga $CAG_3$.
5. *) Perhatikan gambar di bawah ini




Tunjukkan $BG_1$, $AG_2$ dan garis bagi sudut C adalah konkongkuren di $N_3$, dengan cara yang sama tunjukkan untuk kongkurensi di $N_1$ dan $N_2$.

6. Masih pada gambar soal nomor 3 di atas, tentukan panjang sisi $AN_1$, $BN_2$ dan $CN_3$.
7. Perhatikan segitiga di bawah, yang panjang sisinya telah ditentukan secara khusus panjang sisinya telah ditentukan. Berapakah luas dan panjang segitiga nagelnya.
8. *). Berapakan luas segitiga $ABN_3$, $BCN_1$ dan $CAN_2$. Pada gambar disoal no 3.
9. *). Berapakah luas segiempat $CG_2NG_1$, juga pada gambar soal no 3.

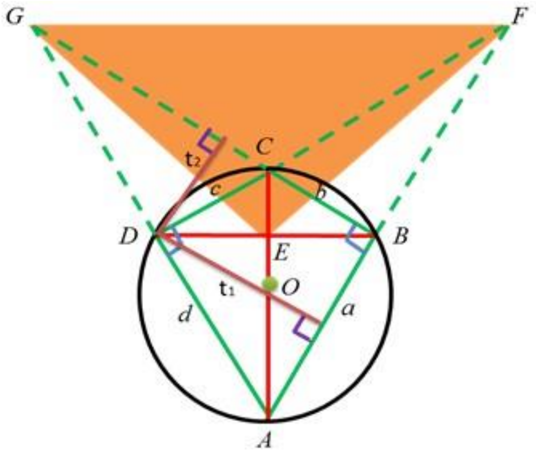


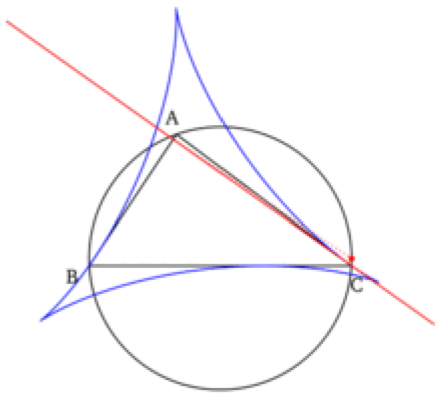

$$\frac{FB}{AF}\cdot\left(\frac{EA}{CE}\right)\cdot\left(\frac{GC}{BG}\right) = 1.0$$

# BAB 10

# BEBERAPA PENGEMBANGAN

Yang dimaksud dengan beberapa pengembangan disini adalah pembahasan tentang pembahasan tentang perbandingan luas segitiga external dengan segitiga asalnya serta perbandingan jari-jarinya, yang mana topik ini tidak bisa digabungkan dengan salah satu bab sebelumya. Selain itu juga dibahas perbandingan luas segitiga diagonal dalam berbagai kasus. Selain itu juga dibahas secara khusus tentang beberapa alternatif bukti dari teorema Simson's. materi ini juga hanya digunakan untuk pengembangan ilmu matematika itu sendiri.



# BAB 10

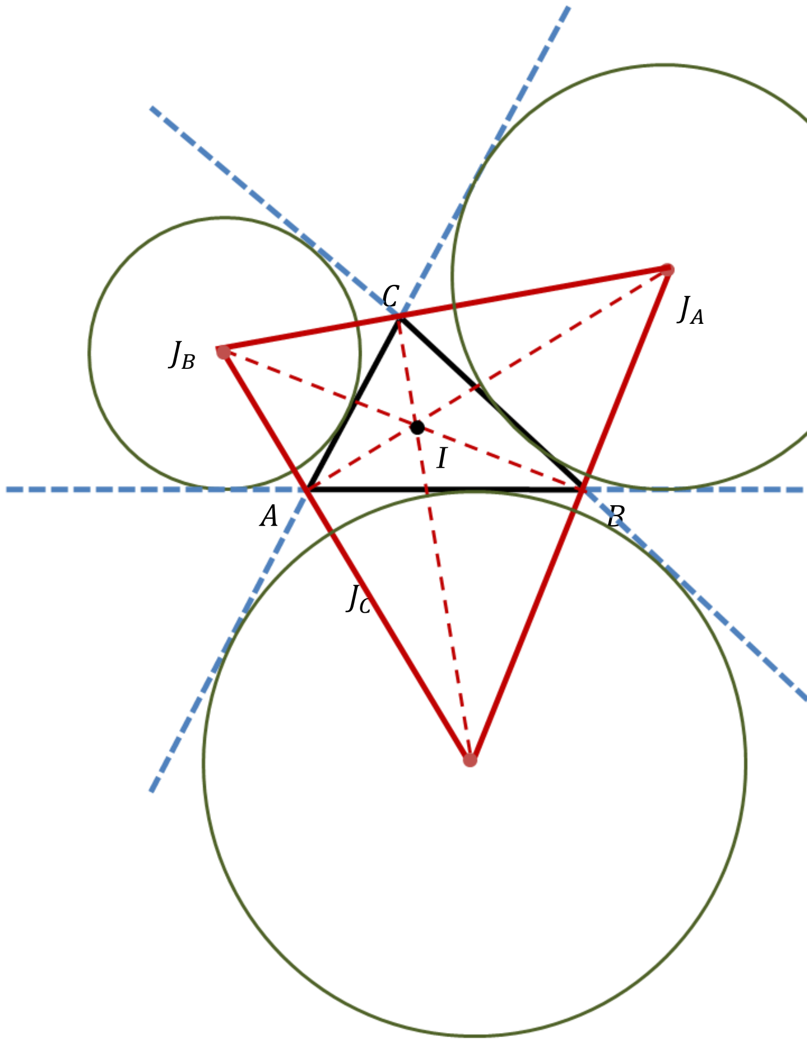
# BEBERAPA PENGEMBANGAN LAINNYA

## 10.1. Perbandingan Luas Antara Segitiga *Excentral* Dengan Segitiga Asal

Pada bagian ini kembali disinggung tentang *exenter*, akan tetapi notasinya dibedakan dengan bab sebelumnya. Suatu $\Delta ABC$ memiliki tiga *excenter* yang merupakan titik pusat lingkaran singgung, sebuat titik tersebut $J_A$, $J_B$, dan $J_C$. Sehingga dari ketiga titik pusat tersebut terdapat tiga lingkaran singgung yaitu masing-masing lingkaran singgung yang bertitik pusat $J_A$, $J_B$, dan $J_C$. Dengan menghubungkan masing-masing titik pusat lingkaran singgung luar maka terbentuklah suatu bangun segitiga baru yaitu $\Delta J_A J_B J_C$ dan segitiga ini dinamakan dengan segitiga *excentral*.

Salah satu titik puncak $\Delta ABC$ kolinier dengan *incenter* dan salah satu *excenter*nya, karena *excenter* diperoleh dari perpotongan salah satu *internal* bisektor $\Delta ABC$. Sehingga titik $A$, $I$, dan $J_A$ kolinier begitu juga dengan titik $B$, $I$, dan $J_B$ serta titik $C$, $I$, dan $J_C$.

Perhatikan Gambar 10.1.1, terlihat $\Delta J_A J_B J_C$ menyinggung masing-masing titik puncak $\Delta ABC$. Sisi $\overline{J_A J_B}$ menyinggung titik puncak $\Delta ABC$ pada titik $C$, sisi $\overline{J_B J_C}$ menyinggung titik $A$, dan sisi $\overline{J_A J_C}$ menyinggung titik $B$. Sebelumnya akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai Teorema Transversal Menelaus yang akan digunakan untuk membuktikan bahwa jika ketiga titik tersebut segaris atau kolinier.




Gambar 10.1.1.

Pada Bab ini Teorema Transversal Menelaus digunakan untuk membuktikan bahwa titik $J_A$, $B$, dan $J_C$ kolinier begitu juga dengan titik $J_A$, $C$, dan $J_B$ serta titik $J_B$, $A$, dan $J_C$. Perhatikan $\Delta J_A J_B J_C$ berikut yang diperbesar dari Gambar 10.1.1. Titik $J_A$, $B$, dan $J_C$ kolinier jika memenuhi persamaan transversal menelaus

$$\frac{\overline{J_B B}}{\overline{BI}} \cdot \frac{\overline{IJ_A}}{\overline{J_A A}} \cdot \frac{\overline{AJ_C}}{\overline{J_C J_B}} = -1 \,.$$

Perhatikan $\Delta J_B B J_C$, tarik garis sejajar dari titik $A$ ke $\overline{J_A J_C}$, misalkan pada titik $P$, sedemikian hingga $\overline{AP} \;//\; \overline{J_B B}$. Perhatikan $\Delta J_B B J_C$ dan $\Delta APJ_C$, $\angle J_B J_C B = \angle AJ_C P$ , karena $\overline{AP} \,//\, \overline{J_B B}$ maka

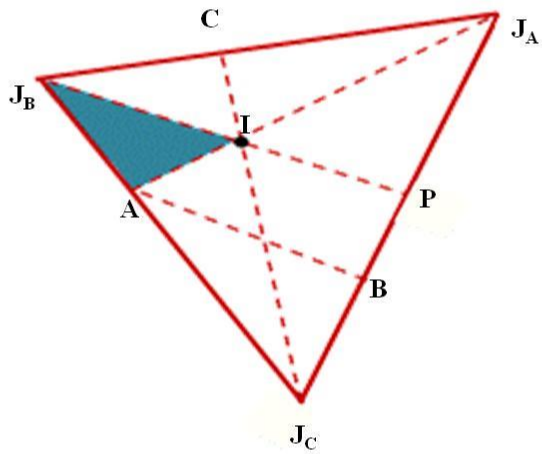
$$\angle J_B B J_C = \angle APJ_C$$

dan

$$\angle BJ_B J_C = \angle PAJ_C \,.$$

Dari kesebangunan Sd-Sd-Sd, maka $\Delta J_B B J_C \sim \Delta APJ_C$ sehingga diperoleh perbandingan sisi

$$\frac{\overline{J_B B}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{J_B J_C}}{\overline{AJ_C}},$$




Gambar 10.1.2

$$\overline{AP} = \frac{\overline{J_B B}.\overline{AJ_C}}{\overline{J_B J_C}} \,. \qquad (10.1.1)$$

Seperti memperoleh persamaan (10.1.1), ditunjukkan $\Delta APJ_A \sim \Delta IBJ_A$ sehingga diperoleh

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{IJ_A}}{\overline{AJ_A}},$$

$$\overline{AP} = \frac{\overline{IB}.\overline{AJ_A}}{\overline{IJ_A}} \,. \qquad (10.1.2)$$

Dari persamaan (10.1.1) dan (10.1.2) diperoleh

$$\frac{\overline{J_B B}.\overline{AJ_C}}{\overline{J_B J_C}} = \frac{\overline{IB}.\overline{AJ_A}}{\overline{IJ_A}}$$

$$\frac{\overline{J_B B}.\overline{AJ_C}.\overline{IJ_A}}{\overline{J_B J_C}.\overline{IB}.\overline{AJ_A}} = 1 \,,$$

$$\frac{\overline{J_B B}}{\overline{IB}}.\frac{\overline{IJ_A}}{\overline{AJ_A}}.\frac{\overline{AJ_C}}{\overline{J_B J_C}} = 1 \,. \qquad (10.1.3)$$

Segmen garis jika searah jarum jam akan bernilai positif dan jika berlawanan arah akan bernilai negatif maka $\overline{J_B J_C} = -\overline{J_C J_B}$, $\overline{IB} = -\overline{BI}$, dan $\overline{AJ_A} = -\overline{J_A A}$ sehingga persamaan (10.1.3) menjadi

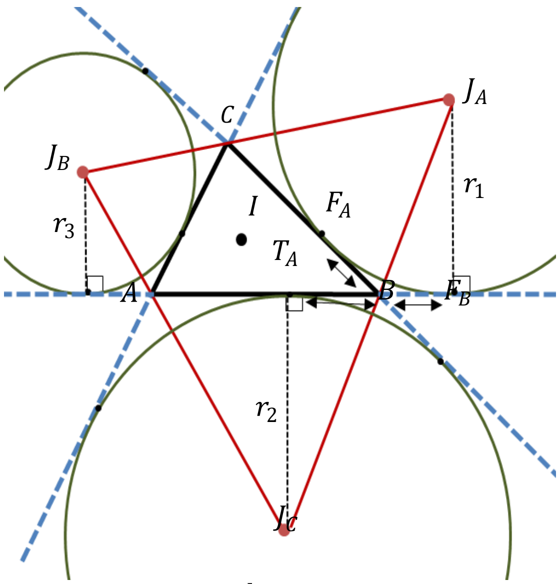
$$\frac{\overline{J_B B}}{\overline{BI}}.\frac{\overline{IJ_A}}{\overline{J_A A}}.\frac{\overline{AJ_C}}{\overline{J_C J_B}} = (-1).(-1).(-1) \,,$$

$$\frac{\overline{J_B B}}{\overline{BI}} \cdot \frac{\overline{IJ_A}}{\overline{J_A A}} \cdot \frac{\overline{AJ_C}}{\overline{J_C J_B}} = -1\,.$$

Karena memenuhi Teorema Transversal Menelaus, maka terbukti bahwa titik $J_A$, $B$, dan $J_C$adalah kolinier. Dengan cara yang sama maka titik $J_A$, $C$, dan $J_B$ serta titik $J_B$, $A$, dan $J_C$ adalah kolinier. ■

Telah dibuktikan bahwa jika dua buah titik pusat lingkaran singgung luar $\Delta ABC$ saling dihubungkan maka menyinggung salah satu titik puncak $\Delta ABC$. Sehingga dalam menentukan panjang sisi segitiga *excentral* dapat digunakan dalil phytagoras.

Pada Gambar 10.1.3, lingkaran singgung $J_A$ menyinggung $\overline{BC}$, dengan menarik garis dari titik pusat ke titik singgung $F_B$, maka $\overline{J_A F_B}$ merupakan jari-jari lingkaran $J_A$. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut




Gambar 10.1.3

Perhatikan panjang $\overline{J_A B}$,

$$\overline{J_A B}^{\,2} = \overline{J_A F_B}^{2} + \overline{BF_B}^{2}\,.$$

Ingat sebelumnya sudah diperoleh

$$\overline{J_A B}^{\,2} = \left(\frac{L\ \Delta ABC}{(s-a)}\right)^2 + (s-c)^2\,. \tag{10.1.4}$$

Berdasarkan formula Heron, maka nilai luas pada $\Delta ABC$ berlaku

$$L\ \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,, \tag{10.1.5}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.9) ke (10.1.4) diperoleh

$$\overline{J_A B}^{\,2} = \left(\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{(s-a)^2}\right)^2 + (s-c)^2$$

$$= \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-a)^2} + (s-c)^2$$

$$= \frac{(s-c)}{(s-a)}.\big(s(s-b) + (s-a)(s-c)\big)$$

$$= \frac{(s-c)}{(s-a)}.(s^2 - sb + s^2 - sa - sc + ac)$$

$$= \frac{(s-c)}{(s-a)}.(2s^2 - s(b+a+c) + ac)$$

$$\overline{J_A B}^{\,2} = \frac{(s-c)}{(s-a)}.(2s^2 - s(2s) + ac)$$

$$\overline{J_A B}^{\,2} = \frac{(s-c)}{(s-a)}.ac\,,$$

sehingga diperoleh

$$\overline{J_A B} = \sqrt{\frac{(s-c)}{(s-a)}.ac}\,. \tag{10.1.6}$$

Dengan cara yang sama, untuk panjang $\overline{J_C B}$

$$\overline{J_C B}^{\,2} = \overline{J_C T_A}^2 + \overline{B T_A}^2$$

$$\overline{J_C B}^{\,2} = \left(\frac{L\ \Delta ABC}{(s-c)}\right)^2 + (s-a)^2\,,$$

maka diperoleh

$$\overline{J_C B} = \sqrt{\frac{(s-a)}{(s-c)}.ac}\,. \tag{10.1.7}$$

Dengan menjumlahkan persamaan (10.1.6) dan (10.1.7) akan diperoleh

$$\overline{J_A J_C} = \overline{J_A B} + \overline{J_C B}$$

$$\overline{J_A J_C} = \sqrt{\frac{(s-c)}{(s-a)}.ac} + \sqrt{\frac{(s-a)}{(s-c)}.ac}\,. \tag{10.1.8}$$

Untuk memudahkan proses penjumlahan, misalkan

$$\overline{J_A B} = \sqrt{\frac{(s-c)}{(s-a)}.ac} = y \tag{10.1.9}$$

dan

$$\overline{J_C B} = \sqrt{\frac{(s-a)}{(s-c)}.ac} = z\,. \tag{10.1.10}$$

Substitusikan persamaan (10.1.9) dan (10.1.10) ke (10.1.8) maka

$$\overline{J_A J_C} = y + z$$

$$\overline{J_A J_C} = \sqrt{(y+z)^2}$$

$$\overline{J_A J_C} = \sqrt{y^2 + z^2 + 2yz}\,, \tag{10.1.11}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (10.1.9) sebagai $y$ dan (10.1.10) sebagai $z$ ke persamaan (10.1.11) diperoleh

$$\overline{J_A J_C} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{s-c}{s-a}(ac)}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{s-a}{s-c}(ac)}\right)^2 + 2\left(\sqrt{\frac{s-a}{s-c}(ac).\frac{s-c}{s-a}(ac)}\right)}$$

$$\overline{J_A J_C} = \sqrt{\frac{s-c}{s-a}(ac) + \frac{s-a}{s-c}(ac) + 2ac}$$

$$= \sqrt{ac\left(\frac{s-c}{s-a} + \frac{s-a}{s-c} + 2\right)}$$

$$= \sqrt{ac\left(\frac{(s-c)(s-c) + (s-a)(s-a) + 2(s-a)(s-c)}{(s-a)(s-c)}\right)}$$

$$\overline{J_A J_C} = \sqrt{ac\left(\frac{s^2 + c^2 - 2sc + s^2 + a^2 - 2sa + 2s^2 - 2sa - 2sc + 2ac}{s^2 - sa - sc + ac}\right)}$$

karena $s = \frac{a+b+c}{2}$ dan dilakukan penyederhanaan maka

$$\overline{J_A J_C} = \sqrt{ac\left(\frac{b^2}{\frac{-a^2+b^2-c^2-2ac}{4}}\right)}$$

$$\overline{J_A J_C} = \sqrt{\frac{4acb^2}{b^2-(a-c)^2}}$$

$$\overline{J_A J_C} = 2b\sqrt{\frac{ac}{b^2-(a-c)^2}}\,. \qquad (10.1.12)$$

dengan cara yang sama dalam memperoleh persamaan (10.1.12) maka diperoleh

$$\overline{J_A J_B} = 2c\sqrt{\frac{ab}{c^2-(a-b)^2}}$$

$$\overline{J_B J_C} = 2a\sqrt{\frac{bc}{a^2-(b-c)^2}}$$

Panjang $\overline{J_B J_C}$, $\overline{J_A J_C}$, dan $\overline{J_A J_B}$ merupakan sisi-sisi pada $\Delta J_A J_B J_C$. Misalkan $s_x$ merupakan setengah keliling $\Delta J_A J_B J_C$ maka

$$s_x = \frac{(\overline{J_B J_C} + \overline{J_A J_C} + \overline{J_A J_B})}{2}$$

$$s_x = a\sqrt{\frac{bc}{a^2-(b-c)^2}} + b\sqrt{\frac{ac}{b^2-(a-c)^2}} + c\sqrt{\frac{ab}{c^2-(a-b)^2}}\,. \qquad (10.1.13)$$

Untuk memudahkan dalam menentukan luas $\Delta J_A J_B J_C$, misalkan

$$A = a\sqrt{\frac{bc}{a^2-(b-c)^2}},$$

$$B = b\sqrt{\frac{ac}{b^2-(a-c)^2}},$$

dan

$$C = c\sqrt{\frac{ab}{c^2-(a-b)^2}}\,.$$

Maka

$$\overline{J_BJ_C} = 2a\sqrt{\frac{bc}{a^2-(b-c)^2}} = 2A\,, \qquad (10.1.14)$$

$$\overline{J_AJ_C} = 2b\sqrt{\frac{ac}{b^2-(a-c)^2}} = 2B\,, \qquad (10.1.15)$$

dan

$$\overline{J_AJ_B} = 2c\sqrt{\frac{ab}{c^2-(a-b)^2}} = 2C\,. \qquad (10.1.16)$$

Substitusikan persamaan (10.1.14), (10.1.15), dan (10.1.16) ke (10.1.13) maka diperoleh

$$s_x = \frac{2A+2B+2C}{2}$$

$$s_x = A+B+C\,. \qquad (10.1.17)$$

Selanjutnya akan ditentukan luas $\Delta J_AJ_BJ_C$ dengan menggunakan formula Heron terhadap $\Delta J_AJ_BJ_C$, sehingga

$$L\,\Delta J_AJ_BJ_C = \sqrt{s_x.(s_x-\overline{J_BJ_C}).(s_x-\overline{J_AJ_C}).(s_x-\overline{J_AJ_B})}\,, \qquad (10.1.18)$$

dengan mensubstitusikan persamanaan (3.18), (10.1.15), (10.1.16) dan (10.1.17) ke (10.1.18) maka diperoleh

$$L\,\Delta J_AJ_BJ_C = \sqrt{(A+B+C).(-A+B+C).(A-B+C).(A+B-C)}$$

$$= \sqrt{(-A^2+B^2+C^2+2BC).(A^2-B^2-C^2+2BC)}$$

$$L\,\Delta J_AJ_BJ_C = \sqrt{-A^4-B^4-C^4+2A^2B^2+2A^2C^2+2B^2C^2}\,. \qquad (10.1.19)$$

Substitusikan persamaan (3.18), (10.1.15), dan (10.1.16) ke (10.1.19) maka diperoleh

$$L\,\Delta J_AJ_BJ_C = \Bigg(-\frac{a^4b^2c^2}{(a+b-c)^2(a-b+c)^2} - \frac{a^2b^4c^2}{(a+b-c)^2(-a+b+c)^2}$$

$$-\frac{a^2b^2c^4}{(a-b+c)^2(-a+b+c)^2}$$
$$+\frac{2a^3b^3c^2}{(a+b-c)^2(a-b+c)(-a+b+c)}$$
$$+\frac{2a^3b^2c^3}{(a+b-c)(a-b+c)^2(-a+b+c)}$$
$$\left.+\frac{2a^2b^3c^3}{(a+b-c)(-a+b+c)^2(a-b+c)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (10.1.20)$$

dengan menyamakan penyebut pada persamaan (10.1.20) maka diperoleh

$$L\ \Delta J_AJ_BJ_C = \frac{abc.\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)},$$

karena $s = \frac{a+b+c}{2}$ maka

$$L\ \Delta J_AJ_BJ_C = \frac{abc.\sqrt{2s.2(s-a).2(s-b).2(s-c)}}{8(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$L\ \Delta J_AJ_BJ_C = \frac{4abc.\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{8(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (10.1.21)$$

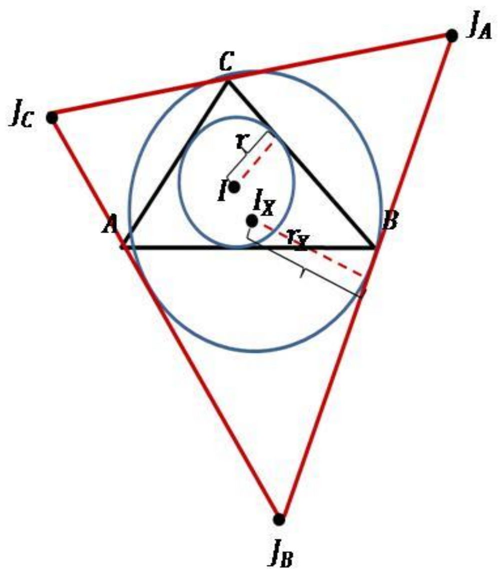
Pada persamaan (10.1.5) nilai $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ merupakan nilai $L\ \Delta ABC$, maka dari persamaan (10.1.21) diperoleh

$$L\ \Delta J_AJ_BJ_C = \frac{abc}{2\frac{L\ \Delta ABC^2}{s}}.L\ \Delta ABC$$
$$= \frac{abc.L\ \Delta ABC}{2}.\frac{s}{L\ \Delta ABC^2}$$
$$L\ \Delta J_AJ_BJ_C = \frac{abc.s}{2L\ \Delta ABC}. \qquad (10.1.22)$$

Dari persamaan (10.1.22) ditunjukkan bahwa nilai $L\ \Delta J_AJ_BJ_C$ adalah perkalian sisi-sisi $\Delta ABC$ dengan setengah kelilingnya dibagi dua kali $L\ \Delta ABC$.

## 10.2. Perbandingan Jari-Jari

Pada terdahulu telah diperoleh perbandingan luas antara $\Delta J_A J_B J_C$ dengan $\Delta ABC$. Selanjutnya pada subbab ini, akan ditentukan perbandingan jari-jari lingkaran dalam pada $\Delta J_A J_B J_C$ dan $\Delta ABC$. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar 10.2.1 berikut




Gambar 10.2.1

Lingkaran dengan titik pusat $I_x$ merupakan lingkaran dalam $\Delta J_A J_B J_C$ dengan jari-jari $r_x$. Panjang $r$ adalah

$$r = \frac{L\,\Delta ABC}{s} \qquad (10.2.1)$$

atau

$$L\,\Delta ABC = r.s\,. \qquad (10.2.2)$$

Untuk menentukan panjang jari-jari lingkaran dalam $\Delta J_A J_B J_C$, dengan menggunakan sisi-sisi $\Delta J_A J_B J_C$ dan cara yang sama dalam memperoleh persamaan (10.2.1) diperoleh

$$r_x = \frac{L\,\Delta J_A J_B J_C}{s_x}\,. \qquad (10.2.3)$$

Substitusikan persamaan (10.1.22) ke (10.2.3) maka diperoleh

$$r_x = \frac{abc.s.\frac{1}{2L\ \Delta ABC}}{s_x}$$

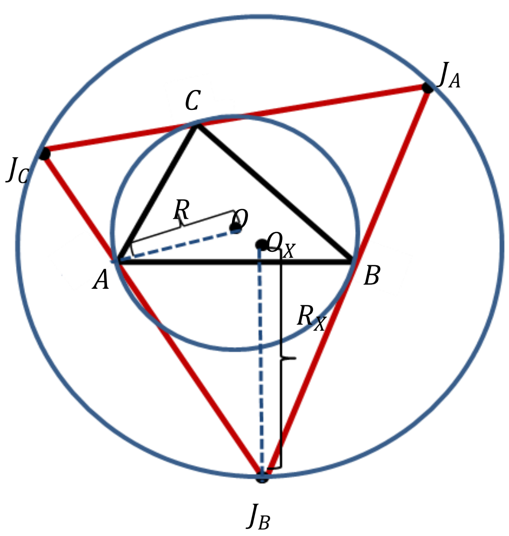
$$r_x = \frac{abc.s}{2L\ \Delta ABC}.\frac{1}{s_x}. \tag{10.2.4}$$

Substitusikan persamaan (3.28) ke (10.2.4) diperoleh

$$r_x = \frac{abc.s}{2r.s}.\frac{1}{s_x}$$

$$r_x = \frac{abc}{2r.s_x}. \tag{10.2.5}$$

Dari persamaan (10.2.5) ditunjukkan bahwa nilai jari-jari lingkaran dalam dari $\Delta J_A J_B J_C$ adalah perkalian sisi-sisi $\Delta ABC$ dibagi dua kali setengah keliling $\Delta J_A J_B J_C$ kali jari-jari lingkaran dalam $\Delta ABC$. Selanjutnya, tentukan *circumcenter* $\Delta J_A J_B J_C$ misalkan titik $O_x$ sehingga diperoleh lingkaran luar dengan $O_x$ sebagai titik pusatnya. Kemudian akan ditentukan perbandingan jari-jari lingkaran luar antara $\Delta J_A J_B J_C$ dengan $\Delta ABC$. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut,




Gambar 10.2.2.

Dari Gambar 10.2.2, lingkaran dengan titik pusat $O_x$ merupakan lingkaran luar $\Delta J_A J_B J_C$ dengan jari-jari $R_x$. Panjang $R$ adalah

$$R = \frac{abc}{4L\ \Delta ABC}\,. \tag{10.2.5}$$

Untuk menentukan panjang jari-jari lingkaran dalam $\Delta J_A J_B J_C$, dengan menggunakan sisi-sisi $\Delta J_A J_B J_C$ dan cara yang sama dalam memperoleh persamaan (10.2.6) diperoleh

$$R_x = \frac{2A.2B.2C}{4L\ \Delta\ J_A J_B J_C}\,. \tag{10.2.7}$$

Substitusikan persamaan (10.1.22) ke (10.2.7) diperoleh

$$R_x = \frac{2ABC}{abc.s.\frac{1}{2L\ \Delta ABC}} \tag{10.2.8}$$

dengan mengalikan $abc.s\ .\frac{1}{2L\ \Delta ABC}$ dengan $\frac{4}{4}$ maka dari persamaan (10.2.8) diperoleh

$$R_x = \frac{2ABC}{\frac{abc.s}{2L\ \Delta ABC}.\frac{4}{4}}\,. \tag{10.2.9}$$

Substitusikan persamaan (10.2.6) ke (10.2.9) diperoleh

$$R_x = \frac{2ABC}{\frac{4s.R}{2}}$$

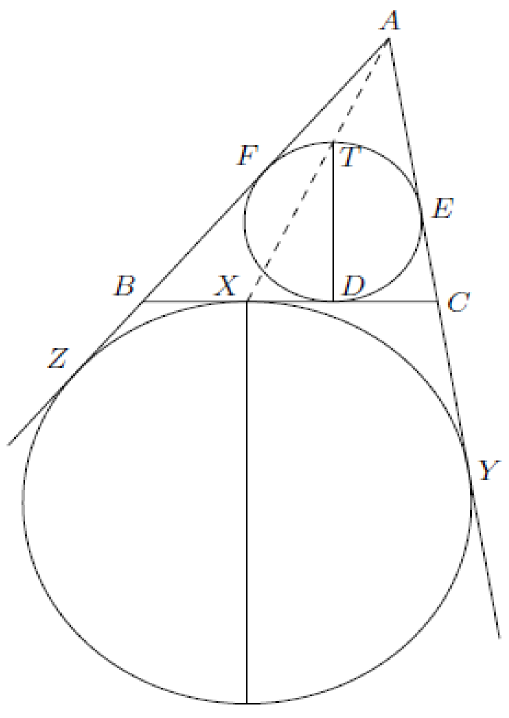
$$= \frac{2ABC}{4s.R}.2$$

$$R_x = \frac{ABC}{2s.R}\,. \tag{10.2.10}$$

Dari persamaan (10.2.10) ditunjukkan bahwa nilai jari-jari lingkaran luar dari $\Delta J_A J_B J_C$ adalah perkalian sisi-sisi $\Delta J_A J_B J_C$ dibagi setengah keliling $\Delta ABC$ kali jari-jari lingkaran luar $\Delta ABC$.

**Latihan 13.**

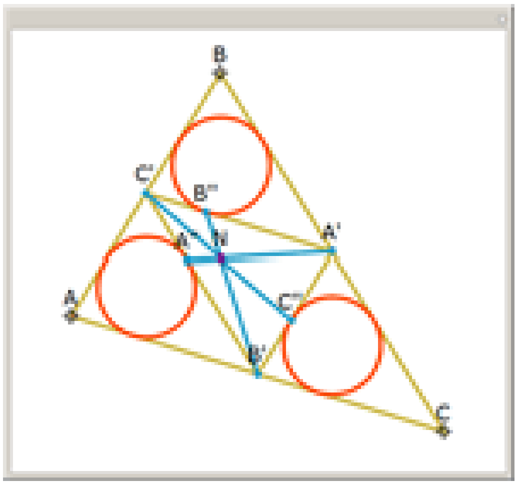
1. Tunjukkan bahwa garis bagi $\angle A$, garis bagi sudut luar dari $\angle B$ dan garis bagi sudut luar dari $\angle C$ berpotongan di satu titik.
2. Perhatikan gambar 10.1.1 dan tunjukkan bahwa garis $J_A$,B,$J_C$ adalah kolinear.
3. Hitunglah luas segitiga $J_aJ_BJ_C$ dengan bebeapa alternative.
4. Untuk sebarang segitiga siku-siku, berapakah perbandingan Jari-jari lingkaran dalam dan lingkaran luar antara segitiga excentral dan segitiga asal
5. Berikan Alternatif untuk menghitung panjang $R_X$
6. Untuk sebarang segitiga siku-siku sama kaki, kontruksilah lingkaran singgung luarnya dan tentukan manakah lingkaran singgung luar yang mempunyai luas terbesar
7. Perhatikan gambar di bawah ini




Jika titik X adalah titik singgung lingkaran singgung luar pada sisi BC, dan buat garis AX dengan DT adalah diameter lingkaran kecil. Berapakah panjang DT.

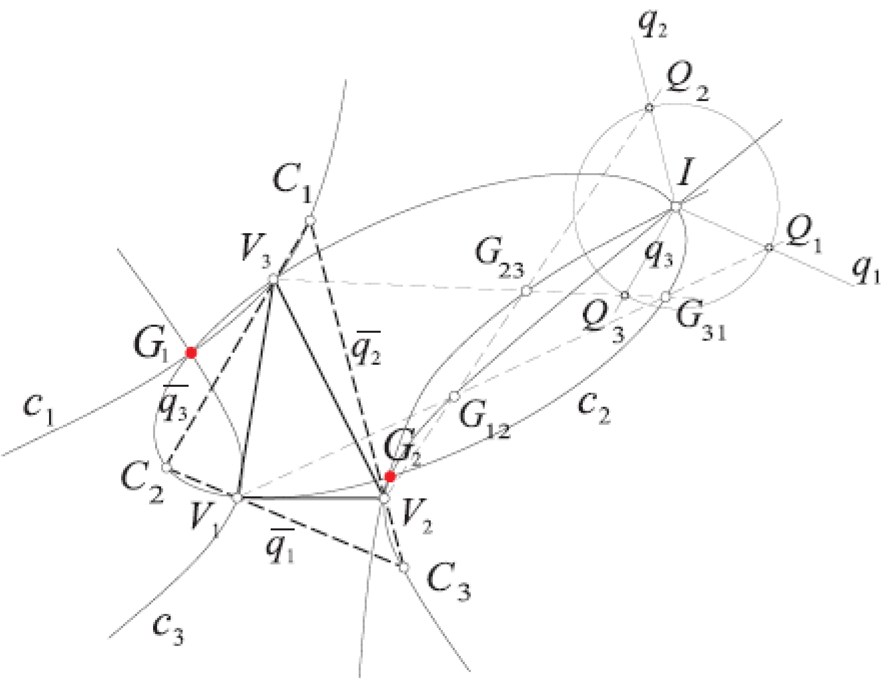
8. Perhatikan kembali gambar soal no 7 di atas, berapakah perbandingkan jari-jari lingkaran besar dan lingkaran kecil.
9. Kembali untuk gambar soal no 7, berapakah luas segitiga AXC.

10. **)Perhatikan gambar disebelah yang kontruksinya sama dengan soal nomor 10 latihan 20. Hitunglah masing-masing panjang jari-jari lingkaran tersebut



11. Berapakah luas $\Delta A'B'C'$ dan $\Delta A"B"C"$ (perhitungan mesti menggunakan panjang sisi $AB = c$, $BC = a$ dan $CA = b$)

12. Perhatikan gambar di bawah ini yang disebut titik gergonne pada irisan kerucut.



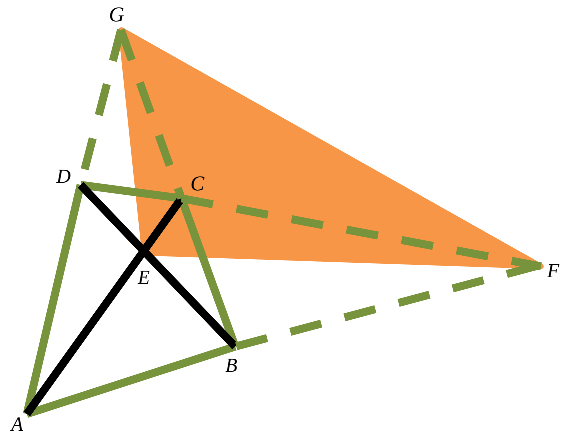
Mengacu pada kontruksi titik gergonne pada segitiga, cobalah untuk merumuskan bagaimana cara mengkontruksi gergonne pada irisan kerucut tersebut.

13. **). Kembali dengan memperhatikan gambar pada soal nomor 12. Berapakah luas segitiga $V_1V_2V_3$

14. **). Kembali dengan memperhatikan gambar pada soal nomor 12. Berapakah luas segitiga $C_1C_2C_3$
15. Perhatikan lagi gambar soal nomor 12. Berapakah panjang jari-jari lingkaran yang melalui $Q_1Q_2Q_3$.

**10.3. Luas Segitiga Titik Diagonal pada Segiempat Siklik**

Segitiga titik diagonal terbentuk dari segiempat konveks dimana sisi-sisinya tidak sama panjang dan tidak sejajar. Jika terdapat segiempat konveks *ABCD*, garis *AD*, *BC* bertemu dititik *G*, garis *AC*, *BD* bertemu dititik *E* dan garis *AB*, *DC* bertemu dititik *F*, maka segitiga *EFG* adalah segitiga titik diagonal. Ilustrasi segitiga titik diagonal adalah seperti Gambar 10.3.1.




Gambar 10.3.1.

Selanjutnya, dibahas luas segitiga titik diagonal pada segiempat siklik. Pembahasan hanya meliputi segiempat siklik dan bentuk khusus dari segiempat siklik, trapesium (*trapezoid*) dan layang-layang (*kite*). Berikut ini diberikan teorema luas segitiga titik diagonal pada segiempat siklik dan bentuk khusus dari segiempat siklik beserta.

Pada bagian ini akan dibahas mengenai luas segitiga titik diagonal pada segiempat siklik. Adapun luas segitiga titik diagonal dengan panjang semua sisi segiempat siklik diketahui dinyatakan dalam teorema berikut.

**Teorema 10.3.1.** Jika $a$, $b$, $c$ dan $d$ adalah panjang sisi-sisi pada segiempat siklik, maka luas segitiga titik diagonal adalah

$$L\Delta EFG = \frac{2abcdL\square ABCD}{|a^2 - c^2||b^2 - d^2|}$$

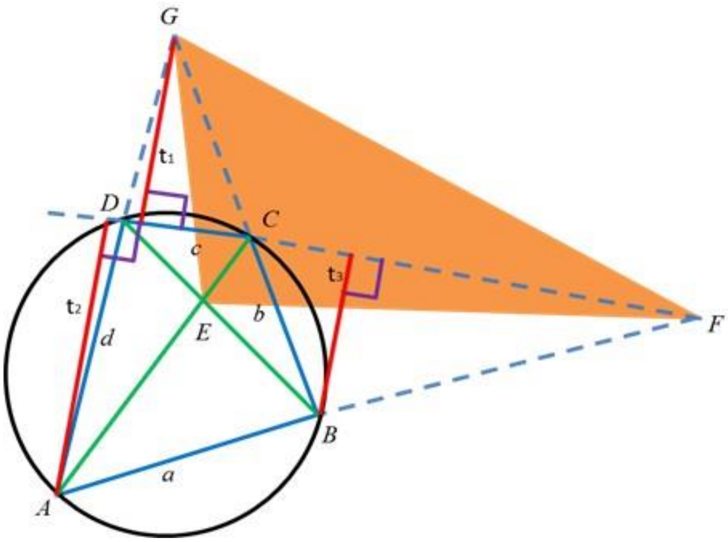
dengan

$$L\square ABCD = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

dan

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Perhatikan Gambar 10.3.2.




Gambar 10.3.2.

**Bukti.** Perhatikan Gambar 10.3.2, diberikan $\Delta ABC$, $\Delta ADC$, $\Delta BAD$ dan $\Delta BCD$, sehingga diperoleh

$$L\Delta ABC + \mathrm{L}\Delta ADC = L\Delta BAD + \mathrm{L}\Delta BCD. \qquad (10.3.1)$$

Perhatikan $\Delta EFG$, maka

$$L\Delta EFG = L\Delta FGC + L\Delta FCE + L\Delta GCE. \tag{10.3.2}$$

Karena $L\Delta FGC$, $L\Delta FCE$ dan $L\Delta GCE$ belum diketahui, maka akan dicari terlebih dahulu $L\Delta FGC$, $L\Delta FCE$ dan $L\Delta GCE$. Adapun perbandingan luas $\Delta FGC$ dan $\Delta GCD$ dengan tinggi $t_1$ adalah

$$\frac{L\Delta FGC}{L\Delta GCD} = \frac{\frac{1}{2}t_1 FC}{\frac{1}{2}t_1 DC}$$

$$\frac{L\Delta FGC}{L\Delta GCD} = \frac{FC}{DC}. \tag{10.3.3}$$

Selanjutnya perbandingan luas $\Delta FCA$ dan $\Delta ADC$ dengan tinggi $t_2$ adalah

$$\frac{L\Delta FCA}{L\Delta ADC} = \frac{\frac{1}{2}t_2 FC}{\frac{1}{2}t_2 DC}$$

$$\frac{L\Delta FCA}{L\Delta ADC} = \frac{FC}{DC}. \tag{10.3.4}$$

Dari persamaan (10.3.3) dan (10.3.4) diperoleh

$$\frac{L\Delta FGC}{L\Delta GCD} = \frac{L\Delta FCA}{L\Delta ADC}$$

$$L\Delta FGC = \frac{L\Delta GCD \times L\Delta FCA}{L\Delta ADC}. \tag{10.3.5}$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti memperoleh persamaan (10.3.5), maka $L\Delta FCE$ dan $L\Delta GCE$ adalah

$$L\Delta FCE = \frac{L\Delta FCA \times L\Delta CEB}{L\Delta ABC} \tag{10.3.6}$$

$$L\Delta GCE = \frac{L\Delta CEB \times L\Delta GCD}{L\Delta BCD}. \tag{10.3.7}$$

Selanjutnya, karena $L\Delta FCA$, $L\Delta CEB$ dan $L\Delta GCD$ juga belum diketahui, maka akan dicari $L\Delta FCA$, $L\Delta CEB$ dan $L\Delta GCD$. Dengan menggunakan perbandingan luas segitiga pada $\Delta FCA$ dan $\Delta ADC$ dengan tinggi $t_2$, diperoleh

$$\frac{L\Delta FCA}{L\Delta ADC}=\frac{\frac{1}{2}t_2FC}{\frac{1}{2}t_2DC}$$

$$\frac{L\Delta FCA}{L\Delta ADC}=\frac{FC}{DC}. \tag{10.3.8}$$

Selanjutnya perbandingan luas $\Delta FCB$ dan $\Delta BCD$ dengan tinggi $t_3$ adalah

$$\frac{L\Delta FCB}{L\Delta BCD}=\frac{\frac{1}{2}t_2FC}{\frac{1}{2}t_2DC}. \tag{10.3.9}$$

Persamaaan (10.3.9) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{L\Delta FCB}{L\Delta BCD}=\frac{FC}{DC}. \tag{10.3.10}$$

Dari persamaan (10.3.8) dan (10.3.10) diperoleh

$$\frac{L\Delta FCA}{L\Delta ADC}=\frac{L\Delta FCB}{L\Delta BCD}.$$

Karena $L\Delta FCB=L\Delta FCA-L\Delta ABC$ (lihat Gambar 10.3.1), maka

$$\frac{L\Delta FCA}{L\Delta ADC}=\frac{L\Delta FCA-L\Delta ABC}{L\Delta BCD}$$

$$L\Delta FCA\times L\Delta BCD=L\Delta FCA\times L\Delta ADC-L\Delta ABC\times L\Delta ADC$$

$$L\Delta FCA(L\Delta ADC-L\Delta BCD)=L\Delta ABC\times L\Delta ADC$$

$$L\Delta FCA=\frac{L\Delta ADC\times L\Delta ABC}{L\Delta ADC-L\Delta BCD}. \tag{10.3.11}$$

Dengan menggunakan cara yang sama untuk memperoleh persamaan (10.3.11), maka $L\Delta CEB$ dan $L\Delta GCD$ adalah

$$L\Delta CEB=\frac{L\Delta BCD\times L\Delta ABC}{L\Delta ADC+L\Delta ABC} \tag{10.3.12}$$

$$L\Delta GCD=\frac{L\Delta ADC\times L\Delta BCD}{L\Delta ABC-L\Delta BCD}. \tag{10.3.13}$$

Substitusikan persamaan (10.3.11), (10.3.12) dan (10.3.13) pada persamaan (10.3.5), (10.3.6) dan (10.3.7), kemudian substitusikan pada persamaan (10.3.2), sehingga diperoleh

$$L\Delta EFG=\frac{\left(\frac{L\Delta ADC\times L\Delta BCD}{L\Delta ABC-L\Delta BCD}\right)\left(\frac{L\Delta ADC\times L\Delta ABC}{L\Delta ADC-L\Delta BCD}\right)}{L\Delta ADC}$$
$$+\frac{\left(\frac{L\Delta ADC\times L\Delta ABC}{L\Delta ADC-L\Delta BCD}\right)\left(\frac{L\Delta BCD\times L\Delta ABC}{L\Delta ADC+L\Delta ABC}\right)}{L\Delta ABC}$$
$$+\frac{\left(\frac{L\Delta BCD\times L\Delta ABC}{L\Delta ADC+L\Delta ABC}\right)\left(\frac{L\Delta ADC\times L\Delta BCD}{L\Delta ABC-L\Delta BCD}\right)}{L\Delta BCD}. \quad (10.3.14)$$

Misalkan $h=L\Delta ADC$, $i=L\Delta BCD$ dan $j=L\Delta ABC$, maka persamaan (10.3.14) menjadi

$$L\Delta EFG=\frac{\left(\frac{h\times i}{j-i}\right)\left(\frac{h\times j}{h-i}\right)}{h}+\frac{\left(\frac{h\times j}{h-i}\right)\left(\frac{i\times j}{h+j}\right)}{j}+\frac{\left(\frac{i\times j}{h+j}\right)\left(\frac{h\times i}{j-i}\right)}{i}$$
$$=\frac{h^2ij}{h(j-i)(h-i)}+\frac{hij^2}{j(h-i)(h+j)}+\frac{hi^2j}{i(h+j)(j-i)}$$
$$=\frac{hij(h+j)+hij(j-i)+hij(h-i)}{(h+j)(j-i)(h-i)}$$
$$=\frac{h^2ij+hij^2+hij^2-hi^2j+h^2ij-hi^2j}{(h+j)(j-i)(h-i)}$$
$$=\frac{2hij(h+j-i)}{(h+j)(j-i)(h-i)}$$
$$L\Delta EFG=\frac{2\times L\Delta ADC\times L\Delta BCD\times L\Delta ABC(L\Delta ADC+L\Delta ABC-L\Delta BCD)}{(L\Delta ADC+L\Delta ABC)(L\Delta ABC-L\Delta BCD)(L\Delta ADC-L\Delta BCD)}.$$

Berdasarkan persamaan (10.3.1) diperoleh $L\Delta BAD=L\Delta ABC+L\Delta ADC-L\Delta BCD$, maka

$$L\Delta EFG=\frac{2\times L\Delta ADC\times L\Delta BCD\times L\Delta ABC\times L\Delta BAD}{(L\Delta ADC+L\Delta ABC)(L\Delta ABC-L\Delta BCD)(L\Delta ADC-L\Delta BCD)}. \quad (10.3.15)$$

Berdasarkan persamaan (2.7), maka persamaan (10.3.15) menjadi

$$L\Delta EFG=\frac{2\times L\Delta ADC\times L\Delta BCD\times L\Delta ABC\times L\Delta BAD}{L\square ABCD(L\Delta ABC-L\Delta BCD)(L\Delta ADC-L\Delta BCD)}$$

$$= \frac{2}{L\square ABCD} \times$$

$$\frac{L\Delta ADC \times L\Delta BCD \times L\Delta ABC \times L\Delta BAD}{(L\Delta ABC \times L\Delta ADC - L\Delta ABC \times L\Delta BCD - L\Delta BCD \times L\Delta ADC + L\Delta BCD^2)}$$

$$= \frac{2 \times L\Delta ADC \times L\Delta BCD \times L\Delta ABC \times L\Delta BAD}{L\square ABCD(L\Delta ABC \times L\Delta ADC - L\Delta BCD(L\Delta ABC + L\Delta ADC - L\Delta BCD))}$$

$$L\Delta EFG = \frac{2 \times \Delta ADC \times \Delta BCD \times \Delta ABC \times \Delta BAD}{L\square ABCD(\Delta ABC \times \Delta ADC - \Delta BCD \times \Delta BAD)}. \qquad (10.3.16)$$

Perhatikan $\Delta ABC$ dan $\Delta ADC$ (lihat Gambar 10.3.2) dengan garis yang menghubungkan titik *A* dan *C*, dengan aturan kosinus diperoleh

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\angle ABC = c^2 + d^2 - 2cdcos\angle ADC. \qquad (10.3.17)$$

Dari teorema 2.2.2, maka $\angle ADC = 180^{\circ} - \angle ABC$, sehingga

$$cos\angle ADC = cos(180^{\circ} - \angle ABC)$$

$$cos\angle ADC = cos180^{\circ}cos\angle ABC + sin180^{\circ}sin\angle ABC$$

$$cos\angle ADC = -cos\angle ABC. \qquad (10.3.18)$$

Substitusikan persamaan (10.3.18) pada persamaan (10.3.17) diperoleh

$$a^2 + b^2 - 2abcos\angle ABC = c^2 + d^2 + 2cdcos\angle ABC$$

$$cos\angle ABC = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd}. \qquad (10.3.19)$$

Kemudian substitusikan persamaan (10.3.19) pada rumus kosinus setengah sudut,

$$\frac{\angle ABC}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\angle ABC}{2}}, \quad \text{diperoleh}$$

$$2cos^2\angle\frac{ABC}{2} = 1 + cos\angle ABC$$

$$= 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd}$$

$$= \frac{2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd}$$

$$2cos^2\angle\frac{ABC}{2}=\frac{(a+b+c-d)(a+b+d-c)}{2ab+2cd}. \qquad (10.3.20)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.20) dan (2.21) pada persamaan (10.3.20), maka persamaan (10.3.20) menjadi

$$2cos^2\angle\frac{ABC}{2}=\frac{(2s-d-d)(2s-c-c)}{2ab+2cd}. \qquad (10.3.21)$$

Persamaan (10.3.21) dapat disederhanakan menjadi

$$2cos^2\angle\frac{ABC}{2}=\frac{(2s-2d)(2s-2c)}{2(ab+cd)}$$

$$=\frac{4(s-d)(s-c)}{2(ab+cd)}$$

$$cos\angle\frac{ABC}{2}=\sqrt{\frac{(s-d)(s-c)}{ab+cd}}, \qquad (10.3.22)$$

dengan $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$. Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (10.3.19) pada rumus sinus setengah sudut

$$sin\frac{\angle ABC}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\angle ABC}{2}},$$

diperoleh

$$2sin^2\angle\frac{ABC}{2}=1-cos\angle ABC$$

$$=1-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}$$

$$=\frac{2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2}{2ab+2cd}$$

$$2sin^2\angle\frac{ABC}{2}=\frac{(b+c+d-a)(a+c+d-b)}{2ab+2cd}. \qquad (10.3.23))$$

Substitusikan persamaan (2.18) dan (2.19) pada persamaan (10.3.23)), maka

$$2sin^2\angle\frac{ABC}{2}=\frac{(2s-a-a)(2s-b-b)}{2ab+2cd}$$

$$=\frac{(2s-2a)(2s-2b)}{2(ab+cd)}$$

$$= \frac{4(s-a)(s-b)}{2(ab+cd)}$$

$$sin\angle\frac{ABC}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab+cd}}. \qquad (10.3.24)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (10.3.22) dan (10.3.24) pada rumus sinus sudut rangkap, $2sin\angle ABC = sin\angle ABCcos\angle ABC$, diperoleh

$$sin\angle ABC = 2sin\angle\frac{ABC}{2}cos\angle\frac{ABC}{2}$$

$$sin\angle ABC = 2\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab+cd}}\sqrt{\frac{(s-d)(s-c)}{ab+cd}}$$

$$sin\angle ABC$$

$$= \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ab+cd}. \qquad (10.3.25)$$

Dengan menggunakan cara yang sama untuk memperoleh persamaan (10.3.25), maka diperoleh

$$sin\angle BAD = \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ad+bc}. \qquad (10.3.26)$$

Berdasarkan teorema 2.2.2, maka diperoleh $sin\angle BAD = sin\angle BCD$ dan $sin\angle ABC = sin\angle ADC$. Dari persamaan (10.3.25) dan (10.3.26), maka fungsi trigonometri untuk rumus sudut pada segiempat siklik *ABCD* adalah :

$sin\angle ABC = \frac{2L\square ABCD}{ad+bc}$ dan $sin\angle ABC = \frac{2L\square ABCD}{ab+cd}$ dengan $L\square ABCD$ adalah $L\square ABCD = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. Gunakan persamaan (10.3.16) dan rumus luas segitiga pada $\Delta ADC$, $\Delta BCD$, $\Delta ABC$ dan $\Delta BAD$, maka diperoleh

$$L\Delta EFG = \frac{2\times\frac{cdsin\angle ADC}{2}\times\frac{bcsin\angle BCD}{2}\times\frac{absin\angle ABC}{2}\times\frac{adsin\angle BAD}{2}}{L\square ABCD\left(\frac{absin\angle ABC}{2}\times\frac{cdsin\angle ADC}{2}-\frac{bcsin\angle BCD}{2}\times\frac{adsin\angle BAD}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{a^2b^2c^2d^2}{8} sin^2\angle BAD \; sin^2\angle ABC}{\frac{abcd}{4} L\square ABCD(sin^2\angle ABC - sin^2\angle BAD)}$$

$$= \frac{\frac{abcd}{2} sin^2\angle BAD \; sin^2\angle ABC}{L\square ABCD(sin^2\angle ABC - sin^2\angle BAD)}. \tag{10.3.27}$$

Persamaan (10.3.26) dapat disederhanakan menjadi

$$L\Delta EFG = \frac{\frac{abcd}{2}}{L\square ABCD\left(\frac{1}{sin^2\angle BAD} - \frac{1}{sin^2\angle ABC}\right)}$$

$$= \frac{\frac{abcd}{2}}{\frac{L\square ABCD}{4L\square ABCD^2}((ad+bc)^2 - (ab+cd)^2)}$$

$$L\Delta EFG = \frac{2abcdL\square ABCD}{(ad+bc)^2 - (ab+cd)^2}.$$

Karena tidak diketahui sisi mana yang lebih panjang, maka diberi nilai mutlak pada $L\Delta EFG$, sehingga diperoleh

$$L\Delta EFG = \left|\frac{2abcdL\square ABCD}{(ab+cd)^2 - (ad+bc)^2}\right|$$

$$= \left|\frac{2abcdL\square ABCD}{(ab+cd+ad+bc)(ab+cd-ad-bc)}\right|$$

$$= \left|\frac{2abcdL\square ABCD}{(a+c)(b+d)(a-c)(b-d)}\right|$$

$$= \left|\frac{2abcdL\square ABCD}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)}\right|$$

$$L\Delta EFG = \frac{2abcdL\square ABCD}{|a^2-c^2||b^2-d^2|}. \qquad \blacksquare$$

Secara umum, untuk menentukan luas segitiga titik diagonal pada segiempat konveks berlaku rumus pada persamaan (10.3.15). Kasus khusus untuk luas segitiga titik diagonal tidak berlaku pada trapesium karena terdapat dua buah sisi yang berhadapan sama panjang. Tetapi pada layang-layang luas segitiga titik diagonal berlaku. Karena itu akan ditunjukkan bahwa pada trapesium tidak terdapat segitiga titik diagonal dengan membuktikan sebuah teorema. Trapesium yang akan dibahas adalah trapesium sama kaki yang merupakan bentuk khusus dari segiempat siklik. Berikut teorema 3.2.1 beserta pembuktiannya.

## 10.4. Luas Segitiga Titik Diagonal pada Trapesium dan Layang-Layang

- **Luas Segitiga Titik Diagonal pada Trapesium**

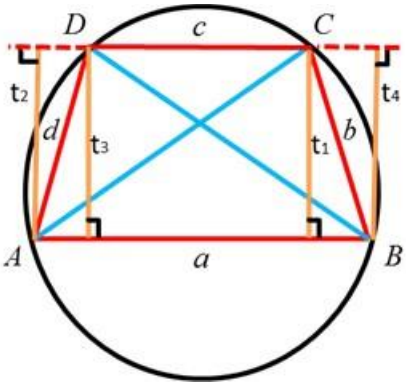
Pada bagian ini akan dibahas mengenai luas segitiga titik diagonal pada trapesium, dimana trapesium ini adalah trapesium sama kaki, trapesium sama kaki ini juga merupakan segiempat siklik sehingga trapesium ini memuat lingkaran luar.

Pada persamaan (10.3.15), jika $L\Delta ABC \times L\Delta ADC = L\Delta BAD \times L\Delta BCD$, maka luas segitiga titik diagonal tidak memenuhi. Untuk membuktikan luas segitiga titik diagonal tidak berlaku pada trapesium sama kaki, maka akan ditunjukkan bahwa pada trapesium sama kaki berlaku $L\Delta ABC \times L\Delta ADC = L\Delta BAD \times L\Delta BCD$. Berikut ini adalah teorema tentang $L\Delta ABC \times L\Delta ADC = L\Delta BAD \times L\Delta BCD$ berlaku pada trapesium sama kaki.

**Teorema \10.4.1** Segiempat konveks adalah trapesium jika dan hanya jika hasil kali luas segitiga yang terbentuk dari salah satu diagonal trapesium adalah sama dengan hasil kali luas segitiga yang terbentuk dari diagonal lainnya.

**Bukti.** Perhatikan Gambar 10.4.1, gunakan rumus luas segitiga pada $\Delta ABC$, $\Delta ADC$, $\Delta BAD$ dan $\Delta BCD$. Adapun $L\Delta ABC$ dengan tinggi $t_1$ adalah

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}at_1. \qquad (10.4.1)$$




Gambar 10.4.1

Dengan menggunakan sinus pada $\angle B$, maka diperoleh

$$sin\angle B = \frac{t_1}{b}$$

$$t_1 = bsin\angle B. \qquad (10.4.2)$$

Substitusikan persamaan (10.4.2) pada persamaan (10.4.1) sehingga diperoleh

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}absin\angle B. \qquad (10.4.3)$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti memperoleh persamaan (10.4.3) maka diperoleh $L\Delta ADC$ dengan tinggi $t_2$, $L\Delta BAD$ dengan tinggi $t_3$ dan $L\Delta BCD$ dengan tinggi $t_4$ adalah

$$L\Delta ADC = \frac{1}{2}cdsin\angle D \qquad (10.4.4)$$

$$L\Delta BAD = \frac{1}{2}adsin\angle A \qquad (10.4.5)$$

$$L\Delta BCD = \frac{1}{2}bcsin\angle C. \qquad (10.4.6)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (10.4.3), (10.4.4), (10.4.5) dan (10.4.6) pada $L\Delta ABC \times L\Delta ADC = L\Delta BAD \times L\Delta BCD$, maka diperoleh

$$L\Delta ABC \times L\Delta ADC = L\Delta BAD \times L\Delta BCD$$

$$\frac{absin\angle B}{2} \times \frac{cdsin\angle D}{2} = \frac{adsin\angle A}{2} \times \frac{bcsin\angle C}{2}$$

$$\frac{abcd}{4}(sin\angle B \times sin\angle D) = \frac{abcd}{4}(sin\angle A \times sin\angle C)$$

$$sin\angle B \times sin\angle D = sin\angle A \times sin\angle C. \qquad (10.4.7)$$

Adapun rumus identitas trigonometri $sin\angle B \times sin\angle D$ dan $sin\angle A \times sin\angle C$ adalah sebagai berikut

$$sin\angle B \times sin\angle D = \frac{1}{2}(\cos(\angle B - \angle D) - \cos(\angle B + \angle D)) \qquad (10.4.8)$$

$$sin\angle A \times sin\angle C = \frac{1}{2}(\cos(\angle A - \angle C) - \cos(\angle A + \angle C)). \qquad (10.4.9)$$

Substitusikan persamaan (10.4.8) dan (10.4.9) pada persamaan (10.4.7), maka persamaan (10.4.7) menjadi

$$\frac{1}{2}(\cos(\angle B - \angle D) - \cos(\angle B + \angle D)) = \frac{1}{2}(\cos(\angle A - \angle C) - \cos(\angle A + \angle C))$$

Karena trapesium sama kaki merupakan siklik, maka jumlah sudut yang berhadapan 180°, sehingga diperoleh $\cos(\angle B + \angle D) = \cos(\angle A + \angle C)$, maka

$$\frac{1}{2}(\cos(\angle B - \angle D) - \cos(\angle A + \angle C)) = \frac{1}{2}(\cos(\angle A - \angle C) - \cos(\angle A + \angle C))$$

$$\frac{1}{2}\cos(\angle B - \angle D) = \frac{1}{2}\cos(\angle A - \angle C)$$

$$\cos(\angle B - \angle D) = \cos(\angle A - \angle C). \qquad (10.4.10)$$

Sehingga diperoleh

$$(\angle B - \angle D) = (\angle A - \angle C)$$

$$\angle B + \angle C = \angle A + \angle D \qquad (10.4.11)$$

$$\angle A = \angle B + \angle C - \angle D. \qquad (10.4.12)$$

Pada kuadran ke-2 kosinus bernilai negative, maka persamaan (10.4.10) dapat dibuat menjadi

$$\cos(\angle B - \angle D) = \cos -(\angle A - \angle C).$$

$$\angle B - \angle D = -(\angle A - \angle C)$$

$$\angle A = \angle C + \angle D - \angle B. \qquad (10.4.13)$$

Karena garis $AB$ dan $CD$ sejajar, maka $\angle ADC + \angle DAB = 180°$. Sehingga dari persamaan (10.4.11) diperoleh

$$\angle B + \angle C = \angle A + \angle D = 180°. \qquad (10.4.14)$$

Dari persamaan (10.4.12) dan (10.4.13) diperoleh

$$\angle B + \angle C - \angle D = \angle C + \angle D - \angle B$$

$$2\angle B - 2\angle D = 0$$

$$\angle B = \angle D. \qquad (10.4.15)$$

Substitusikan persamaan (10.4.15) pada persamaan (10.4.13) sehingga diperoleh

$$\angle A = \angle C + \angle D - \angle D$$

$$\angle A = \angle C.$$

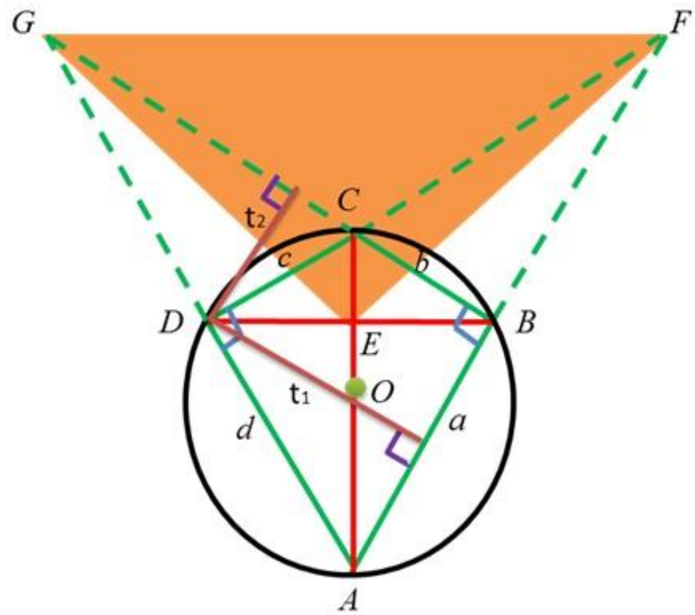
Dan karena $\angle A = \angle C$, maka persamaan (10.4.14) dapat diubah menjadi

$$\angle B + \angle A = \angle C + \angle D = 180°. \qquad (10.4.16)$$

Dari persamaan (10.4.14) dan (10.4.16), maka diperoleh bahwa $L\Delta ABC \times L\Delta ADC = L\Delta BAD \times L\Delta BCD$ berlaku untuk trapesium sama kaki sehingga terbukti tidak berlakunya rumus luas segitiga titik diagonal pada trapesium sama kaki dan juga tidak terbentuknya segitiga titik diagonal dikarenakan terdapat dua buah sisi berhadapan yang sama panjang. Selain itu diperoleh bahwa $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ dan $\angle D$ pada segiempat *ABCD* dapat membentuk sudut siku-siku atau 90°, sehingga garis $BC \parallel AD$ dan garis $AB \parallel CD$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $L\Delta ABC \times L\Delta ADC = L\Delta BAD \times L\Delta BCD$ juga berlaku pada segiempat dimana sisi-sisi yang berhadapan adalah sama panjang dan keempat sudut pada segiempat membentuk sudut 90°, seperti persegi dan persegi panjang. Ini berarti, pada persegi dan persegi panjang juga tidak terbentuk suatu segitiga titik diagonal.

- **Luas Segitiga Titik Diagonal pada Layang-layang**

Pada subbab ini akan dibahas mengenai luas segitiga titik diagonal pada layang-layang, dimana layang-layang ini adalah layang-layang siku-siku. Seperti yang dijelaskan pada bab 1, layang-layang siku-siku ini juga merupakan segiempat siklik sehingga layang-layang ini memuat lingkaran luar. Layang-layang siku-siku terbentuk dari dua segitiga siku-siku yang kongruen, artinya terdapat dua sudut yang berhadapan adalah 90°.




Gambar 10.4.2.

Perhatikan Gambar 10.4.2, misalkan panjang sisi-sisi sebuah layang-layang siku-siku *ABCD* adalah *AB* = $a$, *BC* = $b$, *CD* = $c$ dan *DA* = $d$ dan misalkan $\angle B = \angle D = 90°$. Berdasarkan Definisi 2.1.3, maka layang-layang siku-siku merupakan segiempat konveks sehingga $L\Delta EFG$ pada layang-layang siku-siku *ABCD* berlaku untuk persamaan (10.3.15).

Jika ditarik sebuah garis dari titik *A* ke titik *C*, sebut garis *AC* merupakan salah satu diagonal pada layang-layang siku-siku *ABCD* yang melewati titik pusat *O*, maka layang-layang siku-siku *ABCD* terbagi menjadi dua buah segitiga pada lingkaran luar yang sama yaitu $\Delta ABC$ dan $\Delta ADC$, jadi luas layang-layang siku-siku *ABCD* adalah $K = L\Delta ADC + L\Delta ABC$. Sehingga persamaan (10.3.15) menjadi

$$L\Delta EFG = \frac{2 \times L\Delta ADC \times L\Delta BCD \times L\Delta ABC \times L\Delta BAD}{K(L\Delta ABC - L\Delta BCD)(L\Delta ADC - L\Delta BCD)}. \qquad (10.4.17)$$

Adapun $L\Delta BAD$ dengan tingginya garis $t_1$ (lihat Gambar 10.4.2) adalah

$$L\Delta BAD = \frac{1}{2}at_1. \qquad (10.4.18)$$

Dengan menggunakan sinus pada $\angle A$, maka diperoleh

$$sin\angle A = \frac{t_1}{d}$$

$$t_1 = dsin\angle A. \qquad (10.4.19)$$

Substitusikan persamaan (10.4.19) pada persamaan (10.4.18) sehingga diperoleh

$$L\Delta BAD = \frac{1}{2} adsin\angle A \qquad (10.4.20)$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti memperoleh persamaan (10.4.20) maka diperoleh $L\Delta BCD$ dengan tinggi $t_2$ adalah

$$L\Delta BCD = \frac{1}{2} bcsin\angle C. \qquad (10.4.21)$$

Kemudian $L\Delta ADC$ dengan tinggi garis *CD* dan $L\Delta ABC$ dengan tinggi garis *CB* adalah

$$L\Delta ADC = \frac{1}{2} cd \qquad (10.4.22)$$

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2} ab. \qquad (10.4.23)$$

Substitusikan persamaan (10.4.20), (10.4.21), (10.4.22) dan (10.4.23) pada persamaan (10.4.17) diperoleh

$$L\Delta EFG = \frac{2 \times \frac{cd}{2} \times \frac{bcsin\angle C}{2} \times \frac{ab}{2} \times \frac{adsin\angle A}{2}}{K\left(\frac{ab}{2} \times \frac{cd}{2} - \frac{bcsin\angle C}{2} \times \frac{adsin\angle A}{2}\right)} \qquad (10.4.24)$$

Karena layang-layang *ABCD* merupakan siklik, maka $sin\angle A = sin\angle C$ sehingga persamaan (10.4.24) disederhanakan menjadi

$$L\Delta EFG = \frac{\frac{a^4b^4}{8} sin^2\angle A}{\frac{a^2b^2}{4} K(1 - sin^2\angle A)}$$

$$= \frac{\frac{a^2b^2}{2} sin^2\angle A}{K(1 - sin^2\angle A)}$$

$$L\Delta EFG = \frac{\frac{a^2b^2}{2}}{K\left(\frac{1}{sin^2\angle A} - 1\right)} \qquad (10.4.25)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan cara yang sama untuk mencari persamaan (10.3.26), maka fungsi trigonometri untuk rumus sudut pada layang-layang siku-siku $ABCD$ adalah

$$sin\angle A = \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ad+bc}. \tag{10.4.26}$$

Substitusikan $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ pada persamaan (10.4.26), maka

$$sin\angle A = \frac{2\sqrt{\left(\frac{b+c+d-a}{2}\right)\left(\frac{a+c+d-b}{2}\right)\left(\frac{a+b+d-c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)}}{ad+bc}$$

Pada layang-layang terdapat dua buah sisi yang sama panjang, yaitu $a = d$ dan $b = c$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} sin\angle A &= \frac{2\sqrt{\left(\frac{2b}{2}\right)\left(\frac{2a}{2}\right)\left(\frac{2a}{2}\right)\left(\frac{2b}{2}\right)}}{a^2+c^2} \\ &= \frac{2\sqrt{a^2b^2}}{a^2+c^2} \\ &= \frac{2ab}{a^2+c^2} \\ sin\angle A &= \frac{2K}{a^2+c^2}. \end{aligned} \tag{10.4.27}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (10.4.27) pada persamaan (10.4.25), maka

$$\begin{aligned} L\Delta EFG &= \frac{\frac{a^2b^2}{2}}{K\left(\frac{(a^2+b^2)^2}{4K^2}-1\right)} \\ &= \frac{\frac{a^2b^2}{2}}{\frac{1}{4K}((a^2+b^2)^2-4K^2)} \\ L\Delta EFG &= \frac{2a^2b^2K}{(a^2+b^2)^2-4K^2}. \end{aligned}$$

Karena $a = d$ dan $b = c$, maka dapat juga disimpulkan bahwa segitiga titik diagonal pada layang-layang siku-siku merupakan segitiga titik diagonal sama kaki.

## 10.5. Beberapa Alternatif Bukti Teorema Simson

Teorema Simson merupakan suatu teorema yang berlaku pada lingkaran luar segitiga (c*ircumcircle*). Teorema ini menyatakan tiga titik potong yang segaris dan terbentuk dari perpotongan garis pada sisi-sisi segitiga. Teorema Simson akan dibuktikan menggunakan tiga cara. Pembuktian pertama menggunakan garis yang sejajar. Pembuktian kedua menggunakan sudut bertolak belakang dan yang terakhir pembuktiannya menggunakan teorema Menelaus.

Pada sebarang segitiga $\Delta ABC$. Ambil sebuah titik dari masing-masing sisi $\Delta ABC$ sehingga membagi sisi-sisi $\Delta ABC$ sama panjang dan tarik garik yang tegak lurus dari titik tersebut. Kemudian ketiga garis yang tegak lurus tersebut akan berpotongan di satu titik. Titik itu dinamakan titik *circumcenter*, sehingga dapat dibuat lingkaran luar segitiga.

Kemudian ambil sebarang titik pada lingkaran luar segitiga dan anggap titik tersebut titik $P$. Tarik garis yang tegak lurus dari titik $P$ ke masing-masing sisi pada $\Delta ABC$ maka akan terbentuk titik potong pada masing-masing sisi $\Delta ABC$ yaitu titik $X$, $Y$, dan $Z$ sehingga apabila dihubungkan titik $X$, $Y$, dan $Z$ itu pasti segaris dan garis yang menghubungkan titik $X$, $Y$, dan $Z$ dinamakan garis Simson. Berikut diberikan teorema dengan beberapa alternatif buktinya.

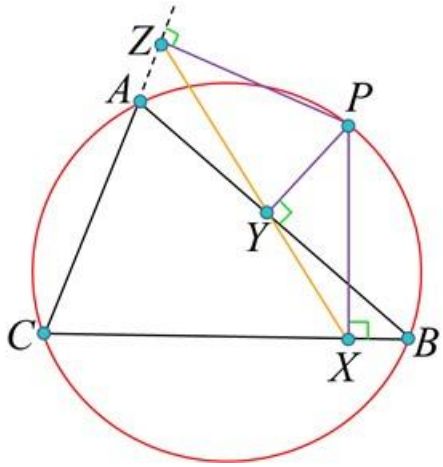
**Teorema 10.5.1 (Teorema Simson)** Diberikan sebarang $\Delta ABC$, dan titik $P$ pada lingkaran luar segitiga, kemudian $X$ , $Y$, dan $Z$ merupakan titik potong garis yang tegak lurus dari titik $P$ ke masing-masing $CB$, $BA$, dan perpanjangan sisi $AC$ pada $\Delta ABC$. Sehingga bila di hubungkan, titik $X$ , $Y$, dan $Z$ segaris.

***Bukti : Alternatif* 1.**

Pada alternatif 1 ini akan dibuktikan teorema Simson menggunakan garis sejajar. Dua garis yang dipotong oleh sebuah garis dikatakan sejajar apabila terdapat dua sudut yang berhadapan, berseberangan luarnya atau berseberangan dalamnya sama besar. Sehingga untuk membuktikan dua garis yang sejajar cukup dengan menunjukkan dua sudut yang bersesuaiannya sama besar berdasarkan postulat garis sejajar.

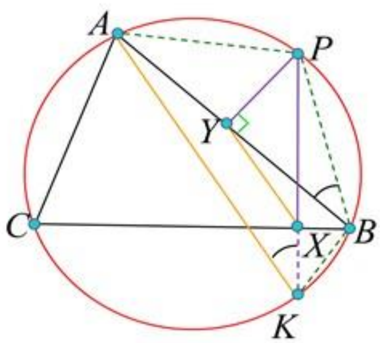
Pembuktian ini akan dilakukan dengan dua kasus, kasus pertama jika penarikan garis yang tegak lurus dari titik *P* ke masing-masing sisi segitiga tidak ada yang bersinggungan pada lingkaran, kasus kedua jika penarikan garis yang tegak lurus dari titik *P* ke masing-masing sisi segitiga ada yang bersinggungan pada lingkaran.

Untuk Kasus pertama akan dibuktikan titik *X*, *Y*, dan *Z* segaris jika penarikan garis yang tegak lurus dari titik *P* ke masing-masing sisi segitiga tidak ada yang bersinggungan pada lingkaran. Perhatikan Gambar 10.5.1.




Gambar 10.5.1.

Perpanjang sisi *PX* sehingga berpotongan dengan lingkaran di titik *K*. Kemudian dari titik *K* hubungkan ke titik *A*, sehingga didapat garis *AK* merupakan garis bantu untuk membuktikan *X*, *Y*, dan *Z* segaris. Pertama, akan dibuktikan *XY* // *AK* dengan menunjukkan $\angle PKA = \angle PXY$. Perhatikan Gambar 10.5.2.

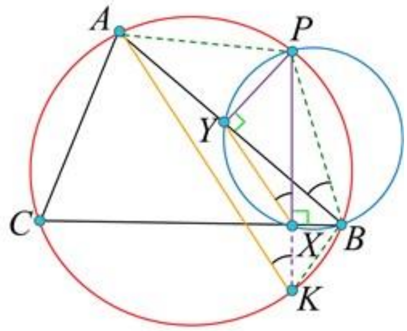



Gambar 10.5.2.

Pada Gambar 10.5.2, Hubungkan titik *A, P, B,* dan *K* sehingga terbentuk segiempat *APBK.* Menurut Definisi 2.3.1 segiempat *APBK* merupakan segiempat tali busur. Sehingga dari segiempat tali busur *APBK* sehingga diperoleh

$$\angle PBA = \angle PKA. \tag{10.5.1}$$

Perhatikan Gambar 10.5.3.




Gambar 10.5.3.

Dari Gambar 10.5.3, diketahui bahwa segiempat *APBK* merupakan segiempat tali busur, buat sebuah lingkaran baru dengan diameter tali busur *PB.* didapat segiempat *PBXY* yang mana segiempat *PBXY* merupakan suatu segiempat tali busur. Dari segiempat tali busur *PBXY* diperoleh

$$\angle PBY = \angle PXY. \tag{10.5.2}$$

Diketahui $\angle PBA = \angle PBY$ maka persamaan (10.5.1) dan (10.5.2) menjadi

$$\angle PKA = \angle PXY.$$

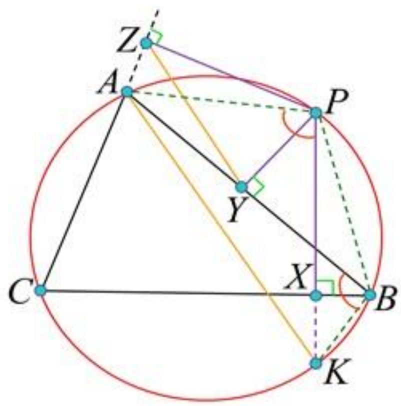
Jadi, diperoleh $\angle PKA = \angle PXY$ maka terbukti $XY // AK.$

Kedua, akan dibuktikan $YZ // AK$ dengan menunjukkan $\angle AZY = \angle CAK.$ Perhatikan Gambar 10.5.4.

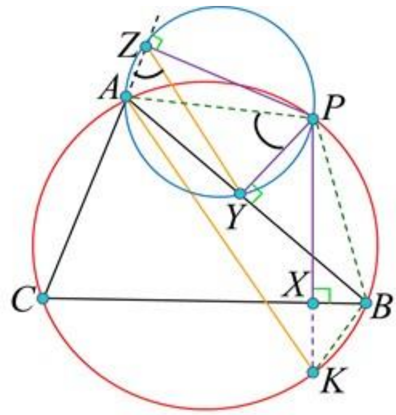
Pada Gambar 10.5.4, hubungkan titik *A, B, K,* dan *C* sehingga akan terbentuk segiempat *ABKC.* Yang mana segiempat *ABKC* merupakan Segiempat tali busur sehingga diperoleh

$$\angle APK = \angle KBA. \tag{10.5.3}$$

Selanjutnya perhatikan Gambar 10.5.5.




Gambar 10.5.4.

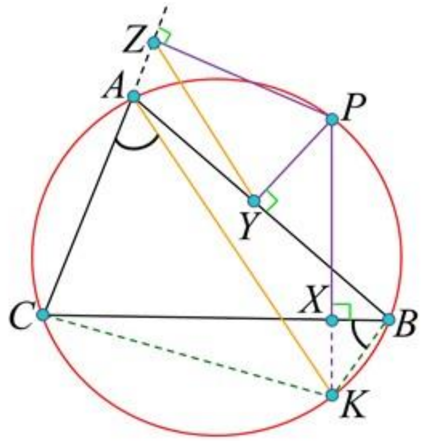



Gambar 10.5.5.

Pada Gambar 10.5.5, diketahui bahwa segiempat *APBK* merupakan segiempat tali busur. Konstruksi lingkaran baru berdiameter tali busur *AP* sehingga akan terbentuk segiempat tali busur *AZPY*, sehingga diperoleh

$$\angle AZY = \angle APY. \qquad (10.5.4)$$

Perhatikan Gambar 10.5.6.




Gambar 10.5.6.

Pada Gambar 10.5.6, hubungkan titik *A*, *B*, *K*, dan *C* sehingga akan terbentuk segiempat *ABKC*. sehingga segiempat *ABKC* merupakan Segiempat tali busur sehingga diperoleh

$$\angle CAK = \angle KBC. \qquad (10.5.5)$$

Perhatikan kembali Gambar 10.5.4, sehingga pada segiempat tali busur $PBXY$ diperoleh

$$\angle YPX = \angle XBY \,. \qquad (10.5.6)$$

Diketahui $\angle APK = \angle APY + \angle YPK$ dan $\angle KBA = \angle KBX + \angle XBY$ maka persamaan (10.5.3) menjadi

$$\angle APY + \angle YPK = \angle KBX + \angle XBY. \qquad (10.5.7)$$

Selanjutnya, $\angle YPK = \angle YPX$ dan $\angle KBX = \angle KBC$ karena merupakan sudut yang sama sehingga persamaan (10.5.7) menjadi

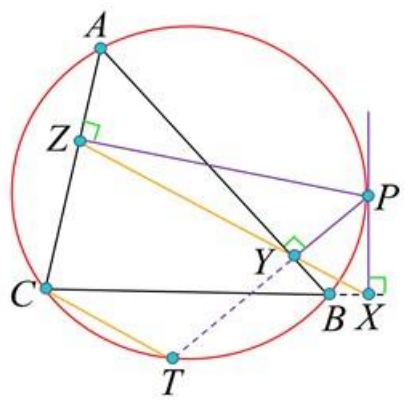
$$\angle APY + \angle YPX = \angle KBC + \angle XBY. \qquad (10.5.8)$$

Substitusikan persamaan (10.5.4), (10.5.5), dan (10.5.6) ke persamaan (10.5.8) diperoleh

$$\angle AZY = \angle CAK.$$

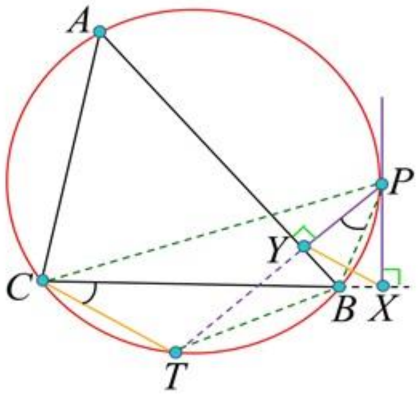
Karena $\angle AZY = \angle CAK$ maka terbukti $YZ \parallel AK$, diketahui $XY \parallel AK$ dan $YZ \parallel AK$ dapat disimpulkan bahwa $X$, $Y$, dan $Z$ segaris.

Kemudian untuk kasus kedua akan dibuktikan titik $X$, $Y$ dan $Z$ segaris jika penarikan garis yang tegak lurus dari titik $P$ ke masing-masing sisi segitiga ada yang bersinggungan pada lingkaran. Perhatikan Gambar 10.5.7.




Gambar 10.5.7.

Pada Gambar 10.5.7, perpanjang sisi $PY$ sehingga berpotongan dengan lingkaran di titik $T$. Hubungkan titik $T$ ke titik $C$, sehingga $CT$ merupakan garis bantu untuk membuktikan $X$, $Y$, dan $Z$ segaris. Pertama, akan dibuktikan $XY \parallel CT$ dengan menunjukkan $\angle TCB = \angle BXY$. Perhatikan Gambar 10.5.8.

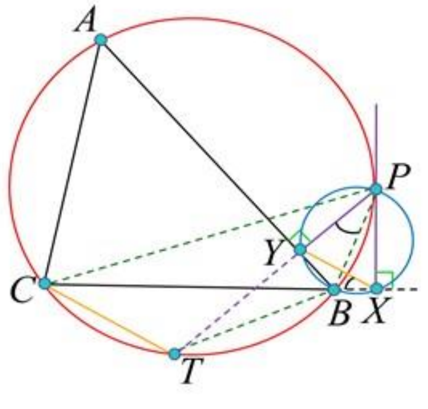



Gambar 10.5.8.

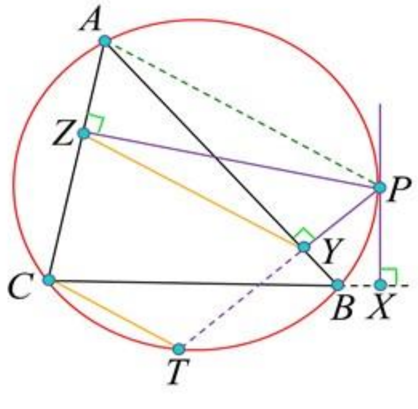
Pada Gambar 10.5.8, hubungkan titik $P$, $B$, $T$, dan $C$ Sehingga terbentuk sebuah segiempat $PBTC$. Menurut Definisi 2.3.1 segiempat $PBTC$ merupakan segiempat tali busur, maka dengan menggunakan Teorema 2.3.1 diperoleh

$$\angle BPT = \angle TCB. \tag{10.5.9}$$

Perhatikan Gambar 10.5.9.




Gambar 10.5.9.




Gambar 10.5.10.

Dari Gambar 10.5.9, diketahui bahwa segiempat $PBTC$ merupakan segiempat tali busur. Konstruksi sebuah lingkaran baru berdiameter tali busur $PB$, sehingga terbentuk segiempat tali busur $PXBY$, sehingga diperoleh

$$\angle BPY = \angle BXY. \tag{10.5.10}$$

Diketahui $\angle BPY$ dan $\angle BPT$ merupakan sudut yang sama, maka dari persamaan (10.5.9) dan persamaan (10.5.10) diperoleh

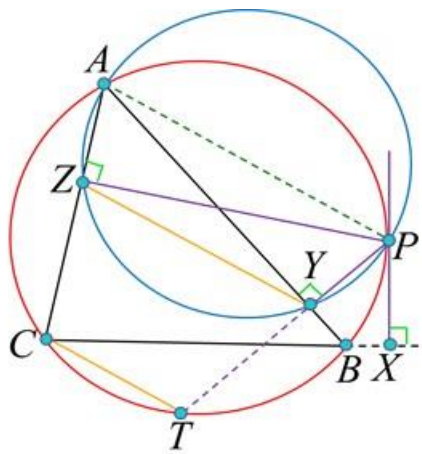
$$\angle TCB = \angle BXY.$$

Diperoleh $\angle TCB = \angle BXY$ maka terbukti $XY \parallel CT$.

Kedua, akan dibuktikan $YZ \parallel CT$ dengan menunjukkan $\angle AZY = \angle ACT$. Perhatikan Gambar 10.5.10. Hubungkan titik $A$ ke titik $P$, didapat segiempat $APCT$. Yang mana segiempat $APCT$ merupakan segiempat tali busur sehingga diperoleh

$$\angle ACT + \angle APT = 180^0. \quad (10.5.11)$$

Perhatikan Gambar 10.5.11. diketahui segiempat $APCT$ merupakan segiempat tali busur. Konstruksi lingkaran baru berdiameter tali busur $AP$ sehingga diperoleh segiempat $APYZ$. Yang mana segiempat $APYZ$ merupakan segiempat tali busur, sehingga diperoleh




Gambar 10.5.11.

$$\angle AZY + \angle APY = 180^0. \quad (10.5.12)$$

Diketahui $\angle APY$ dan $\angle APT$ merupakan sudut yang sama, maka dari persamaan (10.5.11) dan (10.5.12) diperoleh

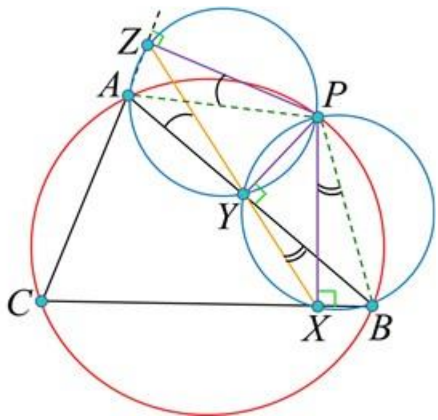
$$\angle AZY = \angle ACT.$$

Diperoleh $\angle AZY = \angle ACT$, maka terbukti $YZ \parallel CT$, karena $XY \parallel CT$ dan $YZ \parallel CT$ maka dapat disimpulkan bahwa $X$, $Y$, dan $Z$ segaris. ■

**Alternatif 2**

Pada alternatif pertama telah dibuktikan teorema Simson menggunakan garis yang sejajar. selanjutnya pada alternatif kedua ini akan dibuktikan teorema Simson dengan menunjukkan sudut bertolak belakang sama besar. Dua sudut dikatakan bertolak belakang apabila kedua sudut tersebut terbentuk dari dua garis yang berpotongan di satu titik dan sudutnya bukan pasangan sudut yang segaris. Sehingga apabila diasumsikan pada salah satu garis tersebut terdapat 2 titik yang terletak sebarang maka kedua titik tersebut dan titik potong kedua garis tersebut segaris. Berikut akan dibuktikan teorema Simson dengan menunjukkan sudut bertolak belakang sama besar.

**Bukti :** Perhatikan Gambar 10.5.12.




Gambar 10.5.12.

Pada Gambar 10.5.12, konstruksi lingkaran baru berdiameter tali busur $PA$ dan $PB$ sehingga akan terbentuk segiempat $PZAY$ dan $PBXY$. Yang mana segiempat $PZAY$ dan $PBXY$ merupakan segiempat tali busur, sehingga diperoleh diperoleh

$$\angle ZPA = \angle AYZ \qquad (10.5.13)$$

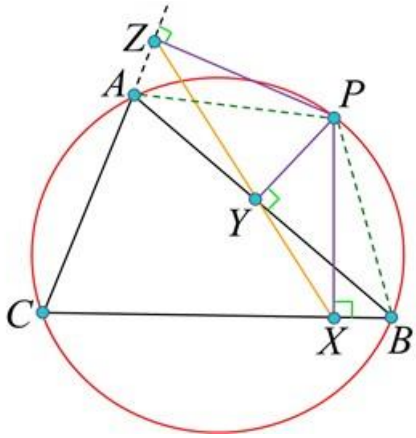
dan

$$\angle BPX = \angle BYX. \qquad (10.5.14)$$

Perhatikan Gambar 10.5.13. Akan dibuktikan $\angle AYZ = \angle BYX$ sehingga $X$, $Y$, dan $Z$ segaris. Perhatikan Gambar 10.5.13, Segiempat $APBC$ merupakan segiempat tali busur, dengan menggunakan Teorema 2.3.2 diperoleh

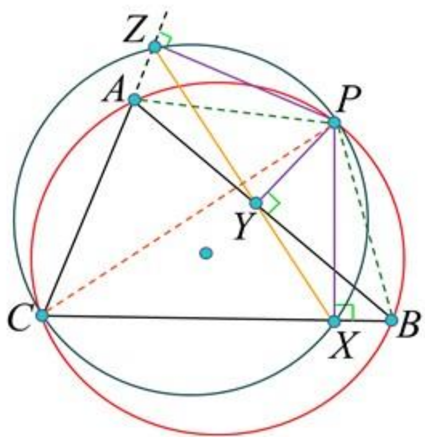
$$\angle ACB + \angle BPX + \angle APX = 180^0$$

$\angle APX = 180^0 - (\angle ACB + \angle BPX)$. (10.5.15)




Gambar 10.5.13.

Perhatikan Gambar 10.5.14.




Gambar 10.5.14.

Konstruksi lingkaran baru berdiameter tali busur *CP*, sehingga akan diperoleh segiempat *ZPXC*. Menurut Definisi 2.3.1 segiempat *ZPXC* merupakan segiempat tali busur, dengan menggunakan Teorema 2.3.2 diperoleh

$\angle ZCB + \angle ZPA + \angle APX = 180^0$

$\angle APX = 180^0 - (\angle ZCB + \angle ZPA)$. (10.5.16)

Substitusikan persamaan (10.5.14) ke persamaan (10.5.15) diperoleh

$\angle APX = 180^0 - (\angle ACB + \angle BYX)$. (10.5.17)

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (10.5.13) ke persamaan (10.5.16) diperoleh

$$\angle APX = 180^0 - (\angle ZCB + \angle AYZ). \qquad (10.5.18)$$

Diketahui dari Gambar 10.5.16, $\angle ZCB = \angle ACB$ karena merupakan sudut yang sama sehingga dari persamaan (10.5.17) dan persamaan (10.5.18) diperoleh

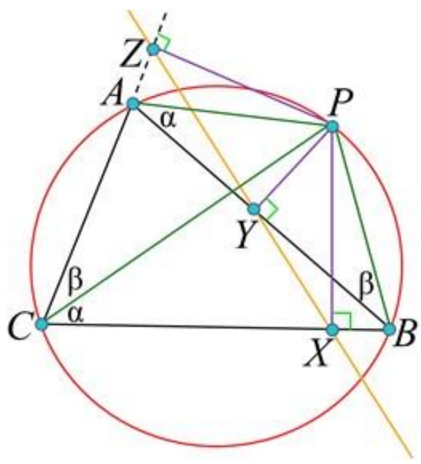
$$\angle AYZ = \angle BYX.$$

Jadi, diperoleh $\angle AYZ = \angle BYX$, maka $X$, $Y$, dan $Z$ segaris. ■

**Alternatif 3**

Pada alternatif pertama telah dibuktikan teorema Simson menggunakan garis yang sejajar, kemudian pada alternatif kedua telah dibuktikan teorema Simson menggunakan sudut bertolak belakang. Selanjutnya pada alternatif ketiga ini akan dibuktikan teorema Simson menggunakan teorema Menelaus. Teorema Menelaus merupakan suatu teorema pada geometri bidang yang menunjukkan titik-titik yang segaris pada segitiga. Sehingga dengan menggunakan teorema Menelaus tersebut penulis dapat membuktikan bahwa titik $X$, $Y$, dan $Z$ segaris. Berikut akan dibuktikan teorema Simson menggunakan teorema Menelaus.

Akan dibuktikan $\frac{AY}{YB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1$ sehingga titik $X$, $Y$, dan $Z$ segaris. Perhatikan Gambar 10.5.15.




Gambar 10.5.15.

Hubungkan titik $P$ ke $A$, titik $P$ ke $B$ dan titik $P$ ke $C$. Sehingga $AP$, $BP$, dan $CP$ merupakan sebuah garis bantu untuk membuktikan $X$, $Y$, dan $Z$ segaris. Misalkan $\angle ACP = \beta$ dan $\angle PCB = \alpha$, dengan menggunakan Teorema 2.3.1 pada segiempat tali busur $ACBP$ diperoleh

$$\angle ACP = \angle PBA = \beta$$

$$\angle PCB = \angle PAB = \alpha.$$

Kemudian diperoleh beberapa segitiga yang sebangun. Pertama, $\Delta\, CZP \sim \Delta\, BYP$ karena

$\angle ZCP = \angle YBP$ (Sifat Segiempat Tali Busur)

$\angle CZP = \angle BYP.$ (Sudut Siku-siku)

Perbandingan sisi-sisi dari $\Delta\, CZP \sim \Delta\, BYP$ diperoleh

$$\frac{PZ}{PY} = \frac{CZ}{BY}. \tag{10.5.19}$$

Kedua, $\Delta\, AYP \sim \Delta\, CXP$ karena

$\angle PAB = \angle PCB$ (Sifat Segiempat Tali Busur)

$\angle PXC = \angle PYA.$ (Sudut Siku-siku)

Perbandingan sisi-sisi dari $\Delta\, AYP \sim \Delta\, CXP$ diperoleh

$$\frac{PY}{PX} = \frac{AY}{CX}. \tag{10.5.20}$$

Ketiga, $\Delta\, AZP \sim \Delta\, BXP$ karena

$\angle PAZ = \angle PBX$

$\angle PZA = \angle PXB.$ (Sudut Siku-siku)

Perbandingan sisi-sisi dari $\Delta\, BXP \sim \Delta\, AZP$ diperoleh

$$\frac{PX}{PZ} = \frac{BX}{AZ}. \tag{10.5.21}$$

Sehingga dengan mengalikan persamaan (10.5.19) , (10.5.20) dan (10.5.21) didapat

$$\frac{CZ}{BY}\cdot\frac{AY}{CX}\cdot\frac{BX}{AZ} = \frac{PZ}{PY}\cdot\frac{PY}{PX}\cdot\frac{PX}{PZ}$$

$$\frac{CZ}{BY}\cdot\frac{AY}{CX}\cdot\frac{BX}{AZ} = 1. \tag{10.5.22}$$

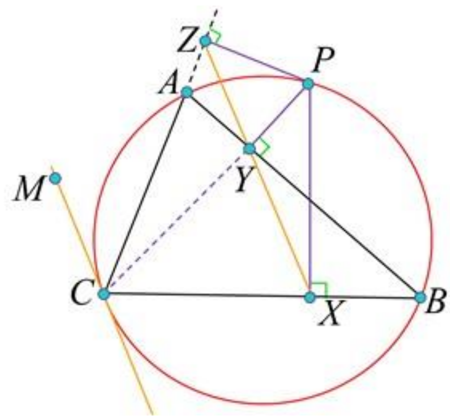
Segmen garis jika searah akan bernilai positif dan jika berlawanan arah akan bernilai negatif maka $BY = -YB$, $CX = -XC$ dan $AZ = -ZA$ sehingga persamaan (10.5.22) menjadi

$$\frac{AY}{YB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1.$$

dapat disimpulkan bahwa $X$ , $Y$, dan $Z$ Segaris. ■

- **Kasus Khusus**

Terdapat sebarang titik pada lingkaran luar segitiga, anggap titik $P$. Kemudian dari titik $P$ tarik garis yang tegak lurus ke sisi $BC$, $CA$, dan $AB$ pada $\Delta ABC$ sehingga akan berpotongan di titik $X$, $Y$, dan $Z$. Hubungkan titik $X$, $Y$, dan $Z$ maka garis yang menghubungkan titik-titik tersebut dinamakan garis Simson. Kemudian apabila perpanjangan salah satu garis yang tegak lurus pada $\Delta ABC$ merupakan garis tinggi pada $\Delta ABC$ maka garis singgung yang terbentuk dari salah satu titik sudut yang dilalui perpanjangan salah satu garis tegak lurus dari titik $P$ pada sisi $\Delta ABC$ itu akan sejajar dengan garis Simson. Untuk lebih jelasnya perhatian Gambar 10.5.16.

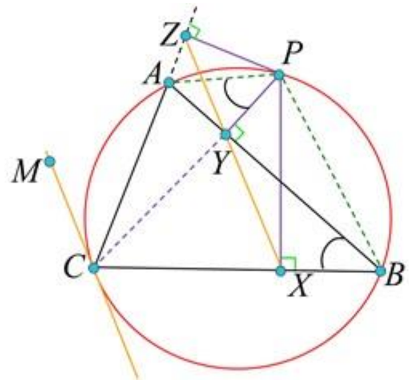



Gambar 10.5.16

Pada Gambar 10.5.16, anggap garis singgung yang terbentuk pada salah satu titik sudut pada $\Delta ABC$ itu adalah garis $MC$ sehingga penulis akan menunjukkan bahwa garis $MC$ sejajar dengan garis Simson. Untuk menunjukkan garis $MC$ sejajar garis Simson, akan ditunjukkan $\angle MCA = \angle YZA$ berdasarkan postulat garis sejajar. Perhatikan

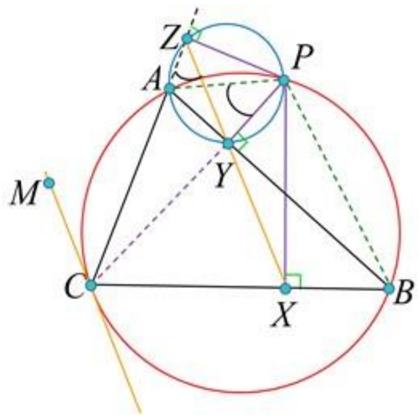
Gambar 10.5.17. Pada Gambar 10.5.17, hubungkan titik *A*, *P*, *B*, dan *C* didapat segiempat *APBC*. Dengan segiempat *APBC* merupakan segiempat tali busur, sehingga diperoleh

$$\angle CBA = \angle APC. \qquad (10.5.23)$$




Gambar 10.5.17

Perhatikan Gambar 10.5.18.




Gambar 10.5.18.

Pada Gambar 10.5.18, konstruksi lingkaran baru berdiameter tali busur *AP* sehingga didapat segiempat *AZPY*. Yang mana segiempat *AZPY* merupakan segiempat tali busur, sehingga diperoleh

$$\angle APY = \angle YZA. \qquad (10.5.24)$$

Diketahui $\angle APY$ dan $\angle APC$ sudut yang sama, maka dari persamaan (10.5.23) dan (10.5.24) diperoleh

$$\angle CBA = \angle YZA. \tag{10.5.25}$$

Selanjutnya diperoleh

$$\angle MCA = \angle CBA. \tag{10.5.26}$$

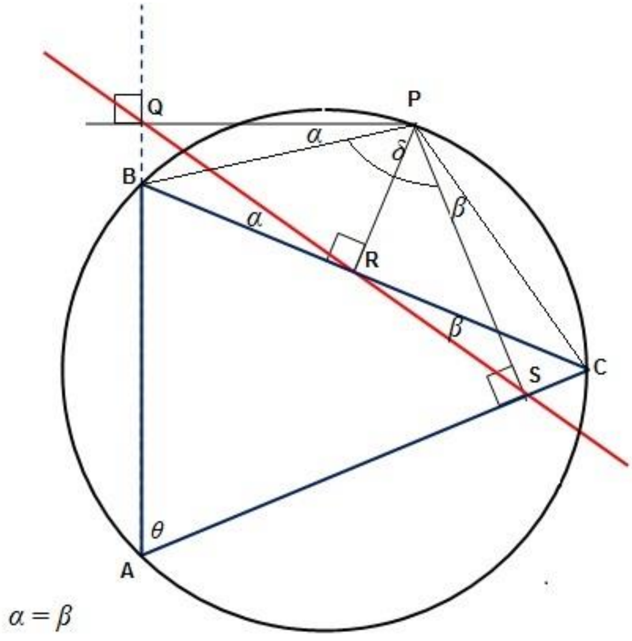
Subtitusikan persamaan (10.5.25) ke persamaan (10.5.26) diperoleh

$$\angle MCA = \angle YZA.$$

Sehingga dapat disimpulkan, karena $\angle MCA = \angle YZA$ maka garis $MC$ sejajar dengan garis Simson.

**Latihan 14.**

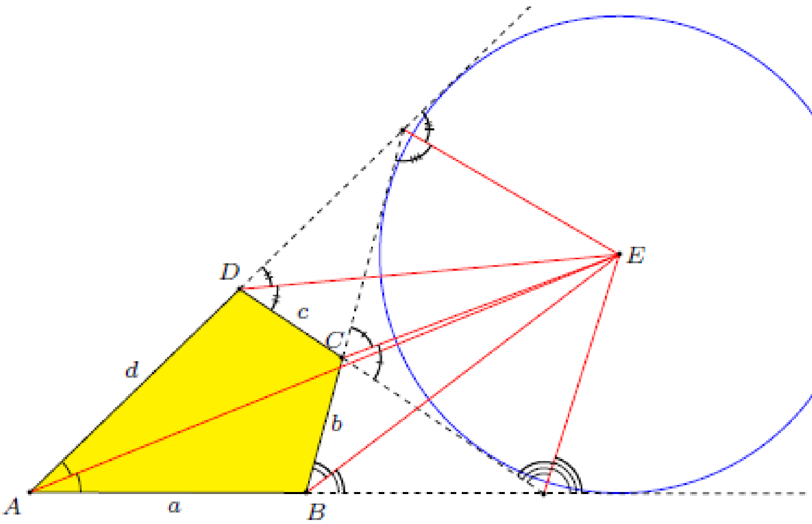
1. Perhatikan gambar berikut



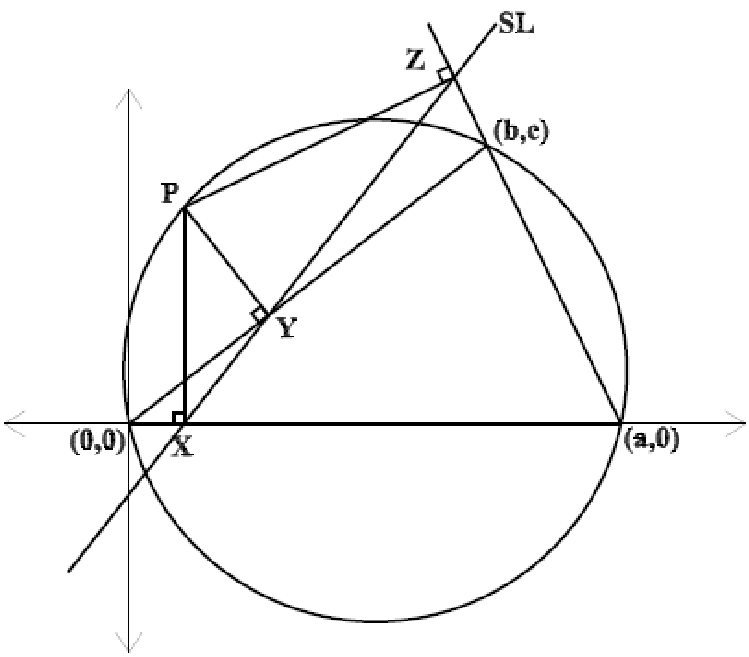

Dengan menggunakan ukuran sudut, berikan alternatif bukti untuk teorema simson's

2. Gambar berikut merupakan lingkaran singgung luar untuk sebarang segi empat yang cara mengkontruksinya ada di latihan 20. Berapakah luas segitiga DEC dan luas segitiga BEC

3. *) Perhatikan juga gambar disoal no 3. Misalkan Jari-jari lingkaran tersebut masing-masing menyentuk perpanjangan sisi AB dan AD di titik X dan Y. Hitunglah luas segiempat BXEC dan segiempat DYEC.




4. Bila garis bagi $\angle$A melalui titik C, apakah yang terjadi dengan perbandingan luas segitiga BEC dan DEC (buktikan secara jelas).
5. *) Gunakan teorema simson untuk gambar di bawah ini

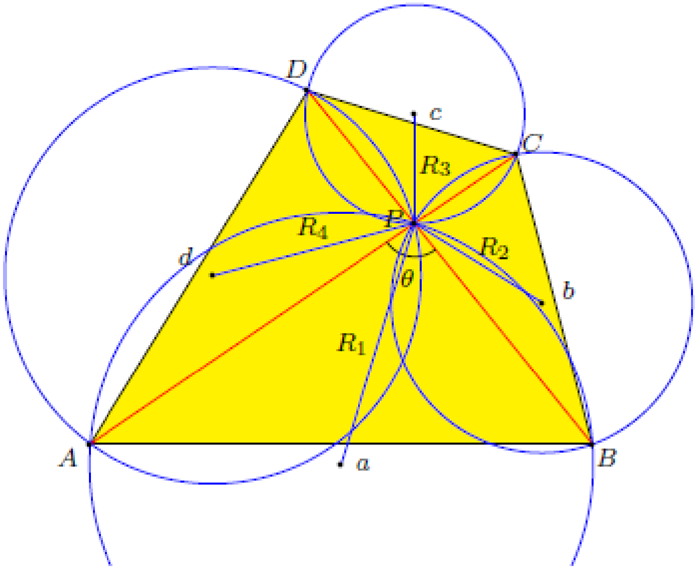


Hitunglah :

a. Luas segitiga PYX

b. Luas segitiga PXY

6. *) Perhatikan gambar di bawah ini

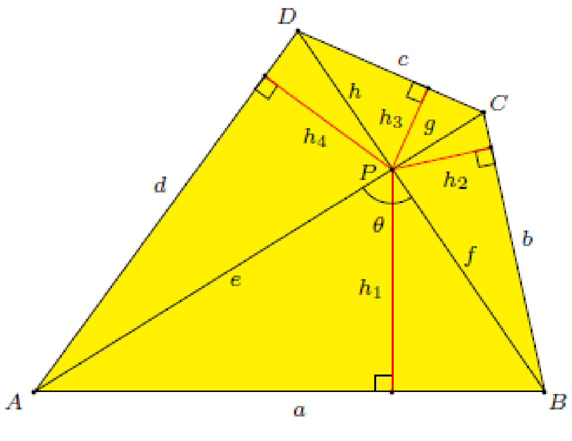



Misalkan $R_1$, $R_2$, $R_3$ dan $R_4$ masing-masing merupakan jari-jari lingkaran luar segitiga PAB, PBC, PCD dan PDA. Hitunglah panjang masing-masing jari-jarinya.

7. **) Tunjukkan bahwa pada gambar di soal no 6 berlaku $R_1 + R_2 = R_3 + R_4$.

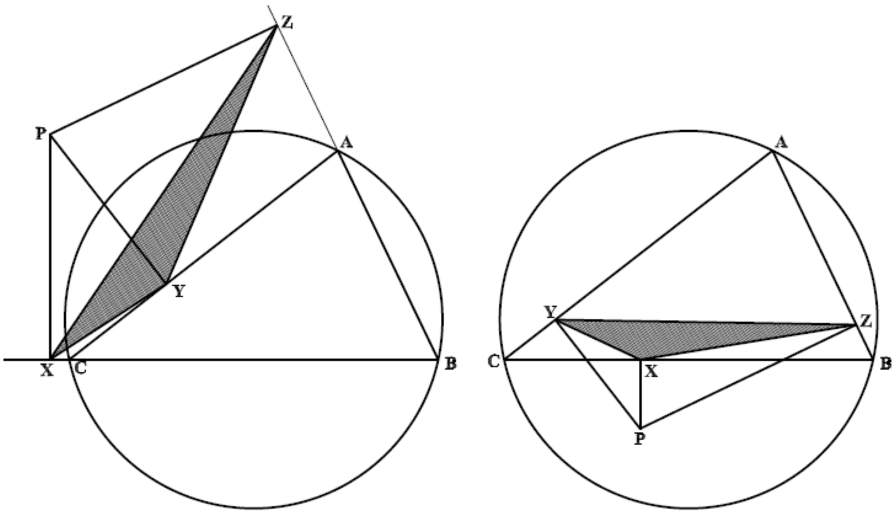
8. **) Pada kasus seperti apakah akan berlaku $R_1 + R_4 = R_2 + R_3$.

9. **). Perhatikan gambar berikut

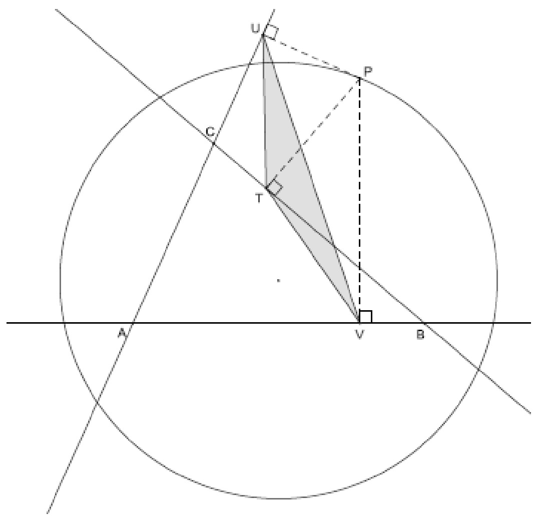


Misalkan kita mempunyai sebarang segiempat konveks ABCD, ambil sebarang titik P di dalam segiempat tersebut, dan kemudian buat tingginya ke masing-masing sisi. Hitunglah masing-masing tingginya dengan menggunakan panjang sisi a,b,c dan d

10. Tentukanlah luas beberapa buah segitiga dan segiempat yang dapat dibentuk pada gambar soal no 9 di atas.
11. Kembali gunakan teorema simson's untuk menghitung luas segitiga pada ke dua gambar di bawah ini.



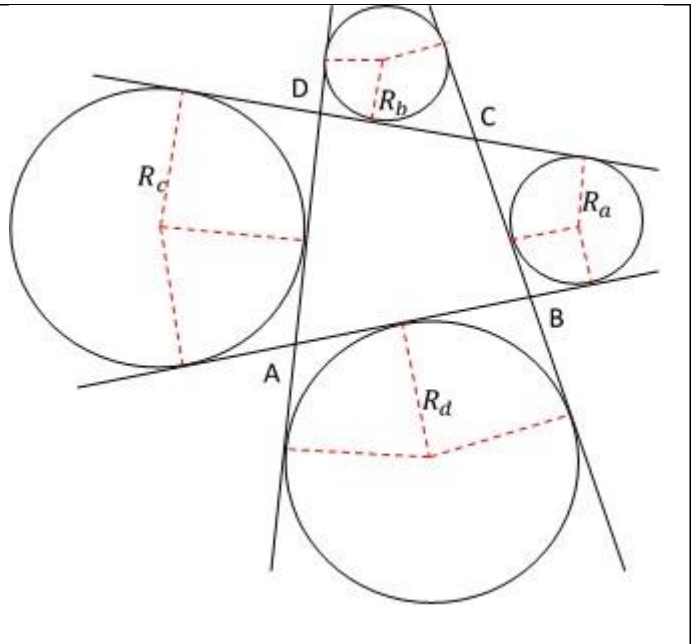

12. Perhatikan gambar di bawah ini




Gunakan teorema simson untuk membuktikan luas segitiga uvr.

**BAB 11**

# Lingkaran Singgung Luar Pada Segiempat

| | |
|---|---|
| Lingkaran Singgung luar pada dasarnya kebanyakan baru dibahas untuk sebarang segitiga. Untuk sebarang segitiga senantiasa mempunyai lingkaran singgung luar, akan tetapi pada sebarang segiempat belum tentu mempunyai lingkaran singgung luar. Pada bab 3.3 telah dibahas, eksistensi dan berbagai permasalahan untuk segiempat yang mempunyai lingkaran singgung dalam. |   |

Pada bab ini akan dibahas segiempat konvek dengan syarat tertentu yang mempunyai lingkaran singgung luar. Memang sangat sulit mencari penggunaan lingkaran singgung luar pada suatu segi empat. Namun materi ini diberikan adalah untuk memperluas hasanah pemikiran dalam pengembangan geometri bidang.

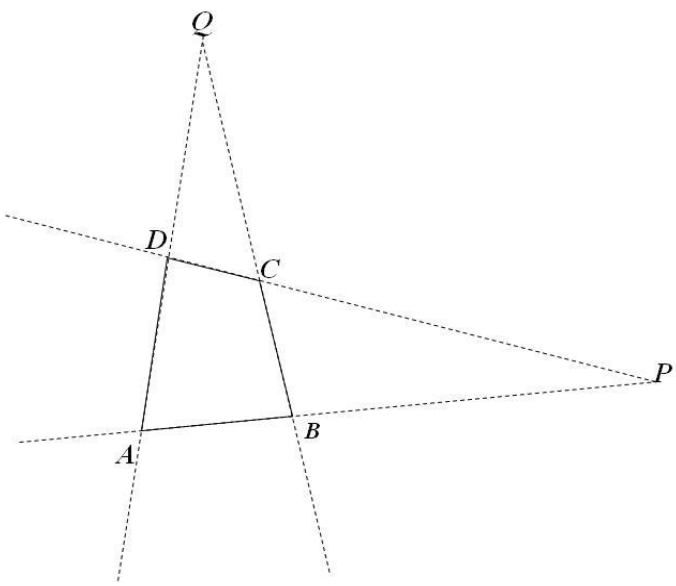
BAB

11

# Lingkaran Singgung Luar Pada Segiempat

## 11.1 Lingkaran Singgung Luar Segiempat dan Titik Gergonne

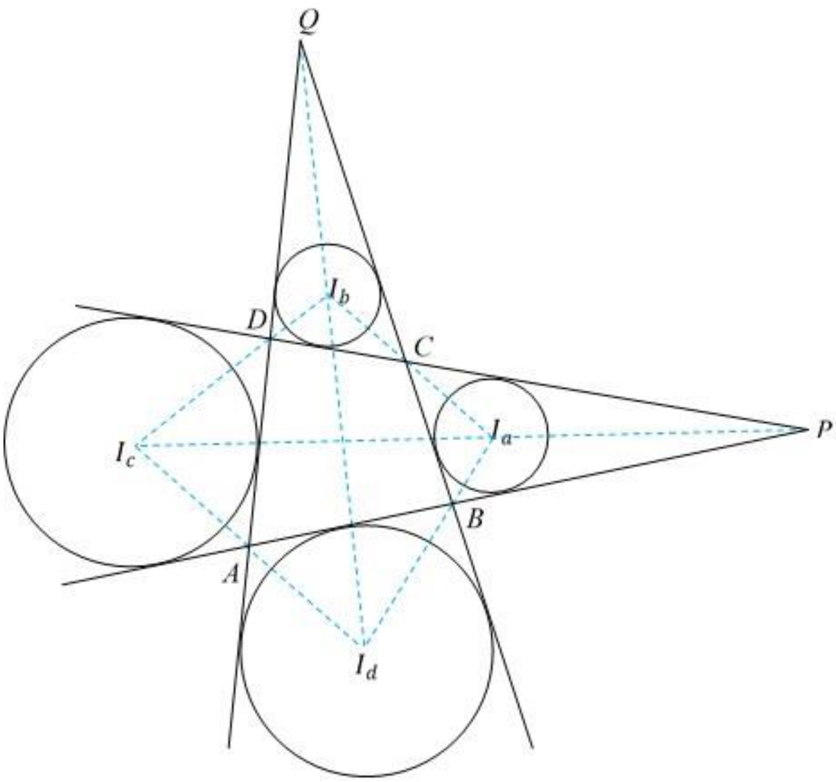
Perhatikan Gambar 11.1.1, segiempat $ABCD$ mempunyai panjang sisi yang berbeda satu dengan lainnya. Perpanjang semua sisi, maka sisi $AB$ dan $CD$ akan berpotongan di titik $P$ dan sisi $AD$ dan $BC$ akan berpotongan di titik $Q$.




Gambar 11.1.1

$\Delta BCP$ yang menyinggung sisi $BC$ pada segiempat $ABCD$, $\Delta CDQ$ yang menyinggung sisi $CD$ pada segiempat $ABCD$, $\Delta ADP$ yang menyinggung sisi $AD$ pada segiempat $ABCD$ dan $\Delta ABQ$ yang menyinggung sisi $AB$ pada segiempat $ABCD$.

Pada Gambar 11.1.1 pandang $\Delta BCP$, jika ditarik *internal bisector* untuk tiap sudut segitiga maka ketiga garis tersebut berpotongan di satu titik $(I_a)$ yang merupakan titik pusat lingkaran singgung dalam $\Delta BCP$ dan merupakan lingkaran singgung luar segiempat $ABCD$. Selanjutnya pandang $\Delta CDQ$, jika ditarik *internal bisector* untuk tiap sudut segitiga, maka ketiga garis tersebut berpotongan di satu titik $(I_b)$ yang merupakan titik pusat lingkaran singgung dalam $\Delta CDQ$ dan merupakan lingkaran singgung luar segiempat $ABCD$.




Gambar 11.1.2

Pada Gambar 11.1.2, lingkaran singgung luar yang terdapat pada segiempat $ABCD$ yaitu lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_a$, lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_b$, lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_c$ dan lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_d$. Masing-masing bersinggungan dengan salah satu sisi segiempat.

Garis singgung lingkaran adalah sebarang garis yang sebidang dengan lingkaran dimana garis tersebut menyinggung lingkaran tepat pada satu titik yang disebut titik singgung. Garis singgung lingkaran selalu tegak lurus dengan jari-jari tepat di titik singgungnya.

Selanjutnya pada bab ini juga ditunjukkan kekonkurenan titik Gergonne pada segiempat konveks $ABCD$, dengan cara memisahkan lingkaran singgung luar segiempat $ABCD$ menjadi lingkaran dalam segitiga dan lingkaran luar segitiga. Konkurensi titik Gergonne dalam pada $\Delta BCP$ dan $\Delta CDQ$ akan dibuktikan dengan menggunakan Teorema Ceva kasus I, sedangkan konkurensi titik Gergonne luar pada $\Delta ADP$ dan $\Delta ABQ$ akan dibuktikan dengan menggunakan Teorema Ceva untuk kasus II, sehingga segiempat konveks $ABCD$ mempunyai empat titik Gergonne.

Pada Gambar 11.1.2, dapat dilihat bahwa terdapat empat buah lingkaran singgung luar pada segiempat $ABCD$. Jika semua sisi pada segiempat $ABCD$ diperpanjang maka akan ada dua sisi yang berpotongan yaitu di titik $P$ dan $Q$. Apabila dilihat terdapat dua lingkaran singgung dalam segitiga ($\Delta BCP$ dan $\Delta CDQ$) dan dua lingkaran singgung luar segitiga ($\Delta ADP$ dan $\Delta ABQ$). Kekonkurenan titik Gergonne segiempat $ABCD$ dibuktikan dengan menggunakan Teorema kekonkurenan titik Gergonne pada segitiga.

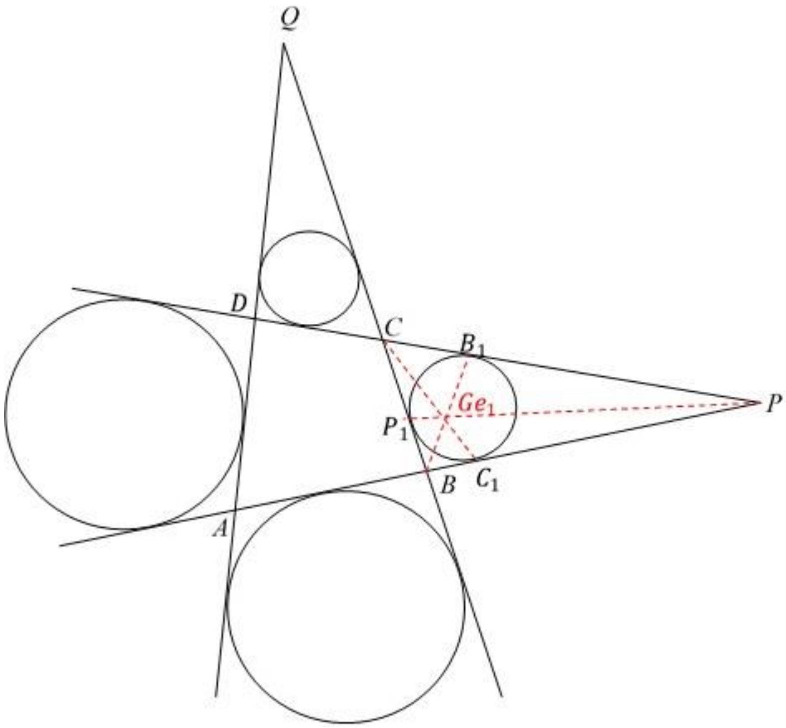
Misalkan sebarang segitiga dengan lingkaran yang berada didalamnya, lingkaran yang menyinggung ketiga sisi segitiga yang berpusat pada titik pusat lingkaran dalam (*incenter*), sehingga terdapat tiga titik singgung terhadap segitiga. Apabila ditarik garis dari ketiga titik sudut segitiga terhadap titik singgung lingkaran dalam terhadap sisi segitiga tersebut maka ketiga garis tersebut akan berpotongan disatu titik (*concurrent*) yang disebut titik Gergonne.

Selanjutnya dibuktikan kekonkurenan titik Gergonne untuk lingkaran singgung pertama pada segiempat $ABCD$ dengan menggunakan Teorema Ceva kasus 1 (konkurensi titik berada di dalam segitiga).

**Teorema 11.1.1** Di dalam segitiga garis yang dibentuk dari titik-titik puncak $\Delta BCP$ yang dihubungkan dengan titik singgung lingkaran dalam pada sisi di hadapannya yaitu garis $PP_1$, $CC_1$ dan $BB_1$ adalah konkuren jika dan hanya jika

$$\frac{BC_1}{C_1P}\cdot\frac{PB_1}{B_1C}\cdot\frac{CP_1}{P_1B}=1. \qquad (11.1.1)$$

**Bukti :**




Gambar 11.1.3

(⇒) Misalkan ketiga garis $PP_1$, $CC_1$ dan $BB_1$ konkuren di $Ge_1$, akan ditunjukkan persamaan (11.1.1) berlaku. Pada Gambar 11.1.3, perhatikan $\Delta BCC_1$ dan $\Delta CC_1P$ dengan masing-masing alasnya $BC_1$ dan $PC_1$. Dengan menggunakan Teorema 2.1.1 yaitu Teorema Ceva kasus I, diperoleh

$$\frac{BC_1}{C_1P}=\frac{L\Delta BCGe_1}{L\Delta CGe_1P}. \qquad (11.1.2)$$

Perhatikan $\Delta BB_1P$ dan $\Delta BCB_1$ dengan masing-masing alasnya $PB_1$ dan $B_1C$. Dengan cara yang sama diperoleh

$$\frac{PB_1}{B_1C}=\frac{L\Delta BGe_1P}{L\Delta BCGe_1}. \qquad (11.1.3)$$

Perhatikan $\Delta CP_1P$ dan $\Delta BP_1P$ dengan masing-masing alasnya $CP_1$ dan $BP_1$. Dengan cara yang sama diperoleh

$$\frac{CP_1}{BP_1}=\frac{L\Delta CGe_1P}{L\Delta BGe_1P}. \qquad (11.1.4)$$

Dari persamaan (11.1.2), (11.1.3) dan (11.1.4) diperoleh

$$\frac{BC_1}{C_1P}\cdot\frac{PB_1}{B_1C}\cdot\frac{CP_1}{P_1B}=\frac{L\Delta BCGe_1}{L\Delta CGe_1P}\cdot\frac{L\Delta BGe_1P}{L\Delta BCGe_1}\cdot\frac{L\Delta CGe_1P}{L\Delta BGe_1P},$$

$$\frac{BC_1}{C_1P}\cdot\frac{PB_1}{B_1C}\cdot\frac{CP_1}{P_1B}=1.$$

($\Leftarrow$) untuk membuktikan sebaliknya, jika diketahui persamaan (11.1.1), maka akan ditunjukkan bahwa ketiga garis $PP_1$, $CC_1$ dan $BB_1$ konkuren. Untuk itu misalkan $PP_1$ dan $BB_1$ berpotongan di titik $Ge_1$, selanjutnya buat garis $CGe_1$ dan perpanjang sehingga memotong garis $BP$, katakan titik potongnya adalah $C_1^{'}$, maka berlaku

$$\frac{BC_1^{'}}{C_1^{'}P}\cdot\frac{PB_1}{B_1C}\cdot\frac{CP_1}{P_1B}=1,$$

$$\frac{BC_1^{'}}{C_1^{'}P}=\frac{B_1C}{PB_1}\cdot\frac{P_1B}{CP_1}. \qquad (11.1.5)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (11.1.3) dan (11.1.4) kepersamaan (11.1.5) diperoleh

$$\frac{BC_1^{'}}{C_1^{'}P}=\frac{L\Delta BCGe_1}{L\Delta BGe_1P}\cdot\frac{L\Delta BGe_1P}{L\Delta CGe_1P}, \quad =\frac{L\Delta BCGe_1}{L\Delta CGe_1P}=\frac{BC_1}{C_1P}.$$

Karena $\frac{BC_1^{'}}{C_1^{'}P}=\frac{BC_1}{C_1P}$. dan hanya ada satu garis yang merupakan perpanjangan dari $\angle C$ yang memotong garis $BB_1$ dan $PP_1$ tepat di $Ge_1$, yaitu garis $CC_1$ maka $C_1^{'}=C_1$. Sehingga garis $PP_1$, $CC_1$ dan $BB_1$ konkuren di $Ge_1$. ■

Selanjutnya Dengan menggunakan cara yang sama, berlaku juga terhadap pembuktian konkurensi titik Gergonne $Ge_2$ untuk lingkaran singgung kedua pada segiempat $ABCD$, dengan menggunakan Teorema Ceva kasus 1 (konkurensi titik berada di dalam segitiga).

Kekonkurenan titik Gergonne untuk lingkaran singgung ketiga pada segiempat $ABCD$ dibuktikan dengan menggunakan Teorema Ceva kasus 2 (konkurensi titik berada di luar segitiga).

**Teorema 11.1.2** Pada segitiga $\Delta ADP$ garis yang dibentuk dari titik-titik singgung lingkaran luar segitiga $\Delta ADP$ terhadap titik sudut dihadapannya yaitu garis $PGe_3$, $DD_1$ dan $AA_1$ maka ketiga garis tersebut adalah konkuren di $Ge_3$ jika dan hanya jika

$$\frac{DP_2}{P_2A}\cdot\frac{AD_1}{D_1P}\cdot\frac{PA_1}{A_1D}=1. \qquad (11.1.6)$$

**Bukti :** (⇒) Misalkan ketiga garis $PGe_3$, $DD_1$ dan $AA_1$ konkuren di $Ge_3$ , akan ditunjukkan persamaan (11.1.6) berlaku. Pada Gambar 11.1.4, perhatikan $\Delta DPP_2$ dan $\Delta APP_2$ dengan masing-masing alasnya $DP_2$ dan $AP_2$. Dengan menggunakan Teorema Ceva kasus II, diperoleh

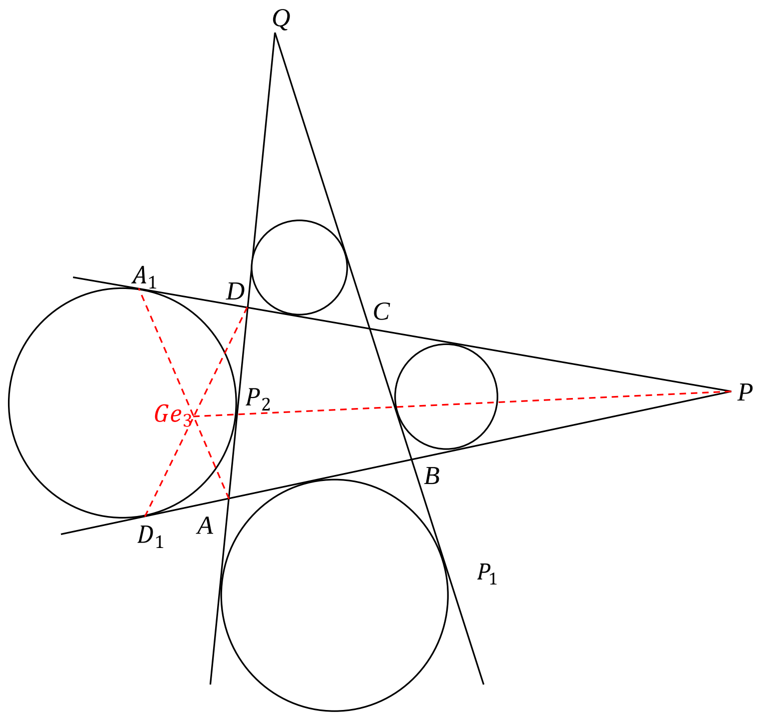
$$\frac{DP_2}{P_2A}=\frac{L\Delta DGe_3P}{L\Delta AGe_3P}. \qquad (11.1.7)$$

Perhatikan $\Delta ADD_1$ dan $\Delta DD_1P$ dengan masing-masing alasnya $AD_1$ dan $D_1P$, dengan cara yang sama maka diperoleh

$$\frac{AD_1}{D_1P}=\frac{L\Delta ADGe_3}{L\Delta DGe_3P}. \qquad (11.1.8)$$

Perhatikan $\Delta AA_1P$ dan $\Delta AA_1D$ dengan masing-masing alasnya $PA_1$ dan $A_1D$, dengan cara yang sama maka diperoleh

$$\frac{PA_1}{A_1D}=\frac{L\Delta AGe_3P}{L\Delta ADGe_3}. \qquad (11.1.9)$$




Gambar 11.1.4

Dari persamaan (11.1.7), (11.1.8) dan (11.1.9) diperoleh

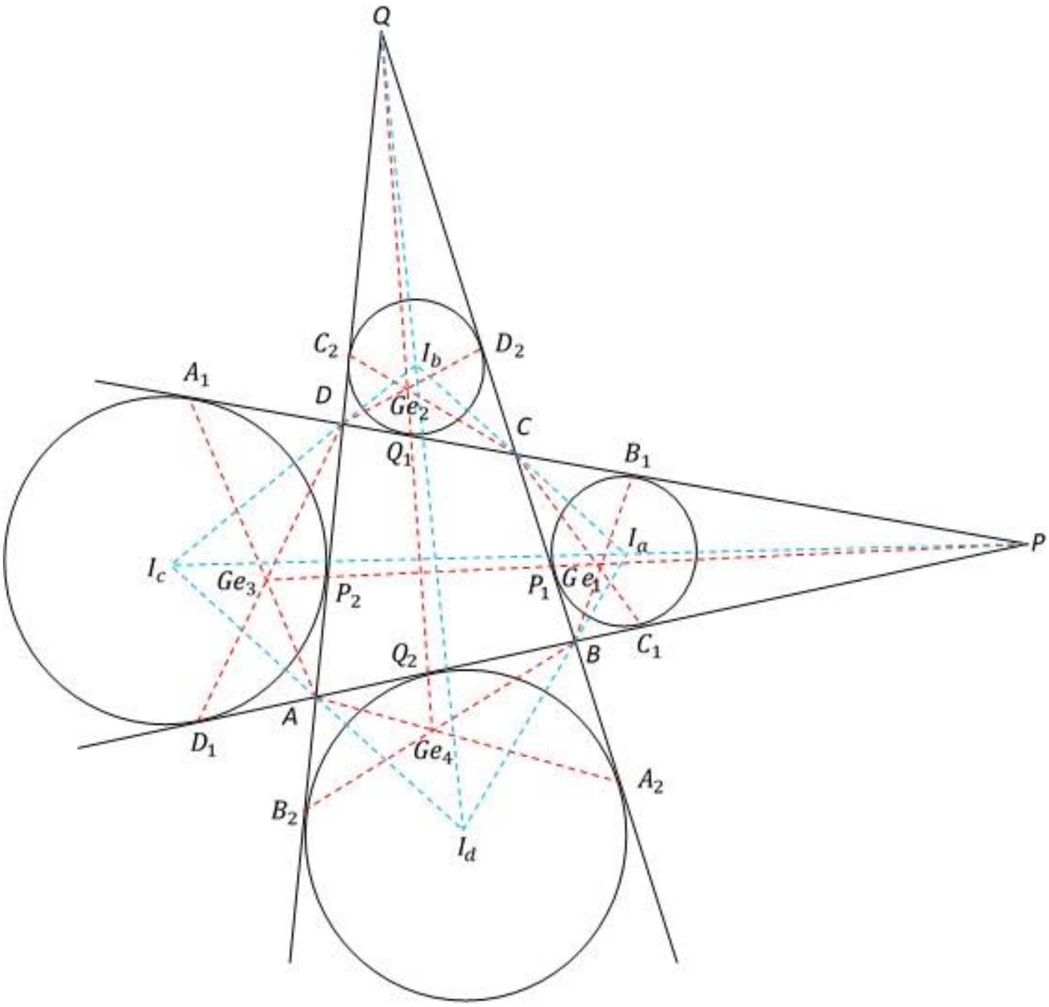
$$\frac{DP_2}{P_2A}\cdot\frac{AD_1}{D_1P}\cdot\frac{PA_1}{A_1D}=\frac{L\Delta DGe_3P}{L\Delta AGe_3P}\cdot\frac{L\Delta ADGe_3}{L\Delta DGe_3P}\cdot\frac{L\Delta AGe_3P}{L\Delta ADGe_3},$$

$$\frac{DP_2}{P_2A}\cdot\frac{AD_1}{D_1P}\cdot\frac{PA_1}{A_1D}=1.$$

(⇐) untuk membuktikan sebaliknya, jika diketahui persamaan (11.1.6), maka akan ditunjukkan bahwa ketiga garis $PGe_3$, $DD_1$ dan $AA_1$ konkuren. Untuk itu misalkan $PGe_3$ dan $AD$ berpotongan dititik $P_2^{'}$, maka berlaku

$$\frac{DP_2^{'}}{P_2^{'}A}\cdot\frac{AD_1}{D_1P}\cdot\frac{PA_1}{A_1D}=1,$$

$$\frac{DP_2^{'}}{P_2^{'}A} = \frac{D_1P}{AD_1} \cdot \frac{A_1D}{PA_1}. \tag{11.1.10}$$




Gambar 11.1.5:

Sehingga diperoleh :

$$\frac{DP_2^{'}}{P_2^{'}A} = \frac{L\Delta DGe_3P}{L\Delta ADGe_3} \cdot \frac{L\Delta ADGe_3}{L\Delta AGe_3P}, \quad = \frac{L\Delta DGe_3P}{L\Delta AGe_3P},$$

$$\frac{DP_2^{'}}{P_2^{'}A} = \frac{DP_2}{P_2A}.$$

Karena $\frac{DP_2^{'}}{P_2^{'}A} = \frac{DP_2}{P_2A}$. dan hanya ada satu garis yang merupakan perpanjangan dari $\angle P$ yang memotong garis $PGe_3$, $DD_1$ dan $AA_1$ tepat di $Ge_3$ yaitu garis $PP_2$ maka $P_2^{'} = P_2$. Maka garis $PGe_3$, $DD_1$ dan $AA_1$ konkuren di $Ge_3$. ■

Selanjutnya Dengan menggunakan cara yang sama, berlaku juga terhadap pembuktian konkurensi titik Gergonne $Ge_4$ untuk lingkaran singgung keempat pada segiempat $ABCD$ dengan menggunakan Teorema Ceva kasus 2 (Konkurensi titik berada di luar segitiga).

Dari pembahasan di atas, terbukti bahwa segiempat konveks $ABCD$ mempunyai empat buah titik Gergonne. Yaitu titik Gergonne $Ge_1$ pada lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_a$, titik Gergonne $Ge_2$ pada lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_b$, titik Gergonne $Ge_3$ pada lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_c$ dan titik Gergonne $Ge_4$ pada lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_d$.

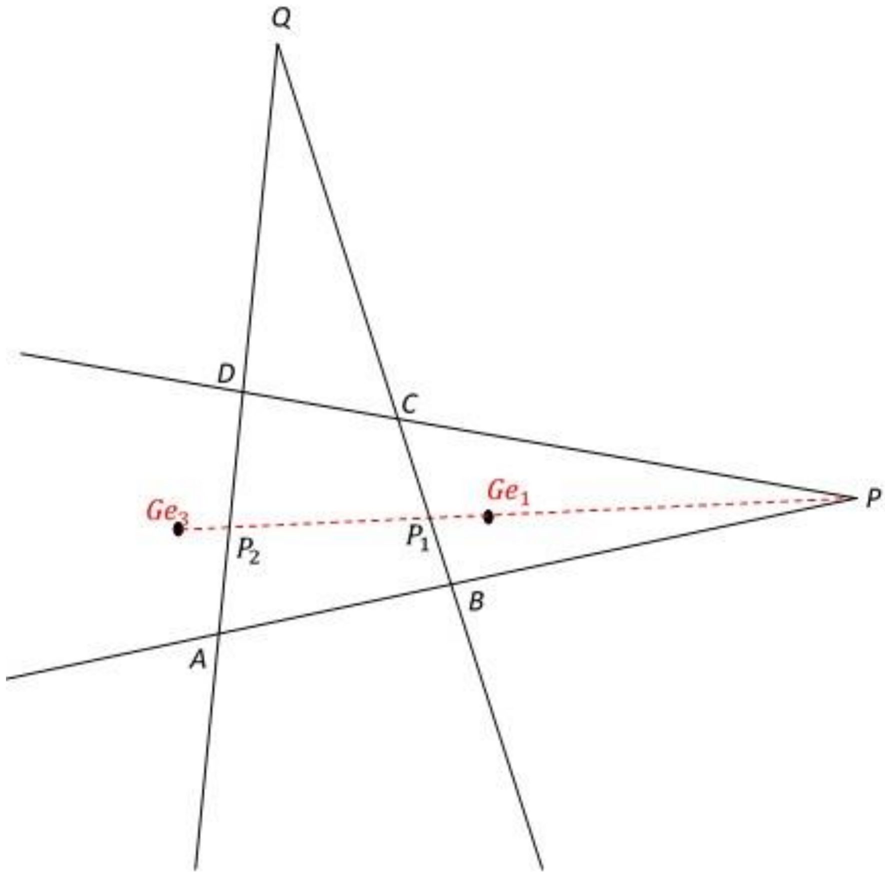
## 11.2 Kolinieritas Titik Gergonne

Titik Gergonne dari lingkaran singgung luar segiempat konveks $ABCD$ yang saling berhadapan segaris (*kolinier*). Misalnya titik Gergonne $Ge_1$ segaris dengan titik Gergonne $Ge_3$, dan titik Gergonne $Ge_2$ segaris dengan titik Gergonne $Ge_4$. Untuk menunjukkan titik Gergonne yang berhadapan segaris dapat digunakan Teorema Menelaus.

**Teorema 11.2.1** Jika diberikan sebuah $\Delta ABQ$ dengan titik $P$, $P_1$ dan $P_2$ masing-masing terletak pada sisi $AB$, $QB$ dan $AQ$. Maka titik $P$, $P_1$ dan $P_2$ segaris jika dan hanya jika

$$\frac{QP_1}{P_1B} \cdot \frac{BP}{PA} \cdot \frac{AP_2}{P_2Q} = -1. \qquad (11.2.1)$$

**Bukti.**

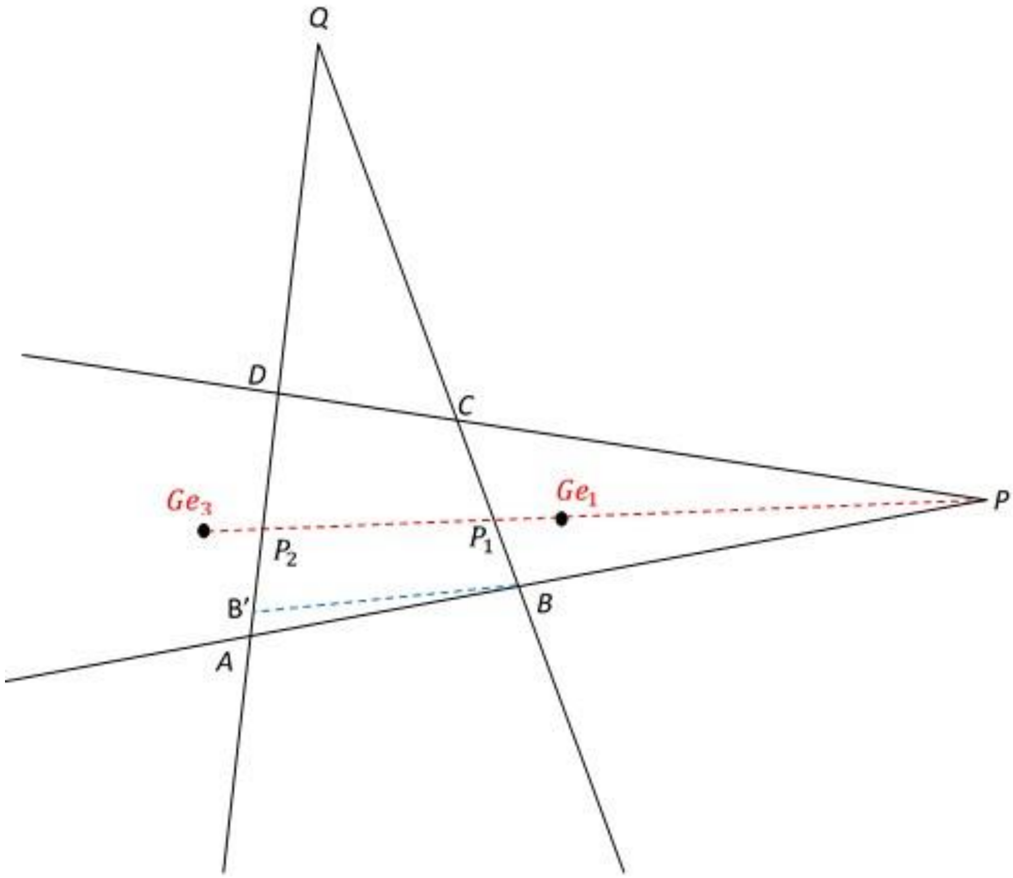



Gambar 11.2.1

(⇒) Misalkan titik-titik $P$, $P_1$ dan $P_2$ segaris, maka akan ditunjukkan persamaan (11.2.1) berlaku. Dari Gambar 3.6, perpanjang garis dari titik $B$ ke sisi $AQ$ yang sejajar dengan sisi $PP_2$ sehingga perpanjangan garis tersebut akan memotong di titik $B^{'}$ pada sisi $AQ$, maka $PP_2 // BB^{'}$. Untuk lebih jelas perhatikan Gambar 11.2.1.

Dari Gambar 11.2.1, karena $PP_2 // BB^{'}$ maka $\angle QP_2P_1 = \angle QB^{'}B$ (sudut sehadap), dan $\angle B^{'}QB = \angle P_2QP$, sehingga diperoleh $\Delta QP_1P_2 \sim \Delta QBB^{'}$, maka didapat perbandingan sisinya

$$\frac{QP_1}{P_1B} = \frac{QP_2}{P_2B^{'}}.$$




Gambar 11.2.1

Kemudian karena $PP_2 // BB^{'}$ maka $\angle AB^{'}B = \angle AP_2P$ (sudut sehadap) dan $\angle P_2AP = \angle B^{'}AB$, sehingga $\Delta APP_2 \sim \Delta ABB^{'}$, didapat perbandingan sisinya

$$\frac{BP}{PA} = \frac{B^{'}P_2}{P_2A}.$$

Sehingga dengan menggunakan Teorema Menelaus diperoleh :

$$\frac{QP_1}{P_1B} \cdot \frac{BP}{PA} \cdot \frac{AP_2}{P_2Q} = \frac{QP_2}{P_2B^{'}} \cdot \frac{B^{'}P_2}{P_2A} \cdot \frac{AP_2}{P_2Q},$$

$$\frac{QP_1}{P_1B} \cdot \frac{BP}{PA} \cdot \frac{AP_2}{P_2Q} = \frac{QP_2}{P_2B^{'}} \cdot \frac{P_2B^{'}}{AP_2} \cdot \frac{AP_2}{P_2Q},$$

Segmen garis jika searah akan bernilai positif dan jika berlawanan akan bernilai negative, maka $\overline{QP_2} = -\overline{P_2Q},$ sehingga menjadi

$$\frac{QP_1}{P_1B} \cdot \frac{BP}{PA} \cdot \frac{AP_2}{P_2Q} = -1.$$

($\Leftarrow$) Misalkan perbandingan hasil kali ketiganya bernilai -1. Dan misalkan pula perpotongan $PP_2$ dan $QB$ adalah $P_1^{'}$, maka diperoleh

$$\frac{QP_1^{'}}{P_1^{'}B} \cdot \frac{BP}{PA} \cdot \frac{AP_2}{P_2Q} = -1.$$

Yang mengakibatkan

$$\frac{QP_1^{'}}{P_1^{'}B} = \frac{PA}{BP} \cdot \frac{P_2Q}{AP_2}.$$

Dimana dari $\Delta ABB^{'} \sim \Delta APP_2$ yang mengakibatkan

$$\frac{PA}{BP} = \frac{AP_2}{P_2B^{'}}.$$

Sehingga

$$\frac{QP_1^{'}}{P_1^{'}B} = \frac{PA}{BP} \cdot \frac{P_2Q}{AP_2} = \frac{AP_2}{P_2B^{'}} \frac{P_2Q}{AP_2} = \frac{P_2Q}{P_2B^{'}},$$

$$\frac{QP_1^{'}}{P_1^{'}B} = \frac{QP_1}{P_1B}.$$

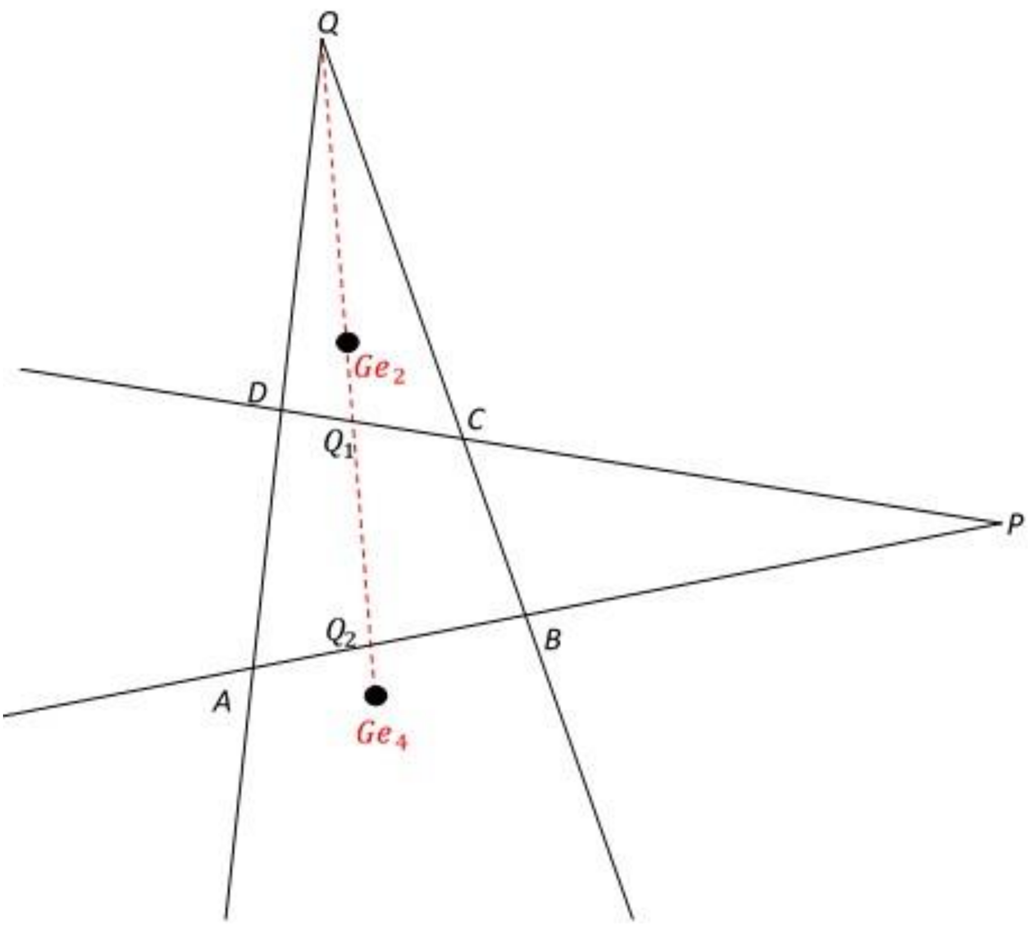
Ini menunjukkan bahwa $P_1^{'} = P_1$ yang merupakan titik yang sama. Jadi titik-titik $P$, $P_1$ dan $P_2$ segaris. Jika diperpanjang maka titik-titik $P$, $P_1$ dan $P_2$ akan segaris dengan $Ge_1$ dan $Ge_3$. ■

Terbuktilah untuk titik Gergonne pertama $Ge_1$ segaris dengan titik Gergonne ketiga $Ge_3$. Selanjutnya dibuktikan untuk titik Gergonne kedua $Ge_2$ segaris dengan titik Gergonne keempat $Ge_4$.

**Teorema 11.2.2** Jika diberikan sebuah $\Delta ADS$ dengan titik $Q$, $Q_1$ dan $Q_2$ masing-masing terletak pada sisi $AD$, $DS$ dan $AP$. Maka titik $Q$, $Q_1$ dan $Q_2$ segaris jika dan hanya jika

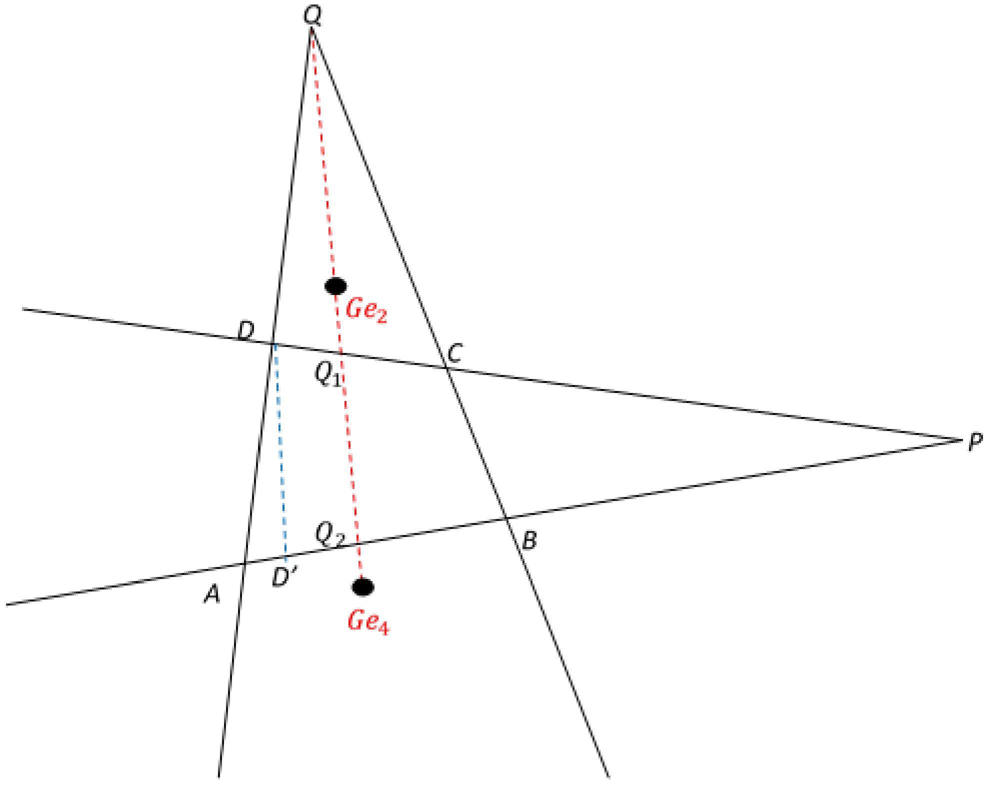
$$\frac{PQ_1}{Q_1D}\cdot\frac{DQ}{QA}\cdot\frac{AQ_2}{Q_2P}=-1. \qquad (11.2.2)$$

**Bukti.** Perhatikan gambar dibawah ini




Gambar 11.2.2

(⇒) Misalkan titik-titik $Q$, $Q_1$ dan $Q_2$ segaris, maka akan ditunjukkan persamaan (11.2.2) berlaku. Dari Gambar 11.2.2, perpanjang garis dari titik $D$ ke sisi $AP$ yang sejajar dengan sisi $QQ_2$, sehingga perpanjangan garis tersebut akan memotong di titik $D'$ pada sisi $AP$, maka $QQ_2 // DD'$. Untuk lebih jelas perhatikan Gambar 11.2.3.




Gambar 11.2.3:

Dari Gambar 11.2.3, karena $QQ_2 // DD'$ maka $\angle PQ_2Q_1 = \angle PD'D$ (sudut sehadap), dan $\angle DPD' = \angle Q_1PQ_2$, sehingga diperoleh $\Delta PQ_1Q_2 \sim \Delta PDD'$, maka didapat perbandingan sisinya perbandingan sisinya

$$\frac{PQ_1}{Q_1D} = \frac{PQ_2}{Q_2D'}.$$

Kemudian karena $QQ_2 // DD'$ maka $\angle AD'D = \angle AQ_2Q$ (sudut sehadap) dan $\angle DAD' = \angle QAQ_2$, sehingga $\Delta AQQ_2 \sim \Delta ADD'$, didapat perbandingan sisinya

$$\frac{DQ}{QA} = \frac{D'Q_2}{Q_2A}.$$

Sehingga dengan menggunakan teorema Menelaus diperoleh

$$\frac{PQ_1}{Q_1D}\cdot\frac{DQ}{QA}\cdot\frac{AQ_2}{Q_2P}=\frac{PQ_2}{Q_2D'}\cdot\frac{D'Q_2}{Q_2A}\cdot\frac{AQ_2}{Q_2P},$$

$$\frac{PQ_1}{Q_1D}\cdot\frac{DQ}{QA}\cdot\frac{AQ_2}{Q_2P}=\frac{PQ_2}{Q_2D'}\cdot\frac{Q_2D'}{AQ_2}\cdot\frac{AQ_2}{Q_2P}.$$

Segmen garis jika searah akan bernilai positif dan jika berlawanan akan bernilai negative, maka $\overline{PQ_2}=-\overline{Q_2P}$, sehingga menjadi

$$\frac{PQ_1}{Q_1D}\cdot\frac{DQ}{QA}\cdot\frac{AQ_2}{Q_2P}=-1.$$

($\Leftarrow$) Misalkan perbandingan hasil kali ketiganya bernilai -1. Dan misalkan pula perpotongan $QQ_2$ dan $DP$ adalah $Q_1'$, maka diperoleh

$$\frac{PQ_1'}{Q_1'D}\cdot\frac{DQ}{QA}\cdot\frac{AQ_2}{Q_2P}=-1.$$

Yang mengakibatkan

$$\frac{PQ_1'}{Q_1'D}=\frac{QA}{DQ}\cdot\frac{Q_2P}{AQ_2}.$$

Dimana dari $\Delta ADD'\sim\Delta APQ$ yang mengakibatkan

$$\frac{QA}{DQ}=\frac{AQ_2}{Q_2D'}.$$

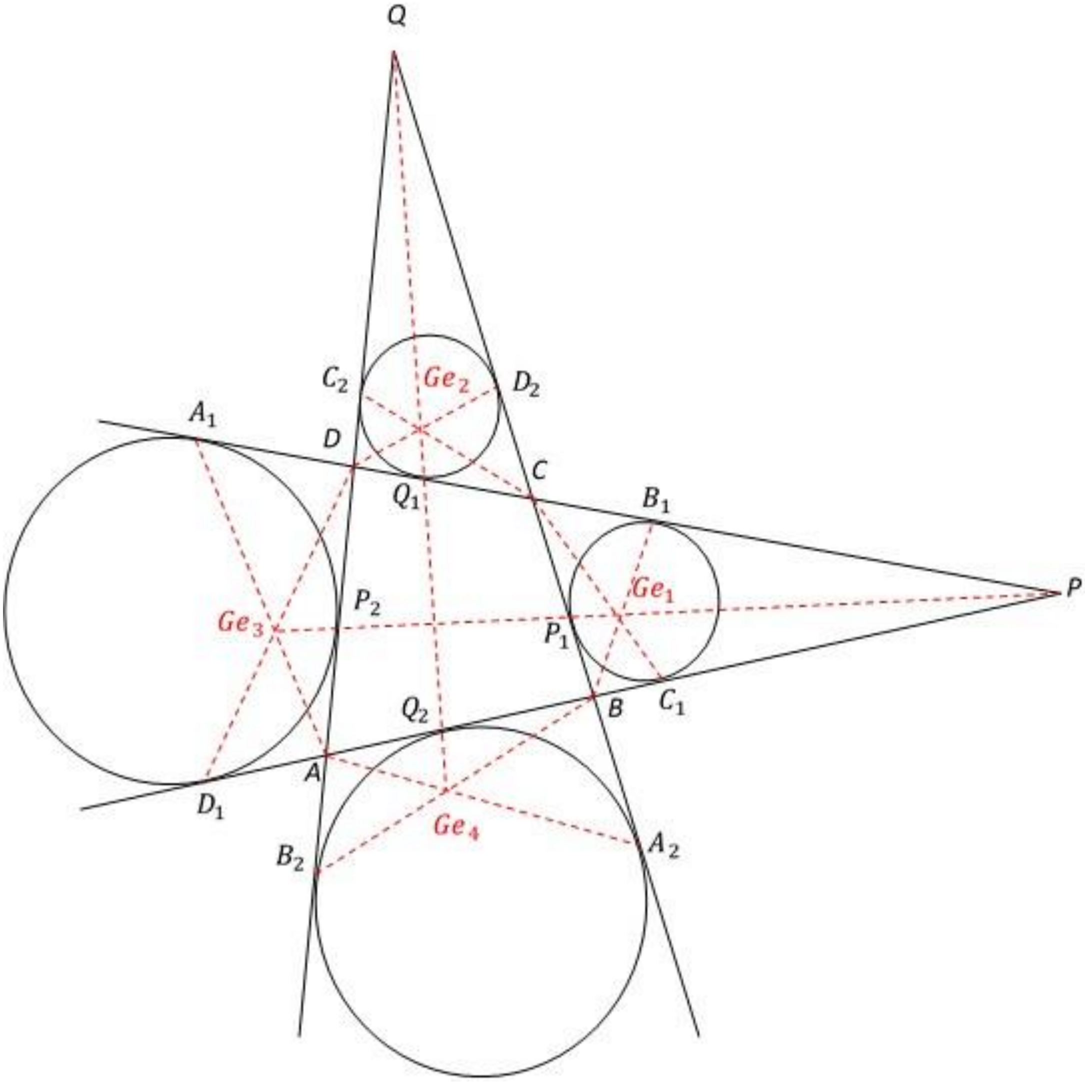
Sehingga

$$\frac{PQ_1'}{Q_1'D}=\frac{QA}{DQ}\cdot\frac{Q_2P}{AQ_2}=\frac{AQ_2}{Q_2D'}\cdot\frac{Q_2P}{AQ_2}=\frac{Q_2P}{Q_2D'},$$

$$\frac{PQ_1'}{Q_1'D}=\frac{PQ_1}{Q_1D}.$$

Ini menunjukkan bahwa $Q_1'=Q_1$ yang merupakan titik yang sama. Jadi titik-titik $Q$, $Q_1$ dan $Q_2$ segaris. Jika diperpanjang maka titik-titik $Q$, $Q_1$ dan $Q_2$ akan segaris dengan $Ge_2$ dan $Ge_4$. ■

Terbukti untuk titik Gergonne Kedua $Ge_2$ segaris dengan titik Gergonne keempat $Ge_4$. Dari pembahasan diatas, maka terbukti bahwa pada segiempat konveks $ABCD$ mempunyai dua buah titik Gergonne yang segaris.

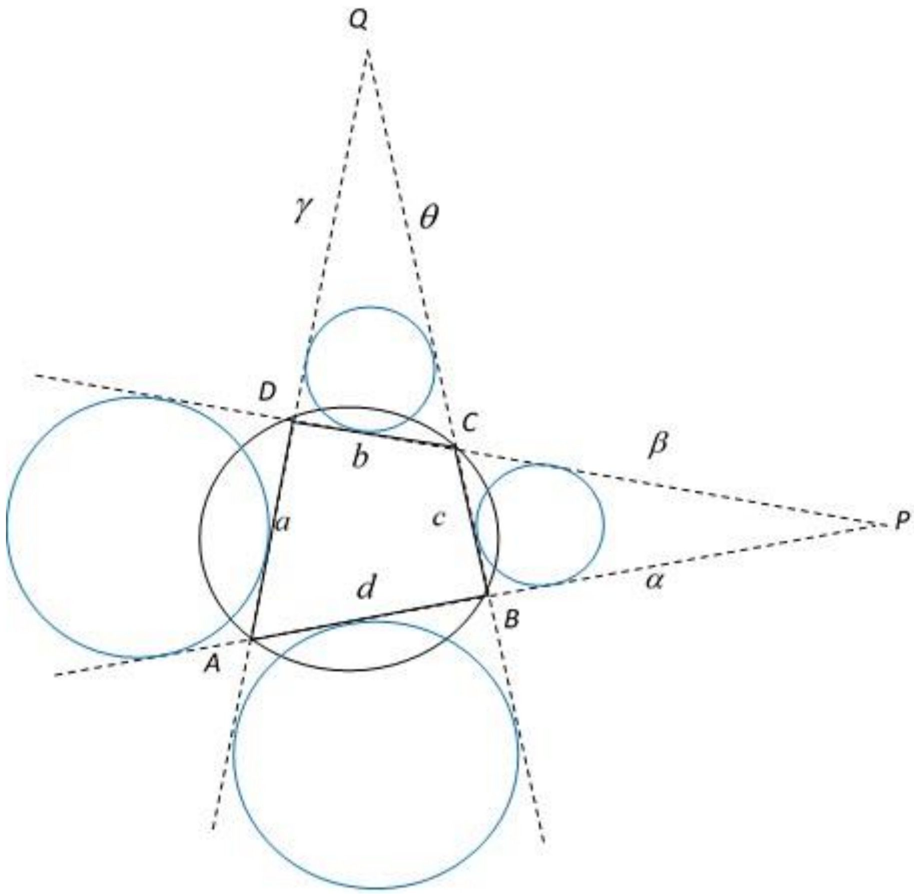



Gambar 11.2.4

Titik Gergonne $Ge_1$ pada lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_a$ segaris dengan titik Gergonne $Ge_3$ pada lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_c$. Titik Gergonne $Ge_2$ pada lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_b$ segaris dengan dan titik Gergonne $Ge_4$ pada lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_d$.

## 11.3 Panjang Sisi

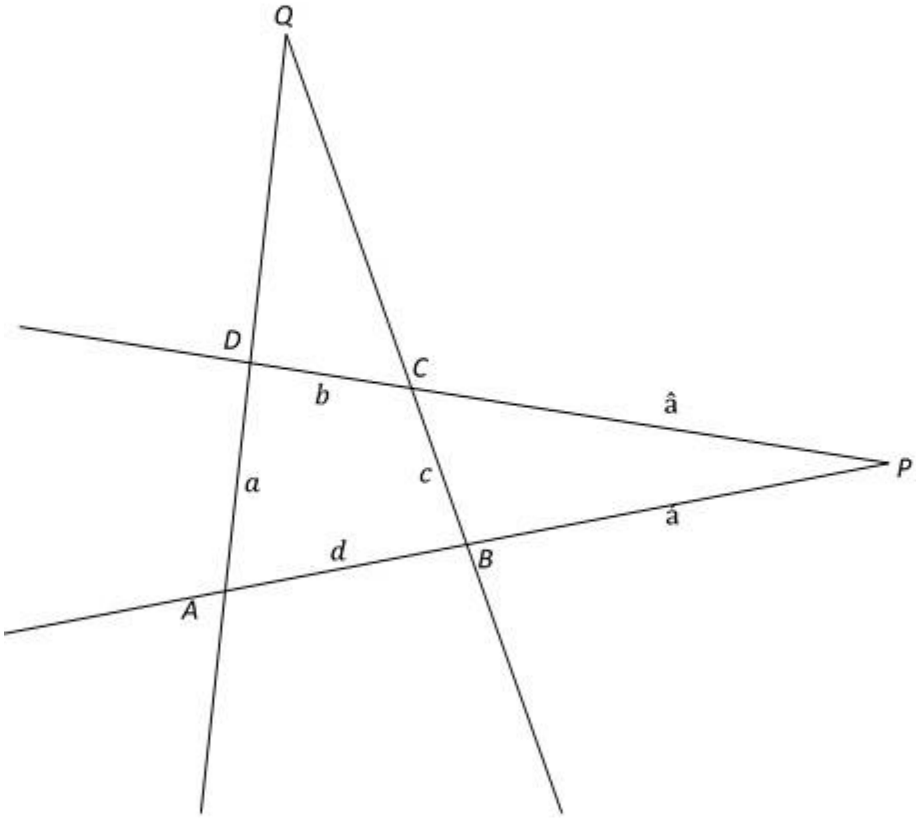
Pada segiempat $ABCD$ konveks dan siklik, jika tiap sisi diperpanjang maka akan ada sisi yang bertemu disatu titik, sehingga terbentuklah beberapa sisi baru.




Gambar 11.3.1

Pada Gambar 11.3.1, tidak ada sisi segiempat yang sejajar. Keempat sisi berbeda panjang antara satu dengan yang lainnya. Perpanjang sisi $AB$ dan $DC$, maka perpanjangan garis tersebut akan berpotongan disatu titik. Namakan titik perpotongannya adalah titik $P$, dengan panjang $BP = \alpha$ dan panjang $CP = \beta$. Perpanjang sisi $AD$ dan $BC$, maka perpanjangan garis tersebut akan berpotongan disatu titik. Namakan titik perpotongannya adalah titik $Q$, dengan panjang $DQ = \gamma$ dan panjang $CQ = \theta$.

Misalkan segiempat konveks dan siklik dengan panjang sisi yang diketahui, yaitu $AD = a$, $DC = b$, $BC = c$ dan $AB = d$. Selanjutnya akan dicari panjang sisi $BP = \alpha$ dan panjang $CP = \beta$.




Gambar 11.3.2:

Perhatikan Gambar 11.3.2 pada segiempat $ABCD$ dan $\Delta BCP$, jumlah sudut berhadapan adalah $180^0$, maka akan diperoleh

$$\angle DAB + \angle DCB = 180^0, \quad (11.3.1)$$

$$\angle DCB + \angle BCP = 180^0, \quad (11.3.2)$$

maka dari persamaan (11.3.1) dan (11.3.2) diperoleh

$$\angle DAB = \angle BCP, \quad (11.3.3)$$

dengan

$$\angle DAB = \angle DAP. \quad (11.3.4)$$

Kemudian pandang segiempat $ABCD$ dan $\Delta BCP$, jumlah sudut berhadapan adalah $180^0$, maka akan diperoleh

$$\angle CDA + \angle ABC = 180^0, \tag{11.3.5}$$

$$\angle ABC + \angle PBC = 180^0, \tag{11.3.6}$$

maka dari persamaan (11.3.5) dan (11.3.6) diperoleh

$$\angle CDA = \angle PBC, \tag{11.3.7}$$

dengan

$$\angle CDA = \angle PDA. \tag{11.3.8}$$

Sehingga dari persamaan (11.3.3) dan (11.3.8) dan dengan kesebangunan, diperoleh

$$\Delta ADP \sim \Delta BCP. \tag{11.3.9}$$

Akibatnya

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP},$$

$$\frac{a}{c} = \frac{d+\alpha}{\beta} = \frac{b+\beta}{\alpha}. \tag{11.3.10}$$

Dengan mengambil dua persamaan dari persamaan (11.3.10)

$$\frac{a}{c} = \frac{d+\alpha}{\beta},$$

$$a\beta = c(d+\alpha),$$

$$\beta = \frac{c}{a}(d+\alpha),$$

$$\beta = \frac{cd+c\alpha}{a}. \tag{11.4.2}$$

Selanjutnya dengan mengambil dua persamaan lainnya dari persamaan (11.3.10)

$$\frac{a}{c} = \frac{b+\beta}{\alpha},$$

$$a\alpha = c(b+\beta),$$

$$a\alpha = cb + c\beta. \tag{11.4.3}$$

Substitusikan persamaan (11.4.2) ke persamaan (11.4.3) diperoleh

$$a\alpha = cb + c\left(\frac{cd + c\alpha}{a}\right),$$

$$a^2\alpha = abc + c^2 d + c^2\alpha,$$

$$a^2\alpha - c^2\alpha = abc + c^2 d,$$

$$\alpha\left(a^2 - c^2\right) = abc + c^2 d,$$

$$\alpha = \frac{abc + c^2 d}{a^2 - c^2}. \qquad (11.4.4)$$

Dengan demikian panjang $BP = \alpha = \dfrac{abc + c^2 d}{a^2 - c^2}$. Setelah memperoleh nilai $\alpha$, maka subtitusikan persamaan (11.4.4) ke persamaan (11.3.11)

$$\beta = \frac{cd + c\alpha}{a},$$

$$a\beta = cd + c\alpha,$$

$$a\beta = cd + c\left(\frac{abc + c^2 d}{a^2 - c^2}\right),$$

$$a\beta = \left(\frac{a^2 cd - c^3 d + abc^2 + c^3 d}{a^2 - c^2}\right),$$

$$\beta = \frac{acd + bc^2}{a^2 - c^2}. \qquad (11.4.5)$$

Dengan demikian panjang $CP = \beta = \dfrac{acd + bc^2}{a^2 - c^2}$.

Selanjutnya akan dicari panjang sisi $DQ = \gamma$ dan panjang $CQ = \theta$. Perhatikan Gambar 11.3.3. Misalkan panjang $DQ = \gamma$ dan panjang $CQ = \theta$. Pada segiempat $ABCD$ dan $\Delta CDQ$, jumlah sudut berhadapan adalah $180^0$, maka akan diperoleh

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^0, \qquad (11.4.6)$$

$$\angle ADC + \angle CDQ = 180^0, \qquad (11.4.7)$$

maka dari persamaan (11.4.6) dan (11.4.7) diperoleh

$$\angle ABC = \angle CDQ, \qquad (11.4.8)$$

dengan

$$\angle ABC = \angle ABQ. \tag{11.4.9}$$

Kemudian pandang segiempat $ABCD$ dan $\Delta CDQ$, jumlah sudut berhadapan adalah $180^0$, maka akan diperoleh

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^0, \tag{11.3.10}$$

$$\angle BCD + \angle DCQ = 180^0, \tag{11.3.11}$$

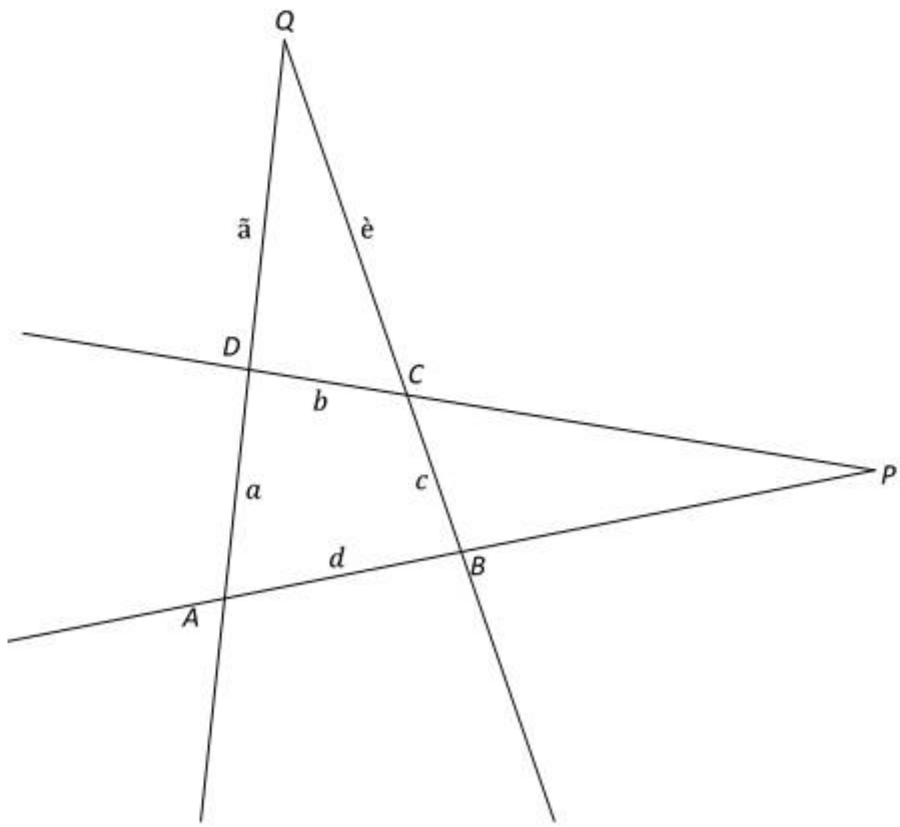
maka dari persamaan (11.3.10) dan (11.3.11) diperoleh

$$\angle BAD = \angle DCQ,$$

(11.3.12)

dengan

$$\angle BAD = \angle BAQ. \tag{11.3.13}$$




Gambar 11.3.3:

Sehingga dari persamaan (11.3.8) dan (11.3.12) dengan kesebangunan sudut-sudut, diperoleh :

$$\Delta ABQ \sim \Delta DCQ. \tag{11.3.14}$$

Akibatnya

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AQ}{CQ} = \frac{BQ}{DQ},$$

$$\frac{d}{b} = \frac{a+\gamma}{\theta} = \frac{c+\theta}{\gamma}. \tag{11.3.15}$$

Dengan mengambil dua persamaan dari persamaan (11.3.15)

$$\frac{d}{b} = \frac{a+\gamma}{\theta},$$

$$d\theta = b(a+\gamma),$$

$$\theta = \frac{b}{d}(a+\gamma),$$

$$\theta = \frac{b}{d}(a+\gamma),$$

$$\theta = \frac{ab+b\gamma}{d}.$$

(11.3.26)

Selanjutnya dengan mengambil dua persamaan lainnya dari persamaan (11.3.15)

$$\frac{d}{b} = \frac{c+\theta}{\gamma},$$

$$d\gamma = b(c+\theta),$$

$$d\gamma = bc + b\theta. \tag{11.3.17}$$

Yang mengakibatkan

$$d\gamma = bc + b\left(\frac{ab+b\gamma}{d}\right),$$

$$d^2\gamma = bcd + ab^2 + b^2\gamma,$$

$$d^2\gamma - b^2\gamma = bcd + ab^2,$$

$$\gamma\left(d^2 - b^2\right) = bcd + ab^2,$$

$$\gamma = \frac{bcd + ab^2}{d^2 - b^2}, \tag{11.3.18}$$

Dengan demikian panjang $DQ = \gamma = \dfrac{bcd + ab^2}{d^2 - b^2}$. Setelah memperoleh nilai $\gamma$, maka subtitusikan persamaan (11.3.18) ke persamaan (11.3.16)

$$\theta = \frac{ab + b\gamma}{d},$$

$$d\theta = ab + b\gamma,$$

$$= ab + b\left(\frac{bcd + ab^2}{d^2 - b^2}\right),$$

$$= \frac{abd^2 - ab^3 + b^2cd + ab^3}{d^2 - b^2},$$

$$d\theta = \frac{abd^2 + b^2cd}{d^2 - b^2},$$

$$\theta = \frac{abd + b^2c}{d^2 - b^2}. \tag{11.3.19}$$

Dengan demikian panjang $CQ = \theta = \dfrac{abd + b^2c}{d^2 - b^2}$.

Dari pembahasan diatas diperoleh persamaan (11.3.4), (11.3.5), (11.3.18) dan (11.3.19). Dengan demikian dapat disimpulkan panjang sisi $BP = \alpha = \dfrac{abc + c^2d}{a^2 - c^2}$, $CP = \beta = \dfrac{acd + bc^2}{a^2 - c^2}$, $DQ = \gamma = \dfrac{bcd + ab^2}{d^2 - b^2}$ dan $CQ = \theta = \dfrac{abd + b^2c}{d^2 - b^2}$ dari perpanjangan sisi $AB$, $DC$, $AD$ dan $BC$ pada segiempat $ABCD$ yang konveks dan siklik. Ini berlaku untuk nilai $a > c$ dan $d > b$, tetapi jika sebaliknya $a < c$ dan $d < b$, maka nilai $\alpha$, $\beta$, $\theta$ dan $\gamma$ akan menjadi negative. Hal Ini tidak mungkin, karena panjang sisi tidak mungkin negative. Oleh karena itu maka diambil nilai mutlaknya. Sehingga panjang sisi $\alpha,\ \beta,\ \theta$ dan $\gamma$ menjadi

$$BP=\alpha=\frac{abc+c^2d}{\left|a^2-c^2\right|},\ \text{dan}\ CP=\beta=\frac{acd+bc^2}{\left|a^2-c^2\right|},$$

$$DQ=\gamma=\frac{bcd+ab^2}{\left|d^2-b^2\right|}\ \text{dan}\ CQ=\theta=\frac{abd+b^2c}{\left|d^2-b^2\right|}.$$

## 11.4. Panjang Jari-jari Lingkaran Singgung Segiempat Konvek

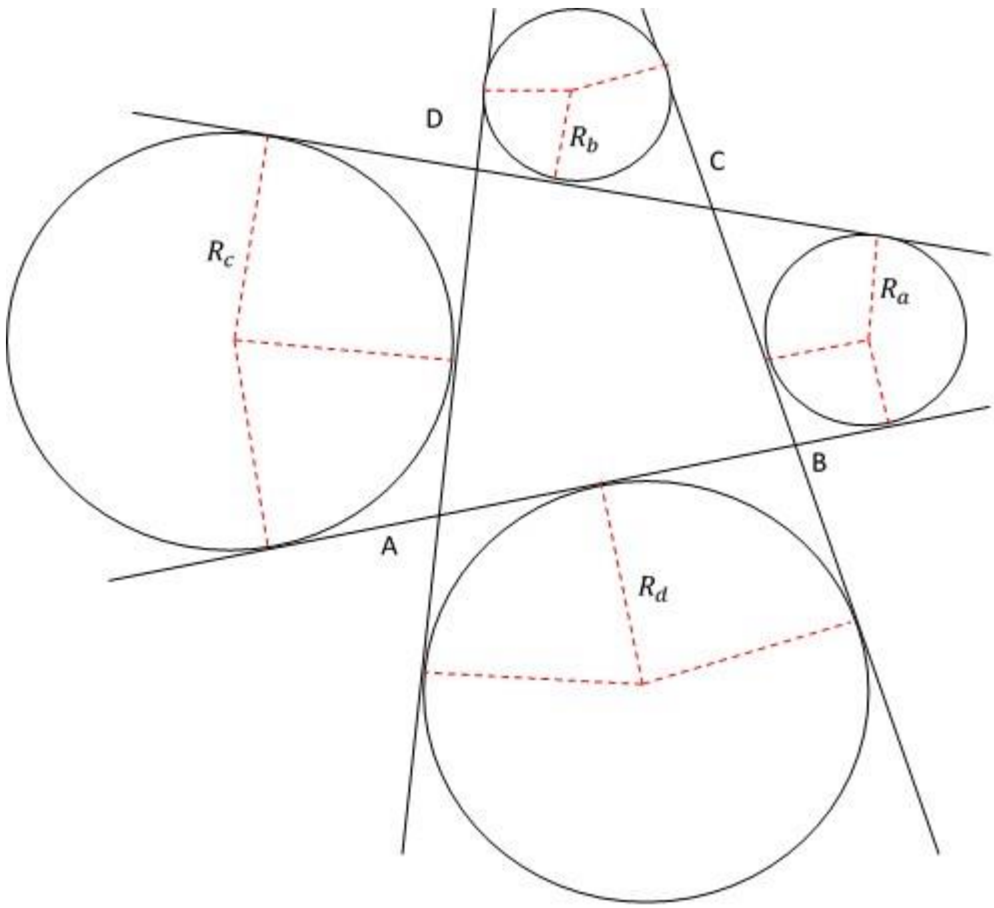
Segiempat konveks $ABCD$ mempunyai empat buah lingkaran singgung luar. Masing-masing lingkaran singgung luar segiempat konveks dapat dihitung panjang jari-jarinya. Panjang jari-jari lingkaran singgung yang menyinggung sisi $BC$ dan $DC$ dapat dicari dengan menggunakan rumus di Teorema 2.2.2, hal ini dikarenakan lingkaran singgung luar segiempat $ABCD$ yang menyinggung sisi $BC$ dan $DC$ juga merupakan lingkaran singgung dalam $\Delta BCP$ dan $\Delta CDQ$ .

Panjang jari-jari lingkaran singgung yang menyinggung sisi $AD$ dan $AB$ dapat dicari dengan menggunakan rumus di Teorema 2.2.3, hal ini dikarenakan lingkaran singgung luar segiempat $ABCD$ yang menyinggung sisi $AD$ dan $AB$ juga merupakan lingkaran singgung luar $\Delta ADP$ dan $\Delta ABQ$ . Pada Gambar 11.4.11, terdapat empat lingkaran singgung segiempat konveks $ABCD$, dengan masing-masing jari-jari lingkaran singgung luarnya $R_a$, $R_b$, $R_c$ dan $R_d$. Selanjutnya akan dihitung panjang masing-masing jari-jari tersebut.

Misalkan segiempat konveks dengan panjang sisi yang diketahui, yaitu $AD=a$, $DC=b$, $BC=c$, $AB=d$,

$$BP=\alpha=\frac{abc+c^2d}{\left|a^2-c^2\right|},\ \ CP=\beta=\frac{acd+bc^2}{\left|a^2-c^2\right|},$$

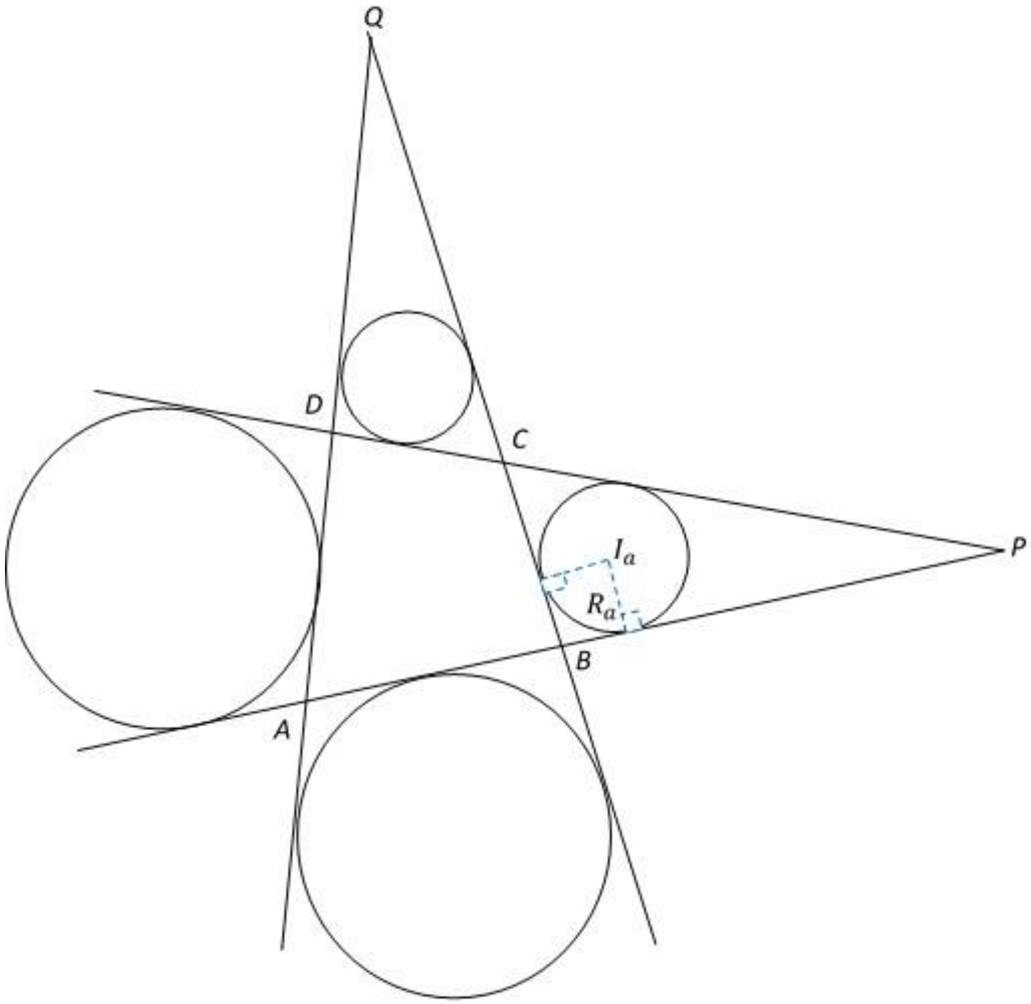
$$DQ = \gamma = \frac{bcd + ab^2}{\left|d^2 - b^2\right|} \text{ dan } CQ = \theta = \frac{abd + b^2 c}{\left|d^2 - b^2\right|}.$$




Gambar 11.4.1

Pada Gambar 11.4.2 pandang $\Delta BCP$, dengan lingkaran singgung yang berpusat di $I_a$ dan berjari-jari $R_a$. Dengan menggunakan Teorema 2.2.2, akan diperoleh panjang jari-jari $R_a$ yaitu

$$R_a = (s - \alpha)\tan\frac{1}{2}C.$$




Gambar 11.4.2:

Selanjutnya dicari dahulu nilai $s$ dari $\Delta BCP$, dengan $s$ merupakan setengah keliling $\Delta BCP$.

$$s = \frac{1}{2}(CB + BP + CP),$$

$$= \frac{1}{2}\left(c + \frac{abc + c^2 d}{a^2 - c^2} + \frac{acd + bc^2}{a^2 - c^2}\right),$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 c - c^3 + abc + c^2 d + acd + bc^2}{a^2 - c^2}\right),$$

$$s = \frac{1}{2}\left( \frac{a^2c + bc^2 + c^2d + abc + acd - c^3}{a^2 - c^2} \right). \qquad (11.4.1)$$

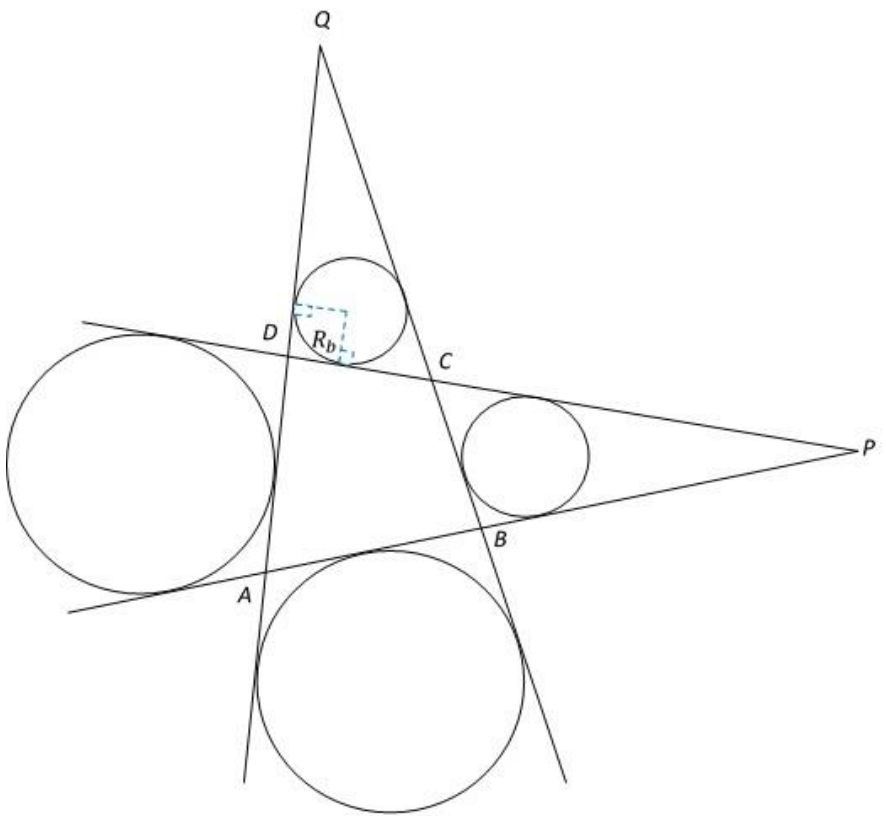
Substitusi nilain $R_a$ dan nilai $\alpha$ ke persamaan (11.4.2)

$$R_a = \left( \frac{1}{2}\left( \frac{a^2c + bc^2 + c^2d + abc + acd - c^3}{a^2 - c^2} \right) - \frac{abc + c^2d}{a^2 - c^2} \right) \tan \frac{1}{2} C,$$

$$= \frac{1}{2}\left( \frac{a^2c + bc^2 + c^2d + abc + acd - c^3 - 2abc - 2c^2d}{a^2 - c^2} \right) \tan \frac{1}{2} C,$$

$$R_a = \frac{1}{2}\left( \frac{a^2c + bc^2 - c^2d - c^3 + acd - abc}{a^2 - c^2} \right) \tan \frac{1}{2} C. \qquad (11.4.1)$$

Dengan cara yang sama, selanjutnya Pandang $\triangle CDQ$ pada Gambar 11.4.3, dengan lingkaran singgung yang berpusat di $I_b$ dan berjari-jari $R_b$. Disini akan dihitung panjang $R_b$.




Gambar 11.4.3

Pada Gambar 11.4.3 pandang $\Delta CDQ$, dengan lingkaran singgung yang berpusat di $I_b$ dan berjari-jari $R_b$. Dengan menggunakan Teorema 2.2.2, akan diperoleh panjang jari-jari $R_b$, yaitu

$$R_b = (s-\gamma)\tan\frac{1}{2}C. \tag{11.4.3}$$

Untuk itu dicari dahulu nilai $s$ dari $\Delta CDQ$, dengan $s$ merupakan setengah keliling $\Delta CDQ$

$$s = \frac{1}{2}(CQ+QD+DC),$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{abd+b^2c}{d^2-b^2}+\frac{bcd+ab^2}{d^2-b^2}+b\right),$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{abd+b^2c+bcd+ab^2+bd^2-b^3}{d^2-b^2}\right),$$

$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{ab^2+b^2c+bd^2+abd+bcd-b^3}{d^2-b^2}\right). \tag{11.4.4}$$

Substitusi persamaan (11.4.4) dan nilai $\gamma$ ke persamaan (11.4.3)

$$R_b = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{ab^2+b^2c+bd^2+abd+bcd-b^3}{d^2-b^2}\right)-\frac{bcd+ab^2}{d^2-b^2}\right)\tan\frac{1}{2}C,$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{ab^2+b^2c+bd^2+abd+bcd-b^3-2bcd-2ab^2}{d^2-b^2}\right)\tan\frac{1}{2}C,$$

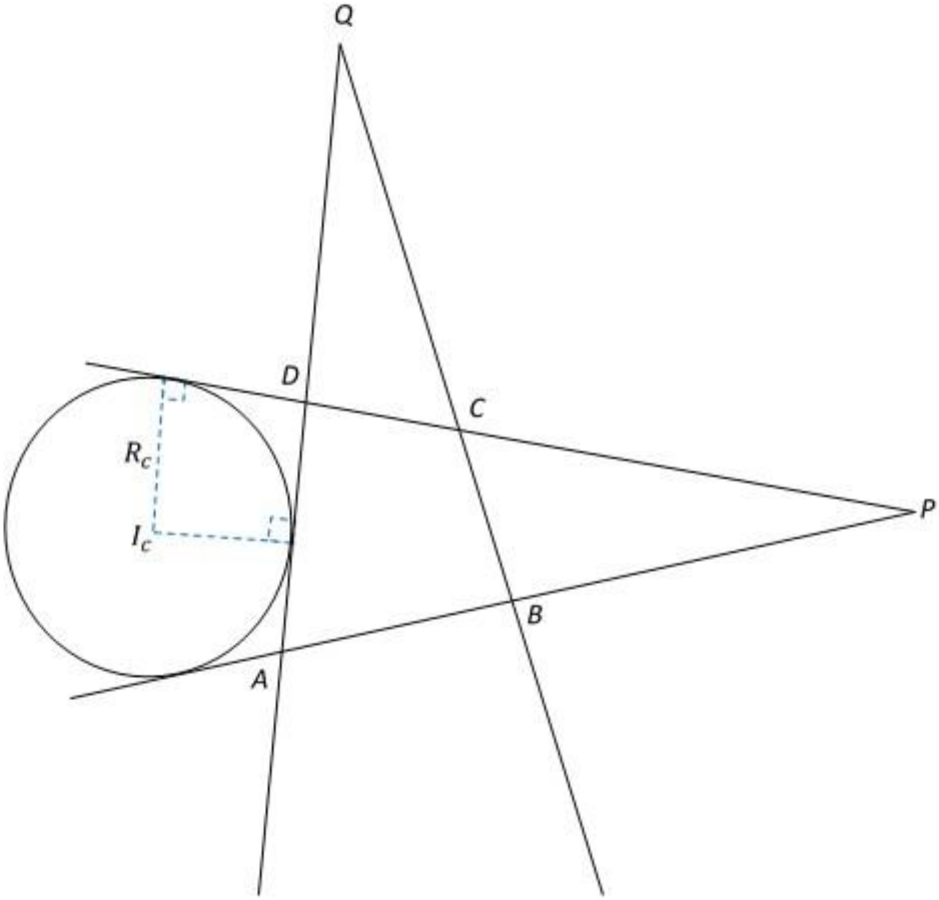
$$R_b = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2c+bd^2-ab^2-b^3+abd-bcd}{d^2-b^2}\right)\tan\frac{1}{2}C. \tag{11.4.5}$$

Sehingga didapat panjang $R_b = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2c+bd^2-ab^2-b^3+abd-bcd}{d^2-b^2}\right)\tan\frac{1}{2}C.$

Panjang jari-jari lingkaran singgung yang menyinggung sisi $AD$ dan $AB$ dapat dicari dengan menggunakan rumus di Teorema 2.2.3, hal ini dikarenakan lingkaran singgung luar segiempat $ABCD$ yang menyinggung sisi $AD$ dan $AB$ juga merupakan lingkaran singgung luar $\Delta ADP$ dan $\Delta ABQ$. Selanjutnya Pandang $\Delta ADP$ pada Gambar 11.4.4, dengan lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_c$ dan berjari-jari $R_c$.

Dengan menggunakan Teorema 2.3.1, panjang Jari-jari lingkaran dalam $R_c$ dapat dicari dengan menggunakan

$$R_c = s\tan\frac{1}{2}P. \tag{11.4.6}$$




Gambar 11.4.4

Untuk itu dicari dahulu nilai $s$ dari $\Delta ADP$, dengan $s$ merupakan setengah keliling $\Delta ADP$

$$s = \frac{1}{2}(AP + PD + AD), \quad = \frac{1}{2}((d+\alpha)+(\beta+b)+a),$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(d+\frac{abc+c^2d}{a^2-c^2}\right)+\left(\frac{acd+bc^2}{a^2-c^2}+b\right)+a\right),$$

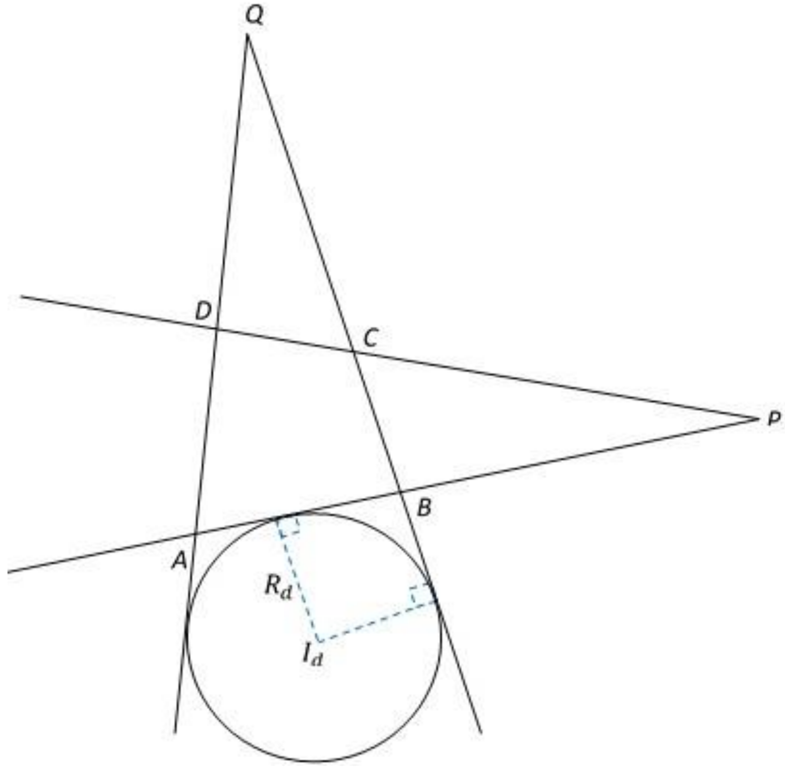
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2d-c^2d+abc+c^2d+acd+bc^2+a^2b-bc^2+a^3-ac^2}{a^2-c^2}\right),$$

$$s=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2d+a^2b-ac^2+a^3+abc+acd}{a^2-c^2}\right). \qquad (11.4.7)$$

Substitusi persamaan (11.4.7) ke persamaan (11.4.6)

$$R_c=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2d+a^2b-ac^2+a^3+abc+acd}{a^2-c^2}\right)\tan\frac{1}{2}P. \qquad (11.4.8)$$

Selanjutnya Pandang $\Delta ABQ$ pada Gambar 11.4.5, dengan lingkaran singgung luar yang berpusat di $I_d$ dan berjari-jari $R_d$ .




Gambar 11.4.5

Dengan menggunakan Teorema 2.3.1, panjang Jari-jari lingkaran dalam $R_d$ dapat dicari dengan cara :

$$R_d = s\tan\frac{1}{2}Q. \qquad (11.4.9)$$

Untuk itu dicari dahulu nilai $s$ dari $\Delta ABQ$, dengan $s$ merupakan setengah keliling $\Delta ABQ$

$$s = \frac{1}{2}(AB + BQ + AQ),$$

$$= \frac{1}{2}(d + (c+\theta) + (\gamma + a)),$$

$$= \frac{1}{2}\left(d + \left(c + \frac{abd + b^2c}{d^2 - b^2}\right) + \left(\frac{bcd + ab^2}{d^2 - b^2} + a\right)\right),$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d^3 - b^2d + cd^2 - b^2c + abd + b^2c + bcd + ab^2 + ad^2 - ab^2}{d^2 - b^2}\right),$$

$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{ad^2 + cd^2 - b^2d + d^3 + abd + bcd}{d^2 - b^2}\right). \qquad (11.4.10)$$

Substitusi persamaan (11.4.10) ke persamaan (11.4.9)

$$R_d = \frac{1}{2}\left(\frac{ad^2 + cd^2 - b^2d + d^3 + abd + bcd}{d^2 - b^2}\right)\tan\frac{1}{2}Q. \qquad (11.4.11)$$

Dari pembahasan diatas pada persamaan (11.4.2), (11.4.5), (11.4.8) dan (11.4.10), didapat panjang jari-jari untuk masing-masing lingkaran luar segiempat konveks $ABCD$. Untuk lingkaran yang berpusat di $I_a$ memiliki jari-jari

$$R_a = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2c + bc^2 - c^2d - c^3 + acd - abc}{a^2 - c^2}\right)\tan\frac{1}{2}C.$$

Untuk lingkaran yang berpusat di $I_b$ memiliki jari-jari

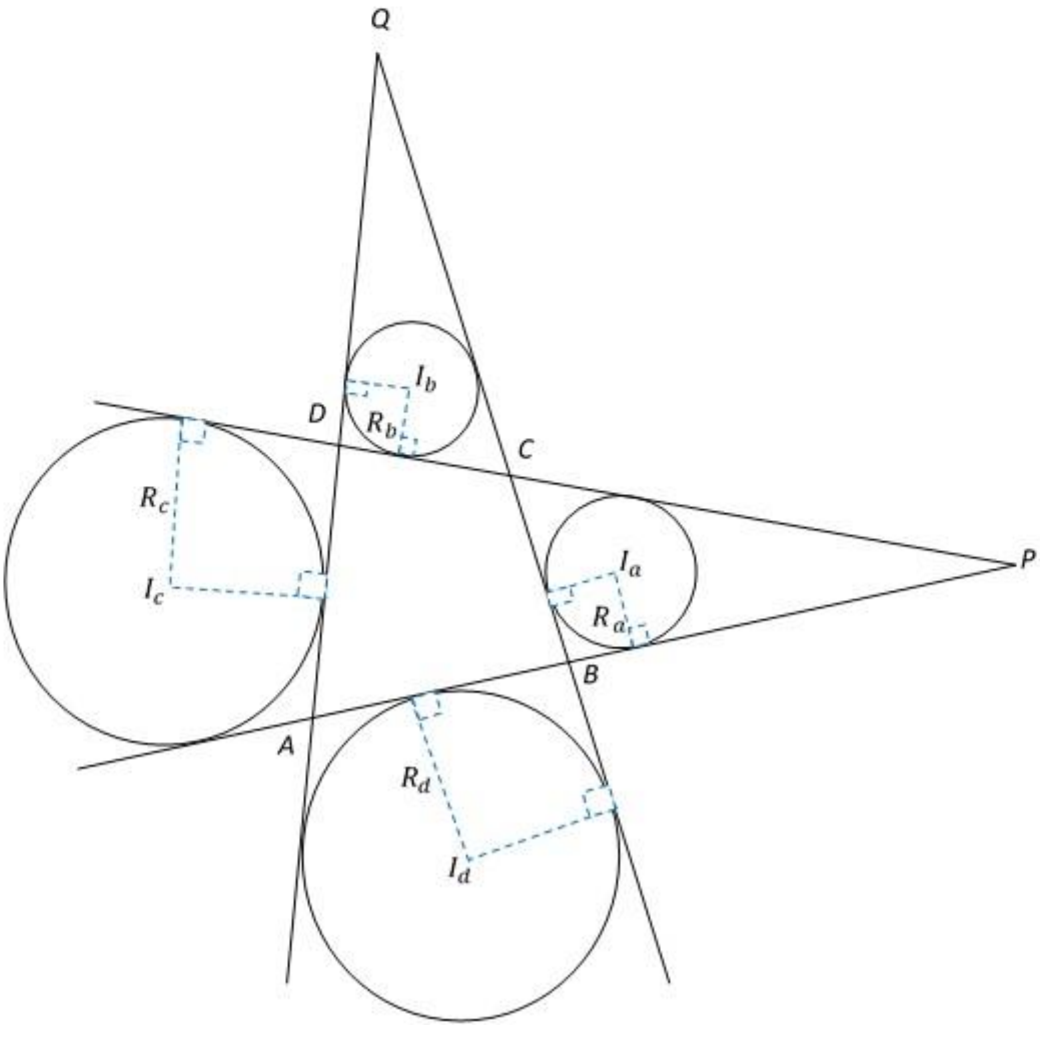
$$R_b = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2c + bd^2 - ab^2 - b^3 + abd - bcd}{d^2 - b^2}\right)\tan\frac{1}{2}C.$$

Untuk lingkaran yang berpusat di $I_c$ memiliki jari-jari

$$R_c = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2d + a^2b - ac^2 + a^3 + abc + acd}{a^2 - c^2}\right)\tan\frac{1}{2}P.$$

Untuk lingkaran yang berpusat di $I_d$ memiliki jari-jari

$$R_d = \frac{1}{2}\left(\frac{ad^2 + cd^2 - b^2d + d^3 + abd + bcd}{d^2 - b^2}\right)\tan\frac{1}{2}Q.$$




Gambar 11.4.6:

Ini berlaku untuk nilai $a > c$ dan $d > b$, tetapi jika sebaliknya $a > c$ dan $d > b$, maka nilai $R_a$, $R_b$, $R_c$ dan $R_d$ akan menjadi negative. Hal Ini tidak mungkin, karena panjang sisi tidak mungkin negative. Oleh karena itu maka diambil nilai mutlaknya. Sehingga panjang

$$R_a = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2c + bc^2 - c^2d - c^3 + acd - abc}{\left|a^2 - c^2\right|}\right)\tan\frac{1}{2}C.$$

$$R_b = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2c + bd^2 - ab^2 - b^3 + abd - bcd}{\left|d^2 - b^2\right|}\right)\tan\frac{1}{2}C.$$

$$R_c = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2d + a^2b - ac^2 + a^3 + abc + acd}{\left|a^2 - c^2\right|}\right)\tan\frac{1}{2}P.$$

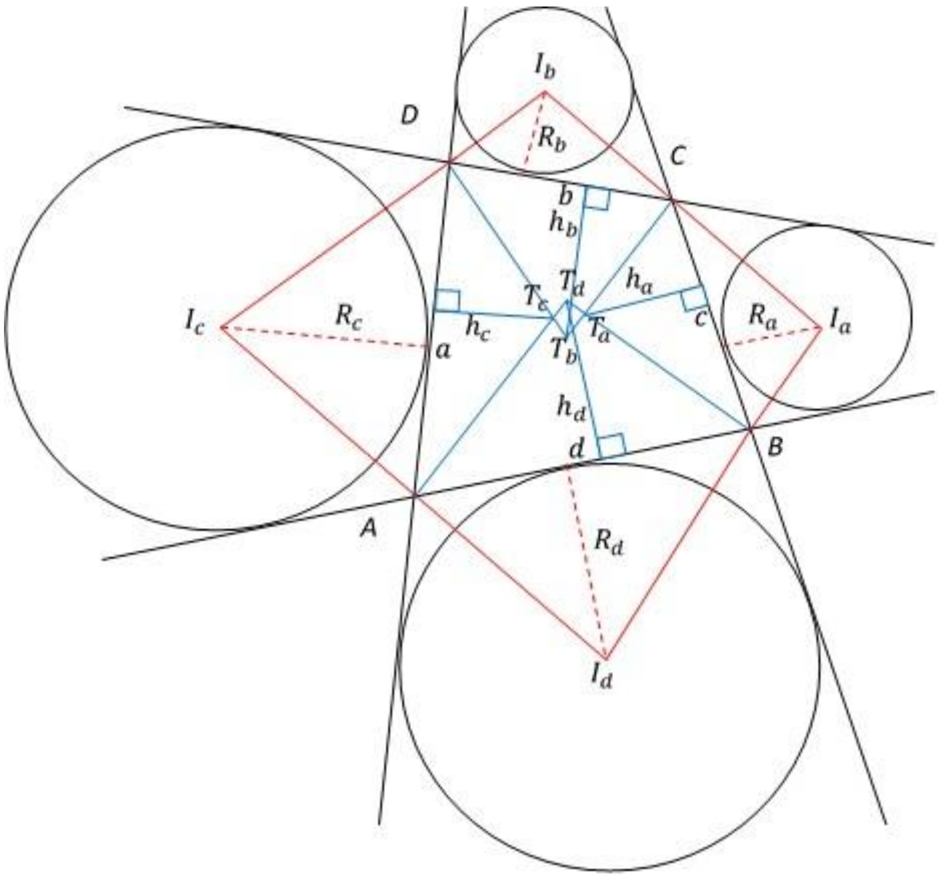
$$R_d = \frac{1}{2}\left(\frac{ad^2 + cd^2 - b^2d + d^3 + abd + bcd}{\left|d^2 - b^2\right|}\right)\tan\frac{1}{2}Q.$$

Segiempat konveks $ABCD$ mempunyai empat lingkaran luar, yang masing-masing menyentuh satu sisi segiempat konveks $ABCD$ dan perpanjangan dua sisi lainnya. Perkalian dua jari-jari lingkaran luar segiempat konveks $ABCD$ sama dengan dua jari-jari lingkaran luar lainnya dari segiempat konveks $ABCD$. Misalkan $R_aR_c = R_bR_d$.

**Teorema 11.4.11** Segiempat Konveks $ABCD$, dengan jari-jari lingkaran luar $R_a$, $R_b$, $R_c$ dan $R_d$, yang masing-masing berpusat di $I_a$, $I_b$, $I_c$ dan $I_d$ akan berlaku :

$$R_aR_c = R_bR_d.$$

**Bukti :** Pada Gambar 11.3.10, Segiempat konveks $ABCD$ dengan bisector sudut masing-masing sudut bertemu dititik $T_a$, $T_b$, $T_c$ dan $T_d$. Jarak antara $T_a$ ke sisi $c$ adalah $h_a$. Jarak antara $T_b$ ke sisi $b$ adalah $h_b$. Jarak antara $T_c$ ke sisi $a$ adalah $h_c$. Jarak antara $T_d$ ke sisi $d$ adalah $h_c$. Sehingga panjang masing-masing sisi pada segiempat konveks $ABCD$ adalah




Gambar 11.3.10

$$a = \frac{h_c}{\tan \frac{A}{2}} + \frac{h_c}{\tan \frac{D}{2}},$$

$$= h_c \left( \frac{1}{\tan \frac{A}{2}} + \frac{1}{\tan \frac{D}{2}} \right),$$

$$a = h_c \left( \cot \tfrac{A}{2} + \cot \tfrac{D}{2} \right), \qquad (11.4.12)$$

atau

$$a = \frac{R_c}{\tan\left(90^0 - \frac{A}{2}\right)} + \frac{R_c}{\tan\left(90^0 - \frac{D}{2}\right)},$$

$$= R_c \left( \frac{1}{\tan\left(90^0 - \frac{A}{2}\right)} + \frac{1}{\tan\left(90^0 - \frac{D}{2}\right)} \right),$$

$$= R_c\left(\frac{1}{\cot\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cot\frac{D}{2}}\right),$$

$$a = R_c\left(\tan\tfrac{A}{2}+\tan\tfrac{D}{2}\right). \qquad (11.4.13)$$

Dari persamaan (11.4.12) dan (11.4.13) didapat

$$h_c\left(\cot\tfrac{A}{2}+\cot\tfrac{D}{2}\right) = a = R_c\left(\tan\tfrac{A}{2}+\tan\tfrac{D}{2}\right). \qquad (11.4.14)$$

Selanjutnya

$$b = \frac{h_b}{\tan\frac{C}{2}}+\frac{h_b}{\tan\frac{D}{2}},$$

$$= h_b\left(\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{D}{2}}\right),$$

$$b = h_b\left(\cot\tfrac{C}{2}+\cot\tfrac{D}{2}\right), \qquad (11.4.15)$$

Atau

$$b = \frac{R_b}{\tan\left(90^0-\frac{C}{2}\right)}+\frac{R_b}{\tan\left(90^0-\frac{D}{2}\right)},$$

$$b = R_b\left(\frac{1}{\tan\left(90^0-\frac{C}{2}\right)}+\frac{1}{\tan\left(90^0-\frac{D}{2}\right)}\right),$$

$$= R_b\left(\frac{1}{\cot\frac{C}{2}}+\frac{1}{\cot\frac{D}{2}}\right),$$

$$b = R_b\left(\tan\tfrac{C}{2}+\tan\tfrac{D}{2}\right). \qquad (11.4.16)$$

Dari persamaan (11.4.15) dan (11.4.16) didapat

$$h_b\left(\cot\tfrac{C}{2}+\cot\tfrac{D}{2}\right) = b = R_b\left(\tan\tfrac{C}{2}+\tan\tfrac{D}{2}\right). \qquad (11.4.17)$$

Selanjutnya

$$c = \frac{h_a}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{h_a}{\tan\frac{C}{2}},$$

$$= h_a\left(\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}\right),$$

$$c = h_a\left(\cot\tfrac{B}{2}+\cot\tfrac{C}{2}\right), \qquad (11.4.18)$$

atau

$$c = \frac{R_a}{\tan\left(90^0 - \frac{B}{2}\right)} + \frac{R_a}{\tan\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)},$$

$$= R_a\left(\frac{1}{\tan\left(90^0 - \frac{B}{2}\right)} + \frac{1}{\tan\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)}\right),$$

$$= R_a\left(\frac{1}{\cot\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{C}{2}}\right),$$

$$c = R_a\left(\tan\tfrac{B}{2} + \tan\tfrac{C}{2}\right). \qquad (11.4.19)$$

Dari persamaan (11.4.18) dan (11.4.19) didapat

$$h_a\left(\cot\tfrac{B}{2} + \cot\tfrac{C}{2}\right) = c = R_a\left(\tan\tfrac{B}{2} + \tan\tfrac{C}{2}\right). \qquad (11.4.20)$$

Selanjutnya

$$d = \frac{h_d}{\tan\frac{A}{2}} + \frac{h_d}{\tan\frac{B}{2}}, \quad = h_d\left(\frac{1}{\tan\frac{A}{2}} + \frac{1}{\tan\frac{B}{2}}\right),$$

$$d = h_d\left(\cot\tfrac{A}{2} + \cot\tfrac{B}{2}\right), \qquad (11.4.21)$$

atau

$$d = \frac{R_d}{\tan\left(90^0 - \frac{A}{2}\right)} + \frac{R_d}{\tan\left(90^0 - \frac{B}{2}\right)},$$

$$= R_d\left(\frac{1}{\tan\left(90^0 - \frac{A}{2}\right)} + \frac{1}{\tan\left(90^0 - \frac{B}{2}\right)}\right),$$

$$= R_d\left(\frac{1}{\cot\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{B}{2}}\right),$$

$$d = R_d\left(\tan\tfrac{A}{2} + \tan\tfrac{B}{2}\right). \qquad (11.4.22)$$

Dari persamaan (11.4.21) dan (11.4.22) didapat

$$h_d\left(\cot\tfrac{A}{2} + \cot\tfrac{B}{2}\right) = d = R_d\left(\tan\tfrac{A}{2} + \tan\tfrac{B}{2}\right). \qquad (11.4.23)$$

Jika dikalikan $a$ dan $c$, pada persamaan (11.4.14) dan (11.4.20) didapat

$$h_c\left(\cot\tfrac{A}{2} + \cot\tfrac{D}{2}\right)h_a\left(\cot\tfrac{B}{2} + \cot\tfrac{C}{2}\right) = R_c\left(\tan\tfrac{A}{2} + \tan\tfrac{D}{2}\right)R_a\left(\tan\tfrac{B}{2} + \tan\tfrac{C}{2}\right),$$

$$h_a h_c\left(\cot\tfrac{A}{2} + \cot\tfrac{D}{2}\right)\left(\cot\tfrac{B}{2} + \cot\tfrac{C}{2}\right) = R_a R_c\left(\tan\tfrac{A}{2} + \tan\tfrac{D}{2}\right)\left(\tan\tfrac{B}{2} + \tan\tfrac{C}{2}\right),$$

$$h_a h_c \left( \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{D}{2}}{\sin \frac{D}{2}} \right) \left( \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \right) = R_a R_c \left( \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{D}{2}}{\cos \frac{D}{2}} \right) \left( \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \right),$$

- $$h_a h_c \left( \frac{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{D}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{D}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{D}{2}} \right) \left( \frac{\cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \right) =$$

$$R_a R_c \left( \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{D}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{D}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{D}{2}} \right) \left( \frac{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \right),$$

$$\frac{h_a h_c}{R_a R_c} = \frac{\left( \sin \frac{A}{2} \sin \frac{D}{2} \right) \left( \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)}{\left( \cos \frac{A}{2} \cos \frac{D}{2} \right) \left( \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right)},$$

$$\frac{h_a h_c}{R_a R_c} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \tan \frac{D}{2}, \qquad (11.4.24)$$

Jika dikalikan $b$ dan $d$, pada persamaan (11.4.17) dan (11.4.23) didapat

$$h_b \left( \cot \tfrac{C}{2} + \cot \tfrac{D}{2} \right) h_d \left( \cot \tfrac{A}{2} + \cot \tfrac{B}{2} \right) = R_b \left( \tan \tfrac{C}{2} + \tan \tfrac{D}{2} \right) R_d \left( \tan \tfrac{A}{2} + \tan \tfrac{B}{2} \right),$$

$$h_b h_d \left( \cot \tfrac{C}{2} + \cot \tfrac{D}{2} \right) \left( \cot \tfrac{A}{2} + \cot \tfrac{B}{2} \right) = R_b R_d \left( \tan \tfrac{C}{2} + \tan \tfrac{D}{2} \right) \left( \tan \tfrac{A}{2} + \tan \tfrac{B}{2} \right),$$

$$h_b h_d \left( \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} + \frac{\cos \frac{D}{2}}{\sin \frac{D}{2}} \right) \left( \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \right) = R_b R_d \left( \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{D}{2}}{\cos \frac{D}{2}} \right) \left( \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \right),$$

$$h_b h_d \left( \frac{\cos \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2}}{\sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2}} \right) \left( \frac{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} \right) =$$

$$R_b R_d \left( \frac{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2} + \cos \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2}}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{D}{2}} \right) \left( \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} \right),$$

$$\frac{h_b h_d}{R_b R_d} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\tan\frac{D}{2}. \qquad (11.4.25)$$

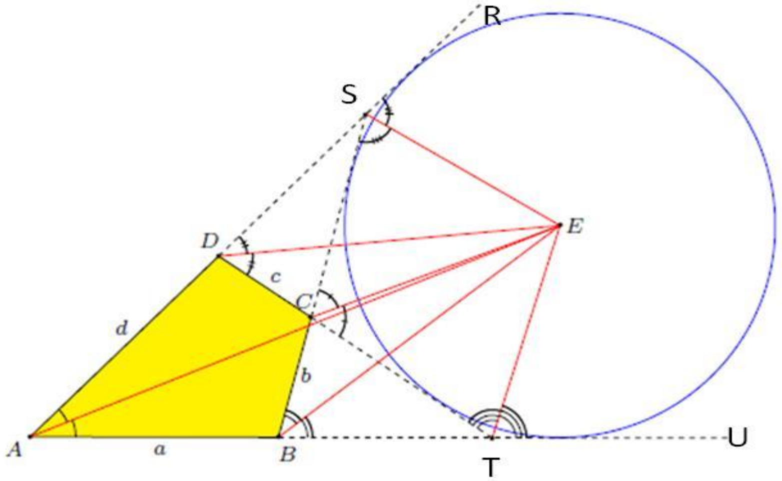
Dari persamaan (11.4.24) dan persamaan (11.4.25) diperoleh

$$\frac{h_a h_c}{R_a R_c} = \frac{h_b h_d}{R_b R_d}. \qquad (11.4.26)$$

Pada segiempat $ABCD$ masing-masing bisector sudut konkuren disatu titik, sehingga menurut Teorema 2.2.1 mengakibatkan $h_a = h_b = h_c = h_d$. Maka persamaan (11.4.26) menjadi $R_a R_c = R_b R_d$. ■

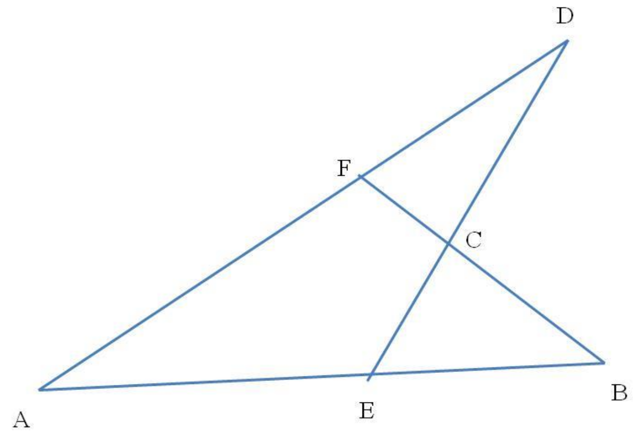
## Latihan 14

1. Perhatikan gambar di bawah, tunjukkan bahwa
    a. Garis bagi dari ∠ A, ∠CDS dan ∠CRS berpotongan di satu titik
    b. Garis bagi dari ∠A, ∠CBT dan ∠CTU berpotongan di satu titik
    c. Tunjukkan konkurensi hasil a dan b juga berpotongan di titik yang sama

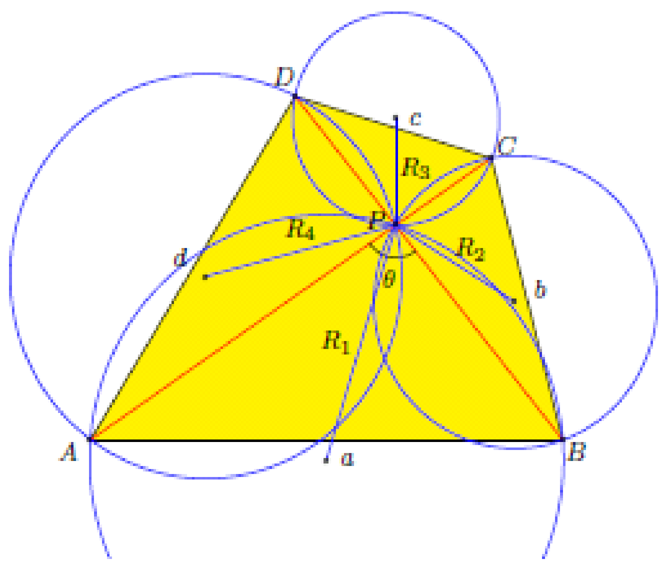



2. Perhatikan gambar pada soal nomor 1. Hitunglah panjang sisi BT, CT.
3. Kembali pada gambar soal nomor 1. Hitunglah panjang sisi TE, CE dan SE.

4. Hitunglah panjang jari-jari lingkaran luar dengan menggunakan besar ∠A.
5. Misalkan pada segiempat ABCD, AB = a, BC = b, CD = c dan DA = d, dengan a + b = c + d atau a + d = b + c. Bisakah segiempat tersebut mempunyai lingkaran singgung luar. Jika bisa berikan buktinya, jika tidak bisa berikan contoh penyangkalnya.
6. Misalkan pada segiempat ABCD, AB = a, BC = b, CD = c dan DA = d, dengan $|a - c| = |b - d|$ , bisakah segiempat tersebut mempunyai lingkaran luar.
7. Bila suatu segiempat ABCD mempunyai lingkaran luar, berapakah panjang jari-jari lingkaran luarnya.
8. Perhatikan segiempat non konvek di bawah ini. Bisakah anda bentuk lingkarang singgung luar menyinggung sisi B′C, CD dan perpanjangan sisi AC dan AB′. Jika bisa berikan langkah kontruksinya dan jika tidak bisa berikan alasannya.




9. Perhatikan gambar disamping ini, dan tunjukkan bahwa
   $R_1 + R_2 = R_3 + R_4$ atau
   $R_1 + R_4 = R_2 + R_3$.

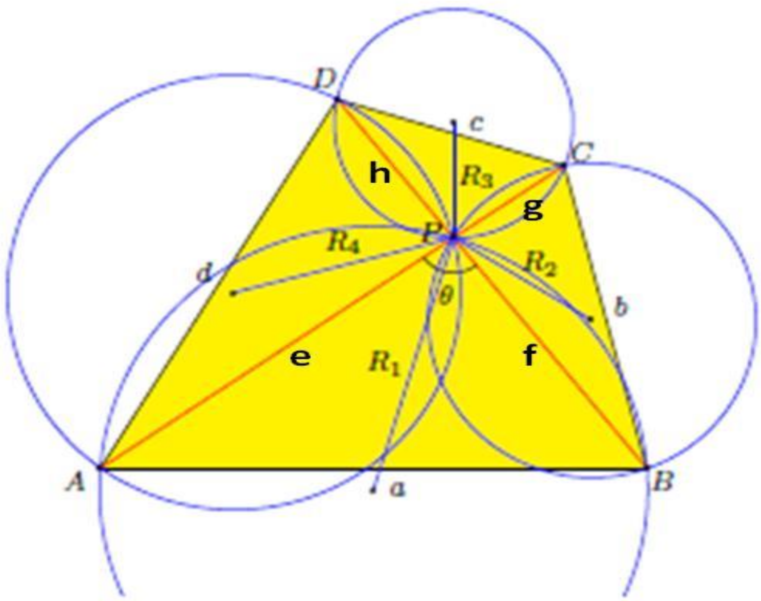


10. Kembali pada gambar soal no 6, tunjukkan bahwa a + b = c + d jika dan hanya jika $R_1 + R_2 = R_3 + R_4$ dan a + d = b + c jika dan hanya jika $R_1 + R_4 = R_2 + R_3$.
11. Jika suatu segiempat mempunyai lingkaran luar, maka tunjukkanlah bahwa luas segiempat tersebut adalah

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{(pq)^2 - (ac - bd)^2}$$

Dengan *p* dan *q* adalah panjang diagonalnya.

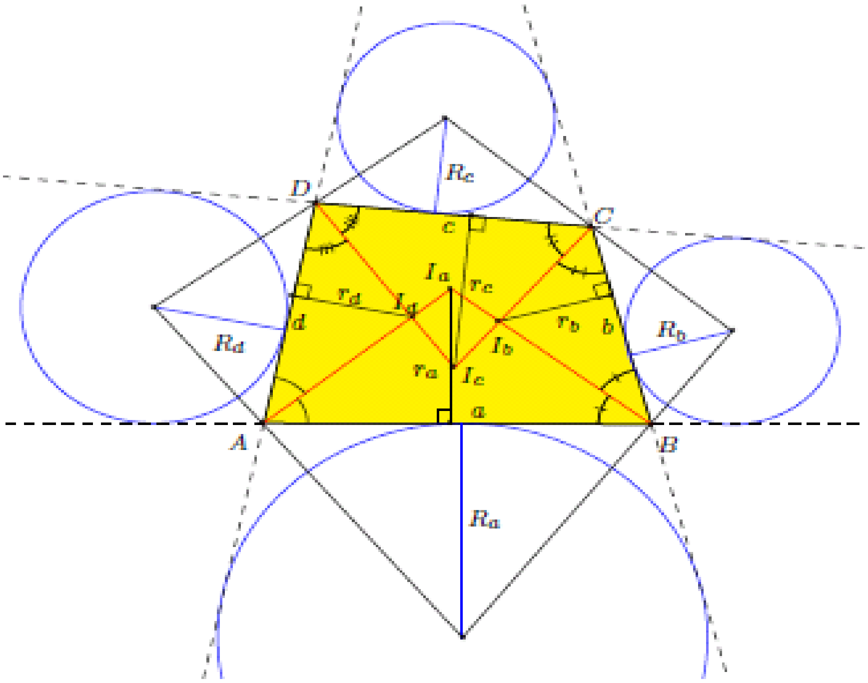
12. Jika pada segiempat ABCD seperti gambar di bawah ini, dengan e, f, g dan h masing-masing adalah jarak dari titik A, B, C dan D ke titik P. maka tunjukkanlah bahwa berlaku agh + cef = beh + dfg.



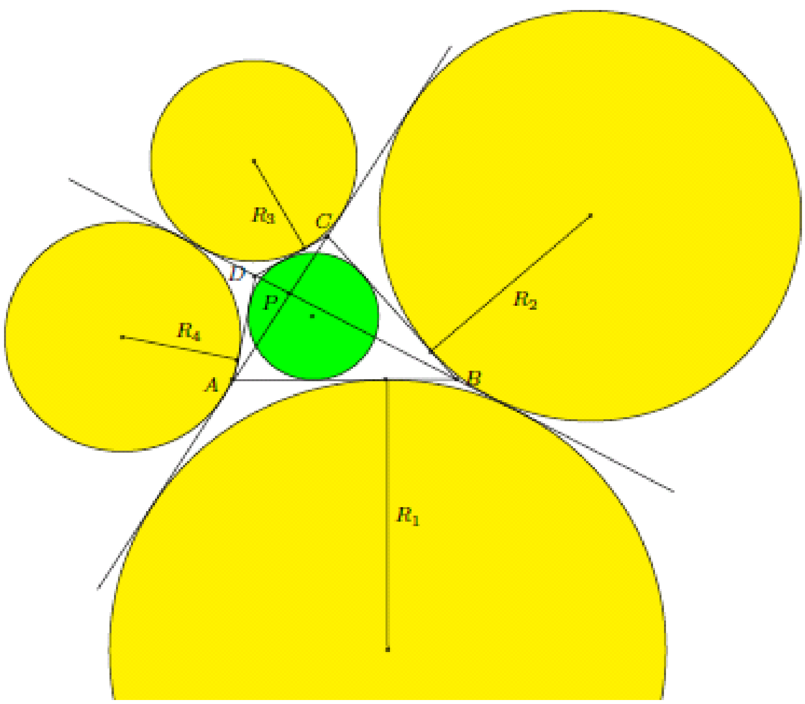

13. Tunjukkan bahwa jika persamaan pada soal nomor 9 (gambar di bawah) maka segiempat tersebut mempunyai lingkaran singgung luar.
14. Perhatikan gambar di bawah ini, tunjukkan bahwa berlaku $R_a.R_c = R_b.R_d$.
15. Perhatikan kembali gambari di bawah dan tunjukkan bahwa jika segiempat tersebut mempunyai jari-jari lingkaran dalam (katakana *r*) maka akan berlaku

$$r = \sqrt{R_a.R_c} = \sqrt{R_b.R_d}$$

16. Perhatikan gambar di bawah ini dan buktikan bahwa $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$ jika dan hanya jika $R_1.R_3 = R_2.R_4$.




Gambar soal no 14 dan 15




Gambar soal no 16.

## DAFTAR PUSTAKA


1. Amarasunghe, G.W.I.S. 2012. On the Standart Lengths of Angle Bisectors and the Angle Bisector Theorem, *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, Vol 1 : hal 15-27
2. Ana Sliep·cevic, 2002, A New Generalization of the Butterfly Theorem, *Journal for Geometry and Graphics*, Volume 6, no 1, 61 – 68.
3. Atul Dixit and Darij Grinberg, 2004, Orthopoles and the Pappus Theorem. *Forum Geometricorum*, 4, 53 – 59.
4. Boyd.J.N and Raychowdhury.P.N, 1999. The Gergonne Point Generalized Through Convex Coordinates, *Internet. J. Math. Sci*, 22 (2): 423-430.
5. Brian, O.C, 2010, *Misteries of the Equilateral Triangle*, Hikari Ltd,
6. Bogomolny, A. 2008. Sine, Cosine and Ptolemy's theorem. http://www.cut-the-knot.org/proofs/sine,cosine.html#law, 22 Mei 2012. Pk. 16.22.
7. Bottema, O, 2008, *Topics in Elementary Geometry*, second editions, springer, New-York
8. Coxeter, H.S.M and Greitzer, 1967, *Geometry Revisited*, Mathematical Association of America (Inc.)
9. D. Grinberg and P. Yiu, 2002, 2002, The Apollonius Circles as a Tucker Circle, *Forum Geometricorum*, 2, 175 – 182.
10. Dergiades, N. 2004. Signed distances and the Erdős-Mordell inequality. *Forum Geom*. 4: 67–68.
11. Dong Wu Y, Chun L.Y and Zhang, Z.A, 2009, A Geometric Inequality of the Erdos-Mordell Type, *Journal of Innequalities in Pure and Applied Mathematic*, Volume 10, issue 4, 1 – 5.
12. Downs Jr., F.L. 1964. *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, London
13. Enrico Bombieri and Walter Gubler, 2006, *Height in Diophantine Geometry*, Cambridge University Press, New-York.
14. Finbarr Holland, 2007, Another Verification of Fagnano's Theorem**,** *Forum Geometricorum*. Volume 7, 207–210

15. Florentin Smarandache, I.P, 2012, *The Geometry of Homological Triangle*, The Education Publisher, Inc, Ohio,
16. Gibson, C.G, 2003, *Elementary Euclidean Geometry An Introduction*, Cambridge University Press, New-York.
17. Gerard A. Venema: *Exploring Advanced Euclidean Geometry with Geometer's Sketchpad*, July 2006.
18. Godfray, C & Siddons, A.W. 1908. *Modern Geometry*. Cambridge University Press, London.
19. Hasriati, 2010, Carnot's Theorem in Barycentric Coordinates, *Prosiding Seminar UKM-Unri ke* 6, Bangi, 513 – 515.
20. Hoehn, L. 2007. A New Characterization of the Nagel Point. *Missouri J. Math. Sci*, **11**(1): 45-48.
21. Holland, F, 2007, Another Verifications of Fagnano's Theorem, *Forum Geometricorum*, 7, 2007 – 2010.
22. Hung, T.Q. 2007. On the extension of Carnot's Theorem. *Mathematical Reflections.* 6: 1-4.
23. Jian Liu, 2008,A Weighted Geometric Inequality and its Applications, *Journal of Inequality in pure and Applied Mathematic*s, 9(2), 1 – 9.
24. Jian Liu, 2011, A New Proof of the Erdos-Mordell Innequality, *Int Eletronic Journal of Geometry,* volume 4 no 2, 114 – 119.
25. Josefsson, M. 2011. The Area of the Diagonal Point Triangle. *Forum Geometricorum*, **11**: 213-216.
26. Kimberling, C, *Encyclopedia of Triangle Centers*, 2000, http://www2.evansville/edu.ck6/encyclopedia.
27. Kin Y li, 2005, Famous Geometry Theorems, M*athematical Excalibur*, Volume 10 no 3, 1 – 4.
28. Lev Emeryanov, 2004, On the Intercepts of The OI-Line. *Forum Geometricorum*, 4, 81 – 84.

29. Odehnal, B. 2010. Generalized Gergonne Point and Nagel Point. *Beitr. Algebra Geom,* **51**(2): 477-491.
30. Malgorzata Buba-Brzozowa, 2000, Ceva's and Menelaus' Theorems for the n-Dimensional Space, *Journal for Geometry and Graphics,* Volume 4, No. 2, 115-118.
31. Mario Dalc’in. Isotomic Inscribed Triangles and Their Residuals. *Forum Geometricorum*.vol 3 (2003) 125-134.
32. Marshall W. Buck and Robert L. Siddon, 2012, The Area of a Polygon with an Inscribed Circle, *Arxiv math*, 1203.3438, volume 1, pp, 1 – 13.
33. Mashadi, 2010, Bukti Sederhana Dari Teorema Carnot’s dan Ketaksamaan Erdoss-Mordell. *Proseding KNM* XV, Manado, 41 – 55.
34. Mashadi. 2012. *Buku Ajar Geometri.* PUSBANGDIK UNRI. Pekanbaru
35. Mashadi, Sri Gemawati, Hasriati and Putri Januarti, Some Result on Excircle of Quadrilateral, JP Journal of Mathematical Sciences, Volume 14, Issues 1 & 2, 2015, Pages 41-56.
36. Minculet, N. Barbu, C. 2012. Cevian Of Rank (k, l, m) In Triangles. *Internasional Journal Of Geometrical*, **1**/2 (2012): 22-23.
37. M. Josefsson, *More Characterizations of Tangential Quadrilaterals*, Forum Geometricorum, 11 (2011), 65-82.
38. Nguyen Minh Ha, 2004, Another Proof of Fagnano’s Inequality. *Forum Geometricorum* Volume 4, 199–201.
39. Paul Yiu, 2001, *Introduction to the Geometryof the Triangle*, Department of Mathematics Florida Atlantic University
40. Salazar, J. C. 2004. On the Areas of the Intouch and Extouch Triangles. *Forum Geometricorum*, **4** (2004): 61-65.
41. Sastry, K. R. S. 2001. Heron Triangles: A Gergonne-Cevian-and-Median Perspective. *Forum Geometricorum*. **1**(2001): 17-24
42. Serge Lang and Gene Murrow, 1988, *Geometry*, second editions, Springer, London.

43. Sindey Kung, 2005, A Butterfly Theorems for Quadrilateral, *Mathematics Magazine*, Volume 78 no 4, 314 – 316.

44. Sri Gemawati, 2010, Poncelet's Theorem on Ellips, *Prosiding Seminar UKM-Unri* ke 6, Bangi, , 174 – 176.

45. Vandajav, A, Tserendorj, B and Undrakh, 2012, On Some Weighted Erdos-Mordell Type Innequalities for Poligons, *Int Journal of Geometry*, Volume 1 No 2, 15 – 21.

46. W. Yu-Dong,. Y. Chun-Lei and Z. Chi-Hua, A Geometry Inequality of the Generalized Erdos-Mordel Type, *Journal of Inequality in Pure and Applied Mathematics*, 10(4), 2009, 107 – 111.

47. Wong Yan Loi, 2009, *An Introductions to Geometry*, Academic press inc.

48. Zvonko, Cerin, 2003, Lines with the butterfly property, *Mathematical Communications*, volume 8, 35 – 41.

49. http://www.cut-the-knot.org/triangle/Fagnano.shtml

50. http://mathworld.wolfram.com/PappussHexagonTheorem.html

51. http://mathworld.wolfram.com/DesarguesConfiguration.html

# Indeks Istilah

# Indeks Symbol

$\Delta ABC$ := Segitiga $ABC$

$L\Delta ABC$ := Luas Segitiga $ABC$

□$ABCD$ := Segi-empat $ABCD$

$L$□$ABCD$ := Luas Segi-empat $ABCD$

$m = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ := Kemiringan

$\sim$ := Sebangun

$AB \cap CD$ := Perpotongan $AB$ dengan $CD$

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ : = $\Delta ABC$ sebangun dengan $\Delta DEF$

$\cong$ : = Kongruens

$AC \cong DF$ : $AC$ Kongruen dengan $DF$

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ := $\Delta ABC$ kongruen dengan $\Delta DEF$

$\Delta x$ := Perubahan mendatar

$\Delta y$ := Perubahan tegak

// := Sejajar

$\perp$ := Tegak lurus

$\neq$ := Tidak sama

$\Omega$ := Bidang Omega

$m\angle ACB$ : ukuran sudut $ACB$

s = Setengah keliling segitiga