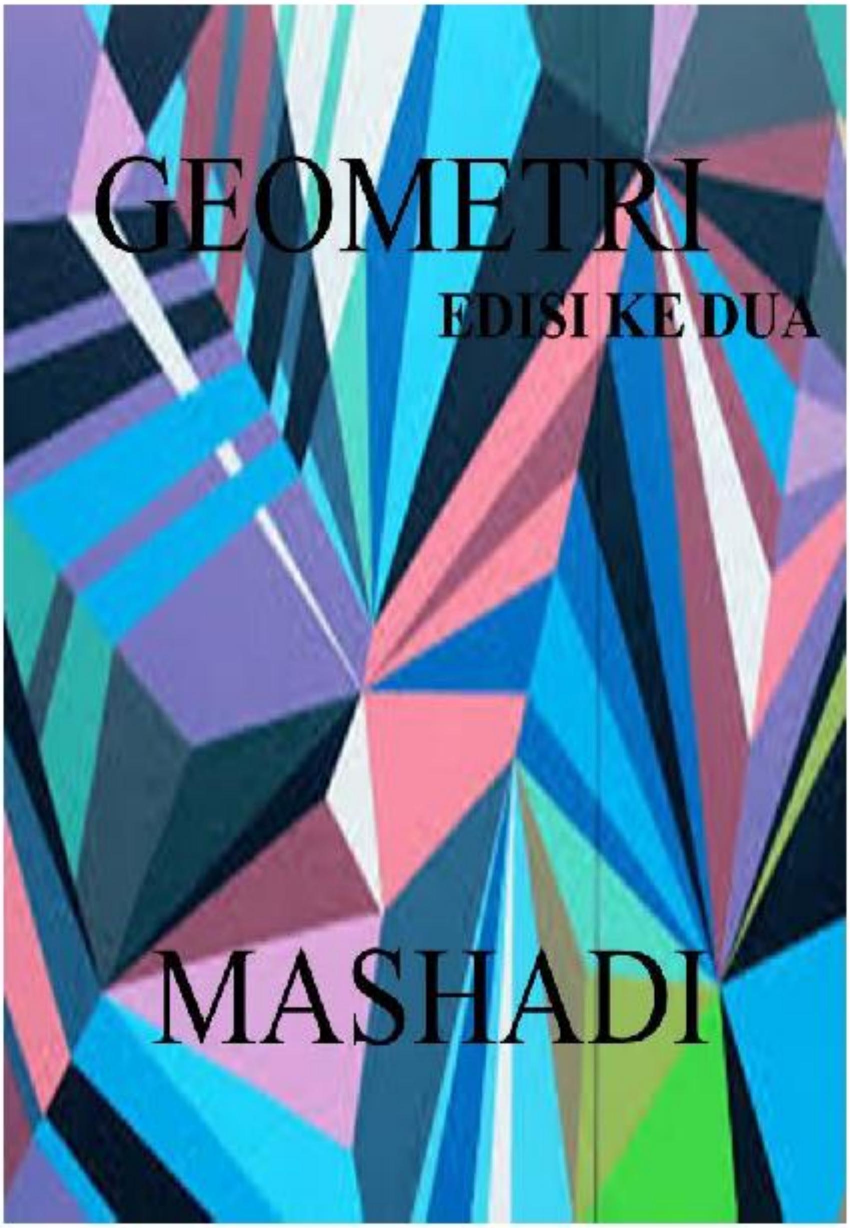

GEOMETRI
EDISI KE DUA
MASHADI

KATA PENGANGAR

Buku ini merupakan penyempurnaan materi kuliah Geometri Bidang selama 3 tahun terakhir. Karena adanya perubahan kurikulum di tingkat sekolah menengah, maka materi yang ada di dalam buku ini juga memuat sebahagian dari materi geometri yang ada di tingkat sekolah menengah akan tetapi dengan pola yang berbeda.

Isi secara umum

Secara umum isi dari buku ini memuat beberapa pendekatan yang berbeda dengan geometri analitik, karena penekanan dalam buku ini bukanlah bersifat analitik. Pada awal buku diberikan satu bab tentang motivasi, dengan tujuan ingin menunjukkan bahwa sebenarnya sangat menarik bagi kita untuk mempelajari geometri dan juga menunjukkan bahwa banyak persoalan lain yang sebenarnya mudah kita selesaikan dengan menggunakan pendekatan geometri. Selain dari itu dalam banyak pendekatan diberikan bahwa kita dapat dengan mudah membuktikan suatu teorema yang mungkin hanya kita cukup menggunakan konsep luas dan teorema Pythagoras yang sudah dikenal mulai dari sekolah menengah pertama.

Dalam banyak teorema diberikan berbagai alternatif pembuktian, mulai dari konsep yang sederhana dan juga sampai ke tinggal analisis dengan pemikiran yang mendalam. Hal ini diberikan dengan tujuan ingin menunjukkan bahwa untuk mencapai sesuatu itu jalannya tidak selalu tunggal tapi kita dapat menggunakan konsep yang lebih sederhana. Jadi secara umum isi buku ini adalah mencoba memberikan pendekatan pembuktian suatu konsep dengan menggunakan konsep yang lebih sederhana.

Pada bab 5 dan 6 adalah berupa lingkaran I dan Lingkaran II, akan tetapi isi dari bab tersebut bukanlah tentanng persamaan lingkaran. Karena persamaan lingkaran sudah dibahas denagn sangat lengkap di tingkat sekolah menengah, maka pada bab 5 dan 6 ini isinya lebih kepada hubungan antara lingkaran dan segitiga yang sebahagian kecil juga termasuk pembahasan hubungan lingkaran dengan segiempat, misalnya pembahasan tentang segiempat siklik (segiempat talibusur).

Untuk Mahasiswa

Materi pada bab 1 pada dasarnya hanyalah ingin memotivasi pembaca dan menunjukkan bagaimana mudahnya kita bekerja dengan menggunakan geometri dan yang paling penting adalah mengingatkan bahwa janganlah dalam menyelesaikan persoalan geometri kita selalu mengingat rumusnya dan bagaimana cara menghitungnya, pada bab ini juga diberikan contoh sederhana bagaimana menyelesaikan suatu persoalan tanpa harus menggunakan rumus-lrumus yang sulit.

Materi pada bab 2, 3 dan 4 bukanlah menjadi tujuan dari buku ini, akan tetapi materi yang ada pada bab tersebut hanya sebagai mengingatkan kepada mahasiswa bahwa untuk memperajari bagian selanjutnya anda harus memahami konsep yang ada pada bab-bab tersebut, terutama bab 2 dan bab 3, sedangkan bab 4 tentang irisan kerucut hanya bersifat parsial dari materi lain, akan tetapi ada juga baiknya dipahami karena di bagian akhir juga dibahas tentang teorema Butterfly pada parabola dan elips, serta penerapan teorema Pappus pada elips.

Untuk mahasiswa strata 1, konten utama untuk mahasiswa adalah pada bab 5, 6 dan 7 dengan pengembangan pada bab 8 dan 9. Sedangkan untuk mahasiswa strata 2 bidang minat pengajaran matematika, bab 2, 3, 4 dan 5 wajib sudah dipahami dan dengan pengulangan pemahaman pada bab 6 dan 7, maka materi pada bab 8, 9 ,10, 11 dan 12 menjadi materi utama bagi anda dengan pengembangan pada bab 11.

Untuk Dosen

Perlu dipahami bahwa terdapat beberapa konsep yang muncul pada beberapa bab, akan tetapi hal itu sengaja disusun sedemikian rupa agar, materi dapat menyambung dengan materi selanjutnya. Akan tetapi dalam proses pengajaran diperolehkan memberikan konsep yang ada pada suatu bab tapi disambungkan dengan materi yang sama pada bab lain. Mialnya konsep centroid ada di bab 6, 7 dan 9, kalau Bapak/Ibu dalam proses pembelajaran menginginkan dalam satu pertemuan konsep centroid selesai untuk ke tiga teorema yang ada, maka pembelajarannya dapat dilakukan mengambil materi yang ada pada masing-masing bab tersebut dan untuk selanjutnya diteruskan sesuai dengan tujuan pembelajaran yang anda susun.

Juga perlu diperhatikan bagi dosen untuk memberikan soal latihan kepada mahasiswa/i, karena ternyata setelah draf buku ini disusun tetapi baru disadari bahwa ada soal yang lebih mudah dikerjakan dengan konsep lain akan tetapi soal tersebut muncul pada soal latihan yang lain pula. Akan tetapi hal ini tidak akan merusak konten dari isi buku ini. Sedangkan untuk pengajaran dengan 3 sks dilevel S1 Matematika dilakukan sebagai berikut

- Bab 1 pada pertemuan pertama ditambah kontrak kuliah dll
- Bab 2,3 dan 4 dalam bentuk remedial maksimal dalam 5 pertemuan
- Bab 5 dan 6 dalam 5 pertemuan
- Bab 7, 8 dan 9 maksimal dalam 5 pertemuan

Perlu diperhatikan bahwa konsep dan penerapan dengan tingkat kesulitan tinggi pada bab 8 dan 9 untuk level S1 tidak perlu dibahas semua, akan tetapi di level S2 mesti diajarkan dengan sesempurna mungkin.

Teladan dan soal latihan

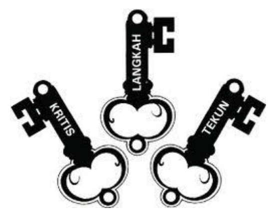
Seperti dalam banyak buku matematika (termasuk geometry) kebanyakan isi dari buku tersebut adalah soal latihan, sehingga pada kebanyakan buku soal latihan dibuat disetiap akhir sub bab. Akan tetapi dalam buku ini soal latihan tidak dibuat dalam setiap sub bab (kecuali pada bab 4), akan tetapi dibuat setelah 2 atau 3 sub bab. Hal ini sengaja dilakukan karena beberapa soal memang diperlukan konsep yang dibahas dalam 2 atau 3 sub bab tersebut, namun demikian sedikitnya jumlah soal latihan tidak akan mengurangi bahan bagi mahasiswa untuk mencari soal latihan. Karena soal yang ada pada umumnya cukup bervariasi dengan tingkat analisis yang berbeda.

Soal latihan dibagi dalam 3 bagian, bagian pertama yang tanpa tanda bintang, soal yang tanpa tanda bintang adalah soal dalam tingkat analisis mudah, sedang dan agak sulit, sehingga diharapkan kepada para mahasiswa untuk dapat minimal mengerjakan soal yang tanpa tanda bintang. Bagian kedua soal dengan tanda (*). Ini sudah merupakan soal dengan tingkat kesulitan agak tinggi, sehingga mungkin hanya mahasiswa yang sangat berminat di bidang geometry yang dapat menyelesaikannya. Bagian ketiga adalah soal dengan tanda (**), ini merupakan soal dengan tingkat kesulitan sangat tinggi. Bagi mahasiswa yang mampu menyelesaikan soal dengan tanda (**) berarti anda punyai kemampuan geometri dan analisis yang cukup/sangat baik. Dalam buku ini contoh soal diistilahkan dengan teladan.

DAFTAR ISI

BAB I

MOTIVASI



Motivasi ini diberikan kepada pembaca adalah untuk menunjukkan bahwa ternyata tidak semua persoalan dalam geometri itu mesti kita selesaikan dengan menggunakan rumus yang sulit, perhatikan motivasi 1, bagaimana persoalan statistik tingkat sekolah menengah atas, yang biasanya diselesaikan dengan rumus yang rumit ternyata masalah tersebut cukup diselesaikan dengan konsep kesebangunan yang sudah dipelajari ditingkat sekolah menengah pertama. Begitu juga dimotivasi 2 dan 3. Pada Motivasi 2 terlihat bahwa kalau biasanya luas daerah pada suatu segi tiga itu mesti dikerjakan dengan rumus yang rumit dan panjang, ternyata dengan sedikit pemikiran persoalan tersebut cukup dikerjakan dengan cara yang sederhana yaitu hanya dengan menggunakan rumus Pythagoras yang sudah sangat dikenal oleh semua pelajar.

BAB I

MOTIVASI

1.1. *Motivasi* 1

Banyak persoalan dalam hidup ini yang dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep geometri, akan tetapi kita sering tidak memikirkan sebenarnya persoalan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan geometri. Begitu juga dalam berbagai disiplin ilmu, mungkin diperlukan ilustrasinya dalam bentuk geometri dan malah mungkin ia dapat diselesaikan secara geometri (selain penyelesaian dalam disiplin ilmu itu sendiri). Berikut ini diberikan salah satu contoh persoalan statistika tingkat sekolah menengah yang menjadi masalah yang membosankan bagi siswa, karena mesti menghapal rumus-rumus yang menyulitkan.

Data pada tabel 1.1.1 di bawah ini merupakan data tinggi badan peserta seleksi calon pramugari. Jika peserta yang lulus seleksi adalah peserta yang tingginya lebih dari 156 cm, berapa orangkah yang lolos seleksi (begitulah bunyi soal dalam persoalan statistik).

Tinggi badan (cm)	f
150 - 154	6
155 - 159	10
160 - 164	18
165 - 169	22
170 - 174	4
Total	60

Tabe1 1

Jika sekiranya mahasiswa/siswa mesti mengerjakan secara statisti, maka mahasiswa/siswa tersebut mesti mengingat, apa rumus yang harus digunakan untuk menghitung banyaknya peserta yang tingginya lebih besar dari 156 cm. persoalannya adalah bagaimana kalau mahasiswa/siswa tersebut lupa dengan rumusnya.

Secara statistika persoalan di atas mesti diselesaikan dengan menggunakan rumus berikut ini :

$$N = L + \frac{x - f_x}{f} \times c$$

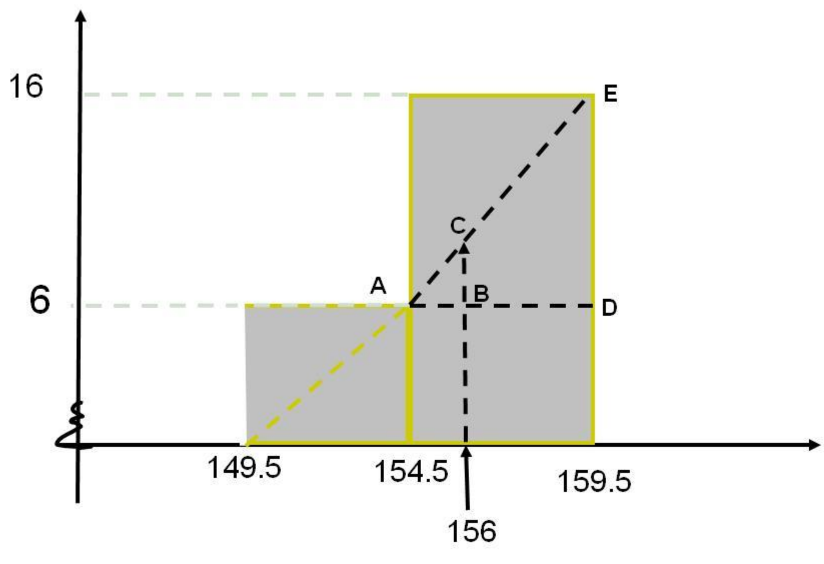
$$156 = 154.5 + \frac{x-6}{10} \times 5$$

$$1.5 = \frac{5(x-6)}{10}$$

$x - 6 = 3$

$x = 9$

Apa persoalannya, bagaimana repotnya kita kalau mesti menghapal rumus, selain itu, harus dipahami lagi, apa itu f_x, f, L dan lain sebagainya. Tapi mari kita coba perhatikan kalau kita selesaikan hal itu secara geometri. Terlebih dahulu untuk pengembangan daya kognitif, coba gambarkan data tersebut dalam bentuk berikut ini



Gambar 1.1.2

Maka yakinlah, siswa SMP saja akan dapat menunjukkan bahwa $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, yang mengakibatkan

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \text{ sehingga } \frac{3/2}{5} = \frac{BC}{10}$$

Jadi BC = 3. Jadi TC merupakan banyaknya perserta yang tingginya kecil atau sama dengan 156. Sebut P = banyaknya peserta yang tingginya lebih dari 156

Maka

P = banyaknya perserta – TC = 60 – 9 = 51 orang.

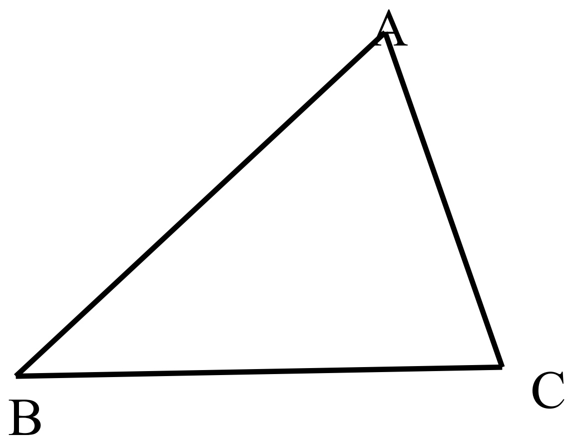
Yang perlu pembaca pahami adalah, bagaimana mudahnya persoalan di atas kita kerjakan dengan menggunakan geometri dan yang paling penting adalah kita tidak perlu menghapal berbagai rumus statistik yang sangan rumit tersebut, akan tetapi bagaimana kita memformulasikan suatu persoalan tersebut dalam bentuk geometri yang sederhana (walaupun tidak semua masalah bisa kita ilustrasikan secara geometri yang sederhana).

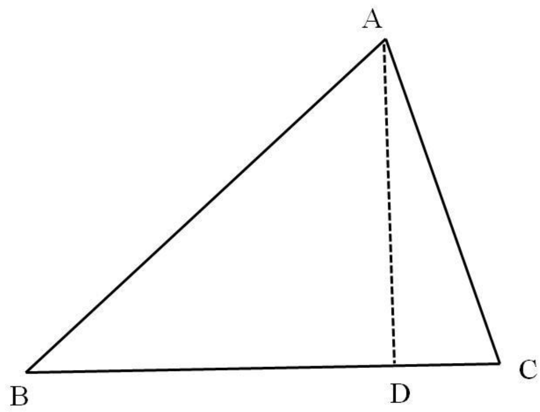
1.2. *Motivasi* 2

Di dalam geometri sendiri kita sering dalam menyelesaikan soal-soal bertumpu kepada, apa rumusnya dan bagaimana menghitungnya, sehingga tidak berkembangnya kemampuan kognitif dan daya analysis dari mahasiswa, kita hanya ingin belajar berhitung bukan bermatematika. Kondisi seperti inilah yang akan membuat pelajar (baik siswa maupun mahasiswa) tidak berkemampuan lemah dalam menyelesaikan problem solving. Perhatikan soal berikut : Perhatikan gambar 2.1.1a. Jika panjang sisi ΔABC masing adalah 70, 80 dan 50 untuk sisi AB, BC dan AC, berapakah luas segitiga tersebut.

Kebanyakan siswa/mahasiswa dalam menghadapai persoalan di atas, yang dipikirkan pertama adalah apa rumusnya. Maka kalau rumusnya lupa atau persoalan tersebut kita robah dalam bentuk segiempat atau segilima sebarang. Maka sudah mustahil siswa/mahasiswa tersebut akan dapat menyelesaikannya. Akan tetapi coba kalau kita berpikir sebagai berikut : Pada gambar 1.2.1a buat garis titik A yang tegaklurus ke BC

dan katakan titik potongnya adalah *D*. dan misalkan panjang sisi $BD = x$, maka $DC = 70 - x$, sehigga dari teorema Pythagoras berlaku :





Gambar 1.2.1b

Gambar 1.2.1a

$$AB^2 - BD^2 = AD^2 = AC^2 - DC^2$$

$$70^2 - x^2 = 50^2 - (80 - x)^2$$

$$70^2 - x^2 = 50^2 - 80^2 + 160x - x^2$$

$$4900 = (50 - 80).(50 + 80) + 160x$$

$$4900 = -3900 + 160x$$

$$160x = 8800$$

$$x = 55$$

setelah dapat x maka tinggi segitiga yaitu AD adalah

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 70^2 - (55)^2 = 1875$$

Jadi AD $\approx$43.3

Sehingga $L\Delta ABC = \frac{1}{2}\, BC.AD = \frac{1}{2} \times 80 \times 43.3 = 1732.05$.

Apa yang perlu diperhatikan dalam penyelesaian di atas adalah, kita sebenarnya dapat menyelesaikan banyak persoalan matematika tanpa harus melalui rumusnya, kita dapat mengerjakan dengan konsep matematika yang paling sederhana, yang dalam contoh di atas hanya dengan menggunakan rumus Pythagoras yang dikenal oleh semua siswa sekolah menengah. Jadi sebenarnya soal di atas dapat diberikan ke siswa tingkat Sekolah Menengah Pertama dan tidak mesti kita mengerjakannya dengan menggunakan rumus

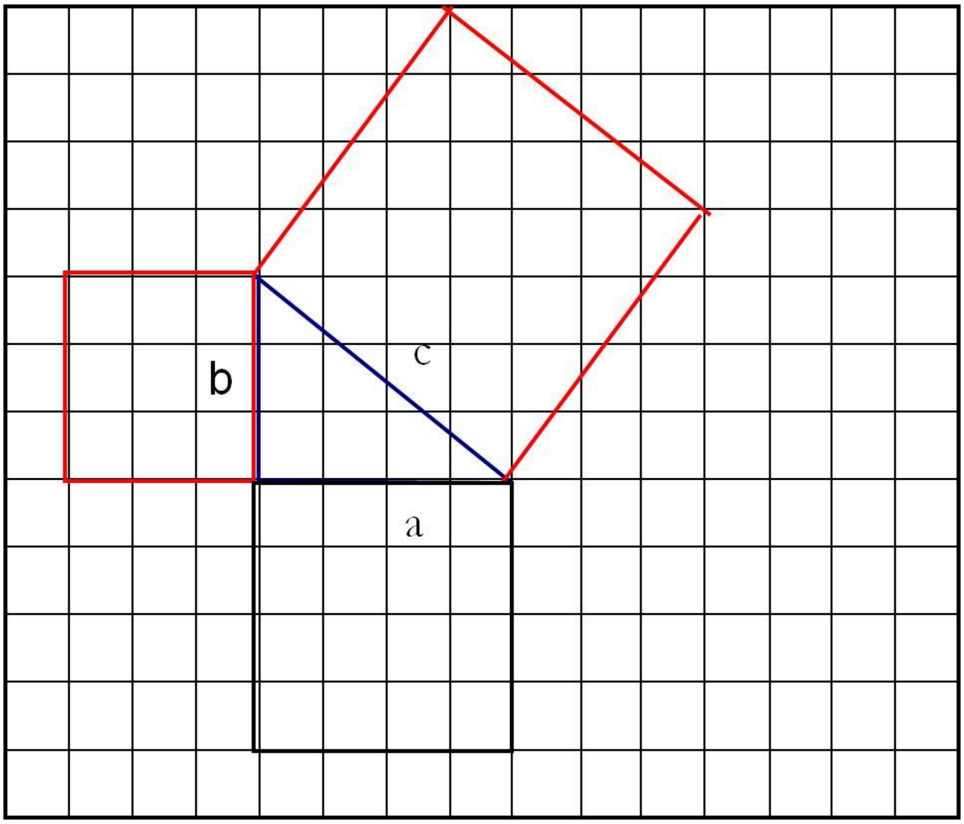
$$L\Delta ABC = \sqrt{s(s-a).(s-b).s- \ c)}$$

1.3. *Motivasi* 3 (*Teorema Pythagoras*).

Salah satu teorema yang paling terkenal, mulai dari tingkat sekolah menengah pertama dan mungkin dari tingkat sekolah dasar adalah Teorema Pythagoras. Akan tetapi banyak diantara pelajar tidak memahami dengan benar asal muasal dari teorema Pythagoras tersebut. Sebagai contoh berikut ini diberikan salah satu bukti teorema Pythagoras yang ada dalam berbagai buku sekolah menengah buktinya diberikan seperti gambar 1.3.1. makna dari gambar tersebut adalah Jika kita punya segitiga siku-siku dengan panjang sisi masing-masing adalah a, b dan c dengan c sebagai sisi didepan sudut siku-siku, maka berlaku $c^2 = a^2 + b^2$.

Hebatnya di dalam berbagai buku selalu dibuat panjang sisi a dan b adalah 3 atau 4 (jika $a = 3$ maka $b = 4$ atau sebaliknya). Karena kuadrat itu juga bermakna luas, maka luas segi empat yang panjang sisinya $3 = b$, adalah 9 kotak dan luas daerah segiempat yang panjang sisinya $4 = a$ adalah 16 kotak, yang diharapkan luas daerah segiempat yang panjang sisinya 5 adalah 25 kotak seperti digambarkan pada gambar 1.3.1 (sisi c yang miring). Pernahkah kita berpikir, bagaimana menunjukkan, bahwa jumlah kotak yang diliputi oleh segiempat miring yang panjang sisinya 5 tersebut adalah 25 kotak, karena bentuknya miring dan kotak-kotaknya terpotong-potong. Sebenarnya kita dapat menunjukkan dengan metoda simulasi, jika kotak yang miring tersebut kita baringkan, maka akan jelaslah ia akan meliputi sebanyak 25 kotak, akan tetapi sedikit yang berpikir seperti itu.

Berikut ini akan diberikan beberapa cara mudah untuk membuktikan teorema Pythagoras.perhatikan ΔABC seperti gambar 1.3.2b, dengan masing-masing panjang sisi adalah a, b dan c. Akan ditunjukkan berlaku $c^2 = a^2 + b^2$.



Gambar 1.3.1

Cara I. Metoda Persegi

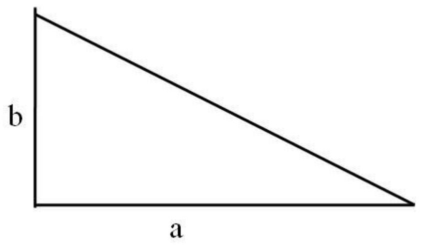
Bentuk suatu persegi dengan panjang sisi $a + b$. maka ditengah-tengahnya diperolah persegi yang panjang sisinya c. tentunya luas persegi yang besar adalah $(a + b)^2$. Dipihak lain luas persegi yang besar itu juga dapat dinyatakan sebagai jumlah luas 4 buah segitiga ditambah luas persgi di tengah. Jadi

$$4.½\, a.b + c^2 = (a + b)^2$$

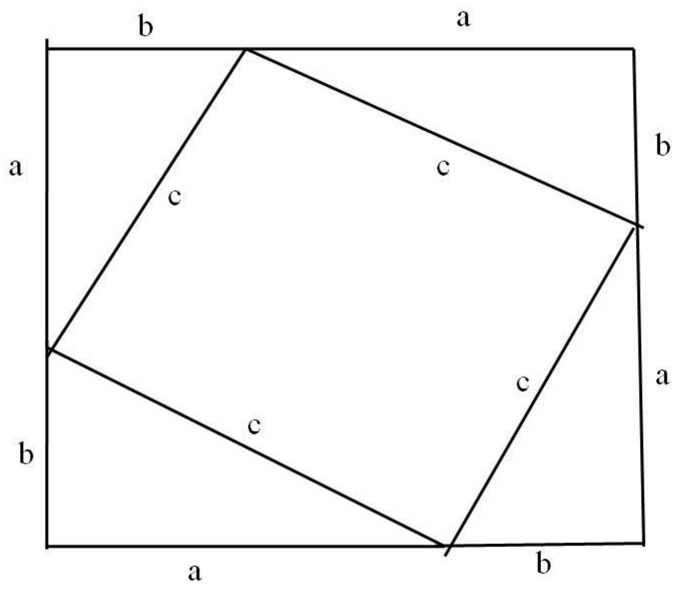
$$1\, a.b + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Jadi

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

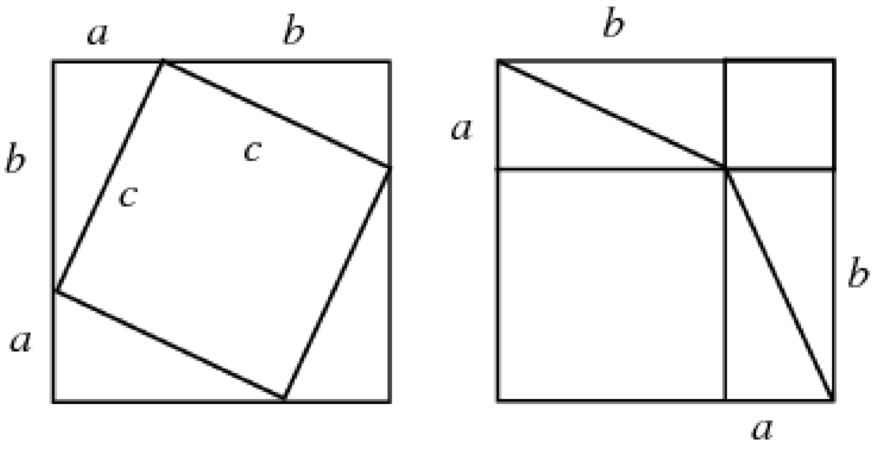


Gambar 1.3.2a



Gambar 1.3.2b

Posisi sisi *a* dan *b* untuk membuktikan teorema Pythagoras dengan cara seperti di atas juga dapat di gambarkan dengan cara seperti gambar 1.3.3



Gambar 1.3.3

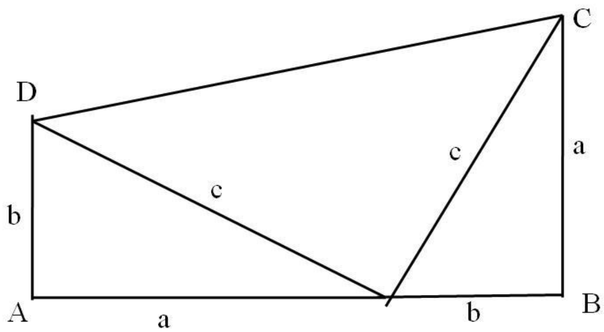
Cara* II. *Metoda trapesium

Untuk segitiga yang salam seperti segitiga pada gambar 1.3.2a, akan tetapi kita bentuk suatu trapesium yang panjang sisi sejajarnya adalah *a* dan *b*, kemudian salah satu sisi datarnya berukuran *a* + *b* (seperti gambar 1.3.3).

Jadi diperoleh suatu trapesium *ABCD* yang dibentuk oleh dua buah segitiga yang sebangun dan setengah persegi yang panjang sisinya adalah *c*. Jadi luas trapesium tersebut adalah

$$L = ½ (a + b).(a + b) \qquad (1.3.1)$$

Dipihak lain luas trapesium itu juga dapat dipandang sebagai jumlah luas dua buah



Gambar 1.3.3

segitiga ditambah separoh luar persegi yang panjang sisinya *c*.

Yaitu

$$½ .2.ab + ½ c^2 \qquad (1.3.2)$$

Dari persamaan 1.3.1 dan 1.3.2 diperoleh

$$½ (a^2 + 2ab + b^2) = ab + ½ c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Cara III. Metoda kesebangunan

Perhatikan ΔABC, kemudian buat garis tegak lurus dari sudut siku-siku ke sisi terpanjang (seperti gambar 1.3.4). dan sebut $c = x + y$. maka akan diperoleh $\Delta ABC \sim \Delta DAC$, sehingga diperoleh

$$\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

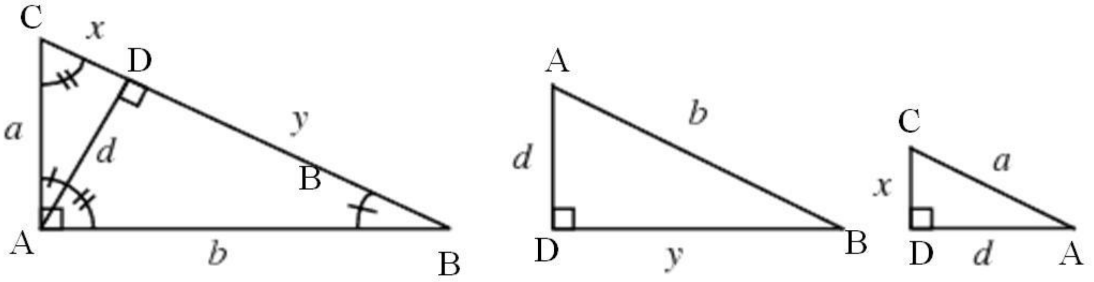
Jadi

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{c}$$

Sehingga $a^2 = xc$

Kemudian karena ΔABC juga sebangun dengan ΔDBA, maka diperoleh

$$\frac{DB}{BA} = \frac{AB}{BC}$$



Gambar 1.3.4

Sehingga

$$\frac{y}{b} = \frac{b}{c}$$

Yang mengakibatkan $b^2 = c.y$

Maka

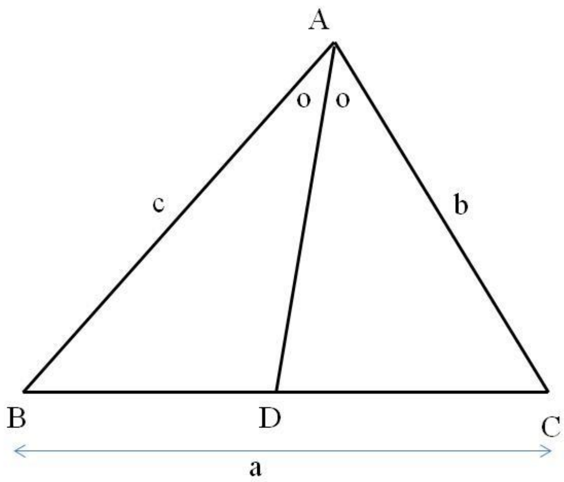
$$c^2 = c.c = c(x + y) = cx + cy = a^2 + b^2.$$

1.4. Motivasi IV.

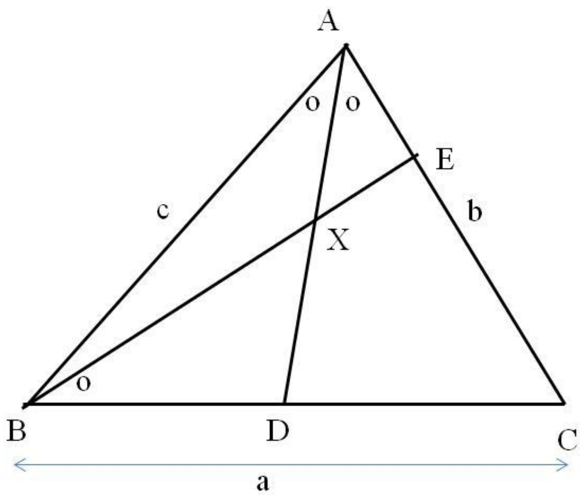
Dalam berbagai buku teks di tingkat SMA/MA dan SMK telah diberikan cara untuk menghitung panjang garis bagi dari suatu sudut pada suatu segitiga. Misalkan segitiga ABC dan buat garis bagi dari sudut A. Misalkan garis bagi dari sudut A tersebut memotong sisi BC di titik D. Persoalannya adalah, apakah hanya seperti yang ada di buku teks SMA/MA dan SMK itu cara menentukan panjang sisi AD. Berikut ini akan diberikan beberapa alternatif untuk menghitung panjang garis bagi. Tujuan dari alternatif yang diberikan disini adalah untuk mengasah kemampuan analisis berfikir pembaca, bagaimana kita dapat mengkontruksi sesuatu dengan cara yang lebih mudah. Untuk mengasah kemampuan analisis pembaca (mahasiswa) maka tidak semua cara akan diuraikan secara lengkap, akan tetapi yang diberikan hanyalah langkah pembuktian secara lengkap.

Alternatif 1.

Perhatikan gambar 1.5.1a di bawahyang mana ∠BAD = ∠CAD, akan ditentukan panjang sisi AD yang merupakan panjang garis bagi dari sudut A (lihat gambar 1.5.1a), kemudian buat garis dari titik B ke sisi AC sehingga ∠ CBE = ½ ∠A = ∠BAD = ∠CAD. Untuk langkah selanjutnya bimbinglah siswa untuk menunjukkan bahwa



Gambar 1.5.1a



Gambar 1.5.1.b

Maka akan diperoleh :

- ∠AED = ∠EDB dan ∠ ADB = ∠CAD + ∠ACB = ∠BAD + ∠ACB

  ∠AEX = ∠ACB + ∠CBE = ∠ACB + ∠BAD
- Dengan menunjukkan kesebangunan ΔABD dengan ΔAEX, akan didapatkan perbadingan berikut :

  $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AX}$ atau $AD = \frac{AB.AE}{AX}$
- Karena AD = AX + DX dan

  $AD^2 = AD.AD = \frac{AB.AE}{AX}(AX + DX) = AB.AE + \frac{AB.AE}{AX}.DX = AB.AE + AD.DX$
- Pandang AE = AC – CE, maka akan diperoleh

AD^2 = AD.DX + AB.AC – AB.CE

= AB.AC – AB.EC + AD.DX

- Selanjutnya pandang ∠ CAD = ∠CBE yang akan mengakibatkan Δ ADC ~ ΔBEC yang menghasilkan $\frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC}$
- Karena AD adalah bisektor sudut A, mengakibatkan $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ dan juga $\frac{DC}{AC} = \frac{BD}{AB}$
- Sehingga $\frac{EC}{BC} = \frac{BD}{AB}$ yang bermakna

AB.EC = BC.BD . . . . (1.5.1)

- Karena ∠CBE = ∠BAD, mengakibatkan Δ ABD ~ ΔBDX, yang mengakibatkan $\frac{BD}{AD} = \frac{DX}{BD}$ sehingga

$BD^2 = AD.DX$ . . . . (1.5.2)

- Dengan menggunakan AD^2 = AD.DX + AB.AC – AB.CE, persamaan (1.5.1) dan (1.5.2) maka diperoleh

$AD^2 = AB.AC - BC.BD + BD^2$

$= AB.AC – BD(BC – BD) = AB.AC – BD.DC$ . . . . (1.5.3)

- Karena $\frac{c}{b} = \frac{BD}{DC}$ dan AD bisektor BD, maka berlaku $BD = \frac{ac}{b+c}$ dan $DC = \frac{ab}{b+c}$
- Maka dari persamaan (1.5.3) diperoleh $AD^2 = BC + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$

Jadi panjang garis bagi dari titik A adalah

$$AD^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$

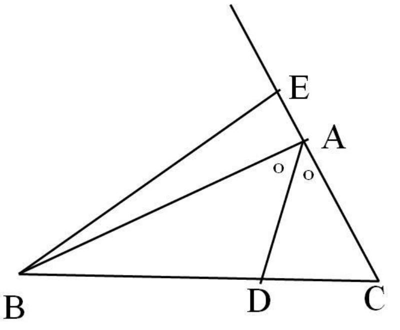
Dengan cara yang sama panjang Garis bagi dari titik B dan titik C adalah

$$BE^2 = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right)$$

$$CF^2 = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)$$

Perhatikanlah penurunan rumus di atas, serta gambarnya, pernahkah anda pikirkan jika sekiranya ∠CBE > ∠ABC, dengan kata lain ∠ ½ A > ∠B. Untuk itu perpanjang garis CA dan buat titik E di perpanjangan CA sehingga ∠ ½ A = ∠CBE. Maka pembaca dapat mencoba untuk menunjukkan bahwa akan tetap berlaku

$$AD^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$



Gambar 1.5.2.

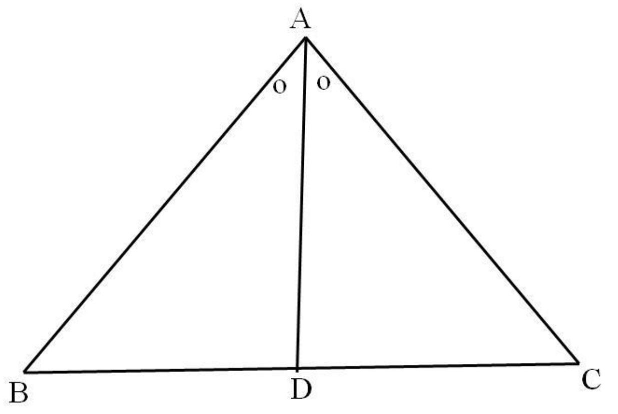
Alternatif 2.

Sama seperti pada kasus lainnya, misalkan AD adalah garis bagi ∠A, maka akan ditentukan panjang sisi AD (perhatikan gambar 1.5.3), untuk itu buat garis DE dan DF sehingga DE / /CA dan DF // BA. Sehingga segiempat AEDF merupakan jajaran genjang (perhatikan gambar 1.5.3).

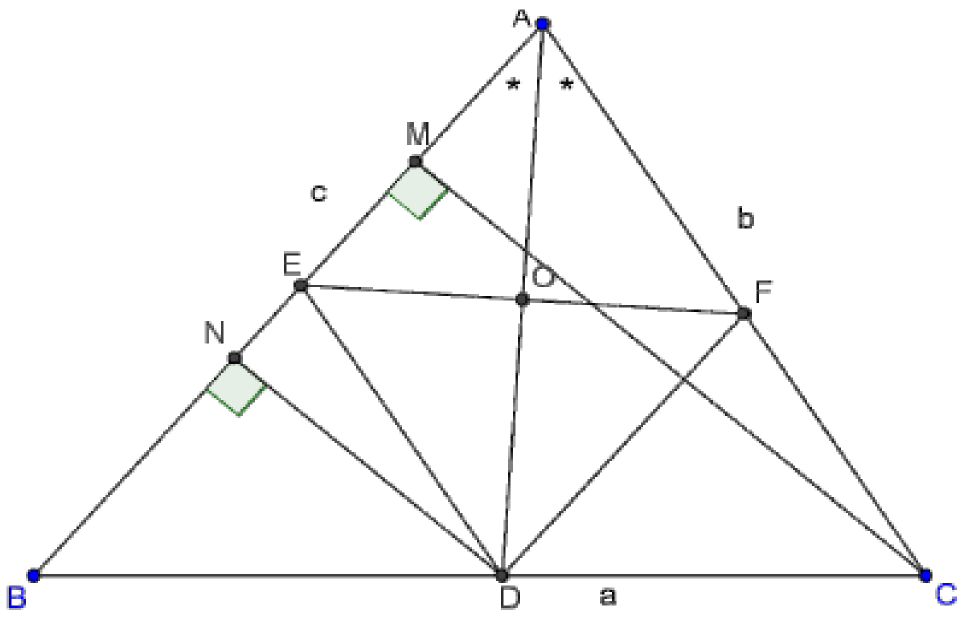
Selanjutnya buat garis DN dan CM yang keduanya tegak lurus ke sisi AB (lihat gambar 1.5.3). Selanjutnya mintalah siswa untuk menunjukkan bahwa

- ∠ ADE = ∠CAD
- ∠ ADF = ∠ BAD
- ∠ BAD = ∠ CAD
- ∠ ADE = ∠ ADF

- Kemudian untuk mempermudah, pembesarlah gambar yang diperoleh seperti gambar 1.5.4.



Gambar 1.5.3



Gambar 1.5.4

Selanjutnya bimbinglah siswa untuk menunjukkan bahwa :

- $\angle$ BAD = $\angle$ CAD = $\angle$ ADE = $\angle$ ADF
- AO = OD = AD/2
- $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$
- $BD = \frac{ac}{b+c}$

- $\Delta\, BDE \sim \Delta\, ABC$
- $\frac{DE}{b} = \frac{BD}{a}$
- Dari $DE = \frac{bc}{b+c}$, maka

$$DE = DF = AE = AF = \frac{bc}{b+c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.5.4)$$

- Dari kesebangunan Δ AND dengan Δ AOE diperoleh

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AO}{AN} = \frac{AD}{2.AN}$$

Sehingga

$$AD^2 = 2.AN.AE \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.5.5)$$

- Dari kesebangunan Δ DEN dengan Δ AMC diperoleh

$$\frac{EN}{AM} = \frac{DE}{b}$$

- Jika disubsitusikan ke persamaan (1.5.4) akan diperoleh

$$EN = \frac{AM.c}{b+c}$$

- Tunjukkan bahwa pada Δ BMC berlaku

$$\begin{aligned} a^2 &= CM^2 + BM^2 \\ &= b^2 - AM^2 + (c - AM)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2c.AM \end{aligned}$$

- Sehingga $AM = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$
- Maka

$$EN = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2(b+c)}$$

- Karena AN = AE + EN dan dari persamaa (1.5.4) diperoleh

$$AN = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2(b+c)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.5.6)$$

- Subsitusikan (7.4) dan (1.5.6) ke persamaan (1.5.5), maka akan diperoleh

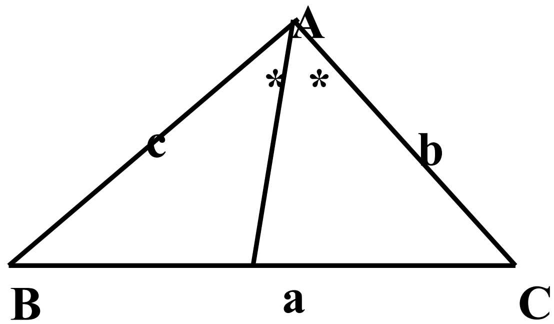
$$AD^2 = \frac{2bc}{b+c} . \left[\frac{(b+c)^2 - a^2}{2(b+c)}\right]$$

$$AD^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)\right)$$

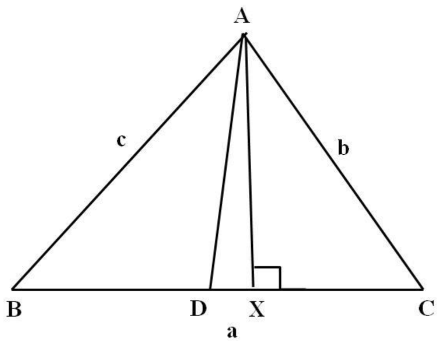
Yang merupakan panjang garis bagi. Pada dasarnya alternatif ke 2 dan ke 3 ini sama dan hasilnya juga sama. Menariknya lagi panjang garis bagi lansung dapat ditentukan dari panjang sisi-sisi segitiga tersebut.

Alternatif 3.

Pada alternatif ke 4 ini untuk menentukan panjang sisi dari AD (garis bagi dari sudut A) dilakukan dengan membuat garis AXyang tegak lurus dengan sisi BC. Untuk itu bimbinglah siswa untuk melakukan langkah-langkah berikut ini :



Gambar 1.5.5a



Gambar 1.5.5b

- Minta siswa untuk menentukan mana segitiga yang sebangun sehingga

  $$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b},$$

- Kemudian bimbinglah siswa untuk menemukan

  $$BD = \frac{a.c}{b+c} \text{ dan } DC = \frac{a.b}{b+c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1.5.7)}$$

- Perhatikan ΔABX dan tunjukkan bahwa

  $$c^2 = AX^2 + BX^2 = AD^2 - DX^2 + (BD + DX)^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DX,$$

- Yang menghasilkan

$$2BD \cdot DX = c^2 - AD^2 - BD^2$$

- Kemudian dari ΔAXC tunjukkan bahwa

$$b^2 = AX^2 + CX^2 = AD^2 - DX^2 + (DC - DX)^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \cdot DX,$$

- Yang menghasilkan

$$2DC \cdot DX = AD^2 + DC^2 - b^2$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c^2 - AD^2 - BD^2}{AD^2 + DC^2 - b^2}.$$

- Dengan memperhatikan persamaan (1.5.7) akan diperoleh

$$\frac{c}{b} = \frac{c^2 - AD^2 - \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2}{AD^2 + \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 - b^2}.$$

- Sederhanakanlah untuk memperoleh

$$AD^2(b+c) = bc^2 - b \cdot \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 + b^2c - c \cdot \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2$$

$$AD^2(b+c) = bc(b+c) - \frac{a^2bc}{b+c}.$$

$$AD^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

- Yang menghasilkan formula yang sama seperti pada alternative 2 dan 3 yaitu

$$AD^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)\right)$$

1.4. Soal *Latihan* 1 (*Peningkatan Motivasi*)

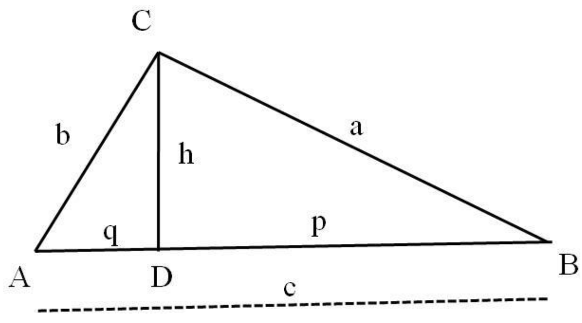
1. Buktikan bahwa jumlah besar sudut dalam ΔABC adalah 180^0
2. Buktikan secara lansung (tanpa memilah dalam bentuk dua segitiga), bahwa jumlah besar sudut dalam sebarang segiempat adalah 180^0.

3. Perhatikan gambar disebelah dan tunjukkan bahwa berlaku

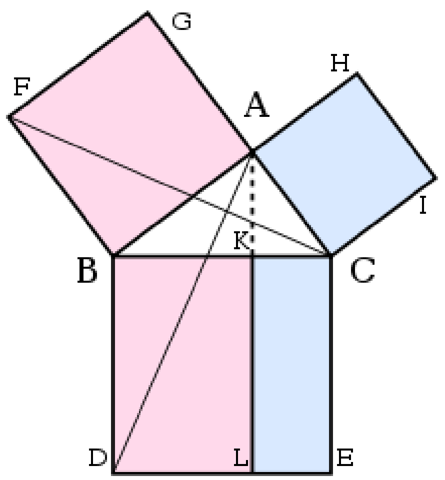
   $h^2 = p.q$

   $a^2 = p.c$

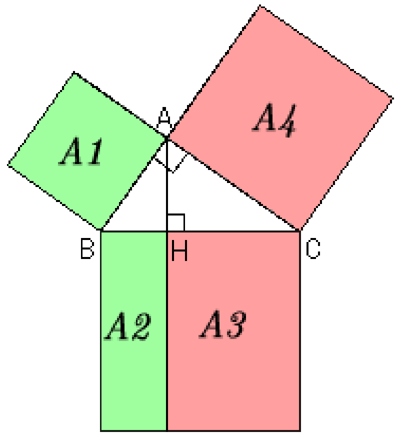
   $b^2 = q.c$



4. Buktikan teorema Pythagoras dengan menggunakan gambar disebelah



5. Buktikan teorema Pythagoras dengan menggunakan gambar disebelah dengan menunjukkan $LA_1 = LA_2$ dan $LA_3 = LA_4$.

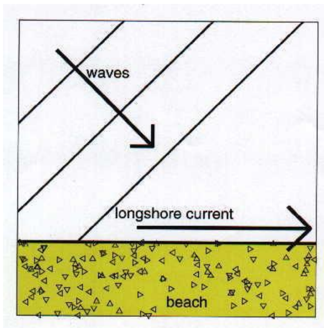


6. Dengan cara yang hampir serupa dengan altenatif menentukan panjang garis bagi, silakan dicoba altenatif untuk menentukan panjang garis tinggi dan panjang garis berat.

BAB II

Garis Lurus

Perhatikan gambar berikut, yang menunjukkan bahwa dalam kehidupan kita selalu terlibat dalam garis lurus, kesejajaran garis, sudut antara dua garis dan lain sebagainya



BAB II

PERSAMAAN GARIS LURUS

2.1. *Persamaan Garis Lurus*

Dalam berbagai buku dituliskan bahwa persamaan garis lurus dituliskan dalam bentuk $y = ax + b$ atau $y = mx + n$, atau dalam kalkulus dan bidang lain yang menggunakan konsep fungsi, persamaan garis ditulis dalam bentuk $f(x) = mx + n$. yang menjadi persoalannya adalah darimana datangnya persamaan tersebut. Yang harus dihindari adalah siswa menghapal rumus serta hanya memasukkan angka pada rumus yang di hapal, proses pembelajaran seperti inilah yang wajib dihindari. Untuk memulai pembicaraan garis lurus, perhatikan salah satu karakteristik dari garis yang lurus adalah kemiringannya. Yang mana kemiringan tersebut didefinisikan sebagai berikut

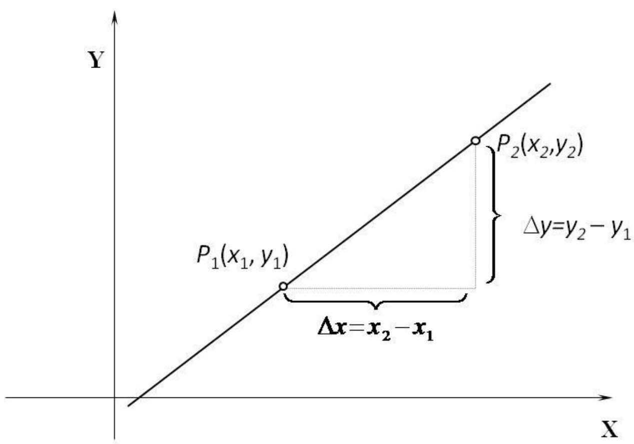
$$Kemiringan = \frac{perubahan\ tegak}{perubahan\ mendatar}$$

Perubahan tegak sering didefinisikan dengan Δx dan perubahan mendatar didefinisikan dengan Δy, kalau kemirinan ini dilambangkan dengan m, maka $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Perhatikan gambar 2.1.1 di bawah ini.

Maka kemiringan garis lurus yang melalui $P_1(x_1,y_1)$ dan $P_2(x_2,y_2)$ didefinisikan sebagai berikut

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pandanglah suatu garis yang melalui titik tetap $P_1(x_1, y_1)$ dan mempunyai kemiringan m. (Perhatikan gambar 2.1.2) Jika diambil sembarang titik $P(x, y)$ untuk x berbeda dengan x_1 maka kemiringan garis P_1P adalah



Gambar 2.1.1

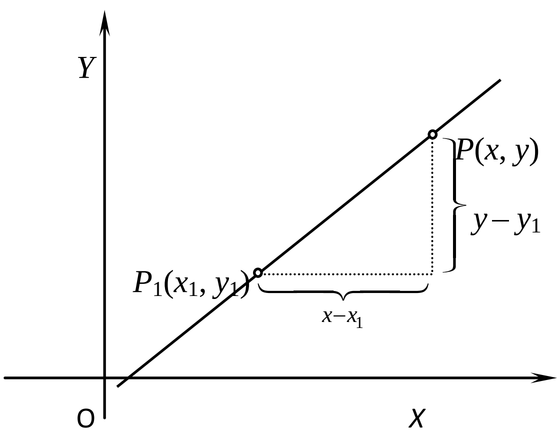
$$\frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Perhatikan kembali gambar (2.1.1) dan (2.1.2). Kemiringan garis akan sama dengan m jika dan hanya jika titik P berada pada garis yang diberikan. Jadi, jika $P(x, y)$ berada pada garis yang diberikan maka harus dipenuhi kesamaan

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

atau jika dilakukan penyederhanaan bentuk pembagian diperoleh persamaan :

$$y - y_1 = m(x - x_1). \qquad (2.1.1)$$



Gambar 2.1.2

Persamaan (2.1.1) di atas disebut *persamaan garis lurus* bentuk titik-kemiringan dan perlu ditekankan kembali bahwa koordinat suatu titik akan memenuhi persamaan di atas jika dan hanya jika titik itu berada pada garis yang melalui titik $P_1(x_1, y_1)$ dan mempunyai kemiringan m.

Persamaan garis lurus melalui dua titik

Jika diketahui dua titik yang berbeda pada bidang, maka garis yang melalui dua titik tersebut dapat dilukis. Dengan demikian persamaan garisnya pun juga dapat ditemukan. Misalkan sebuah garis melalui titik $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$ maka garis P_1P_2 mempunyai kemiringan

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Berdasarkan rumus (2.1.1) persamaan garis melalui titik P_1 adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Selanjutnya dengan membentuk gradient dari P_1P_2 dengan kemiringan

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

maka kalau kita gantikan kemiringan tersebut pada persamaan (2.1.1) diperoleh hubungan :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (2.1.2)$$

atau dituliskan dalam bentuk

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (2.1.3)$$

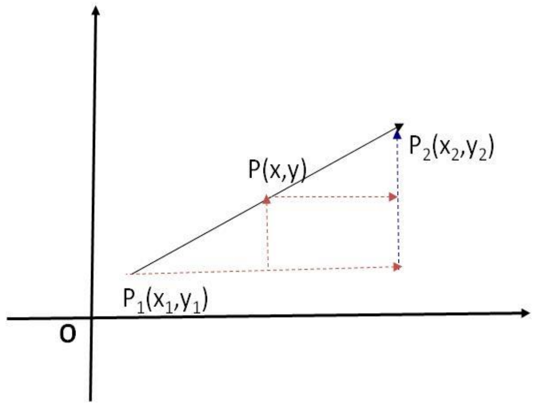
Persamaan (2.1.2) atau (2.1.3) di atas disebut persamaan *garis melalui dua titik*. Satu hal yang menjadi catatan bahwa penamaan titik sebagai "titik pertama" dan "titik kedua" diambil secara sebarang.

Ada pendekatan lain dalam menentukan persamaan garis lurus melalui dua buah titik $P_1(x_1,y_1)$ dan $P_2(x_2,y_2)$, yaitu sebagai berikut : buat sebarang titik $P(x,y)$ pada garis P_1P_2. Maka gradient dari P_1P adalah

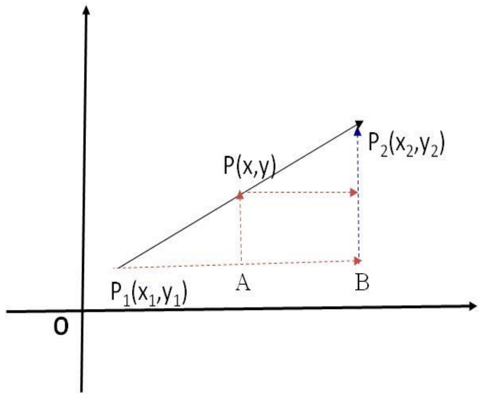
$$\frac{x-x_1}{y-y_1}$$

Kemudian gradient dari P_1P_2 adalah

$$\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$$



Gambar 2.1.3a



Gambar 2.1.3b

Karena gradient dari garis P_1P dan gradient garis P_1P_2 adalah sama maka diperoleh seperti persamaan (2.1.3) yaitu

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Adalagi ide yang yang dilakukan yaitu dengan memandang pada gambar 2.1.3b, bahwa ΔP_1AP sebangun dengan ΔP_1BP_2 (kesebangunan akan diberikan pada bab 3). Maka diperoleh

$$\frac{P_1A}{P_1B} = \frac{AP}{BP_2}, \Rightarrow \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Persamaan Garis Melalui Titik $P(x_1,y_1)$ dengan Gradient m.

Karena kita sudah mengetahui bahwa persamaan garis lurus tersebut adalah $y = ax + b$, atau dengan notasi lain juga ditulis dengan $y = mx + n$, maka kalau titik $P(x_1,y_1)$ dilalui oleh garis

$$y = mx + n$$

maka berlaku

$$y_1 = mx_1 + n,$$

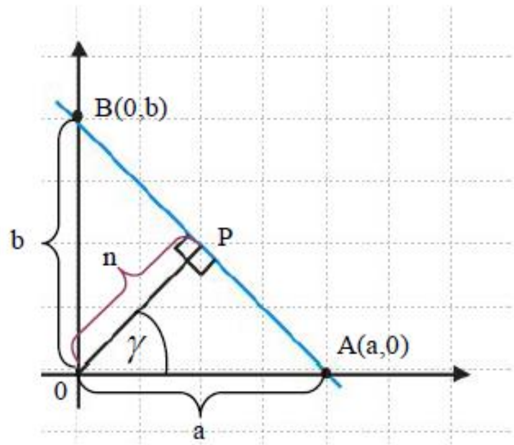
maka dari kedua persamaan tersebut akan diproleh

$$y - y_1 = m(x - x_1). \qquad (2.1.4)$$

Persamaan (2.1.4) di atas merupakan *persamaan garis lurus* yang melalui titik $P(x_1,y_1)$ dengan gradient m.

***Persamaan Garis Hesse* (*Persamaan Garis Normal*).**

Perhatikan gambar 2.1.4 disebelah, Misalkan kita mempunyai garis yang melalui titik $A(a,0)$ dan $B(0,b)$, kemudian tarik garis yang melalui titik $O(0,0)$ yang tegak lurus ke garis AB. Katakan titik potongnya dengan garis AB adalah titik P, maka garis OP disebut *garis Normal* (sebut garis g), katakan γ sudut antara garis OP dengan sumbu $\boldsymbol{X}$. Selanjutnya perhatikan ΔOPB yang siku-siku di P. Maka $\angle OBP = \gamma$,



Gambar 2.1.4

Jadi

$$\sin\gamma = \frac{OP}{OB} = \frac{n}{b} \quad \Rightarrow b = \frac{n}{\sin\gamma} \qquad (2.1.5)$$

Kemudian untuk ΔOPA, maka

$$\cos\gamma = \frac{OP}{OA} = \frac{n}{a} \Rightarrow a = \frac{n}{\cos\gamma} \qquad (2.1.6)$$

Karena persamaan garis *AB* adalah

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a}$$

$$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2.1.7)$$

Maka dengan mensubsitusikan persamaan (2.1.5) dan (2.1.6) ke persamaan (2.1.7) diperoleh

$$\frac{x}{{}^{n}/_{cos\,\gamma}} + \frac{y}{{}^{n}/_{sin\,\gamma}} = 1$$

$$\frac{x\,cos\,\gamma}{n} + \frac{y\,sin\,\gamma}{n} = 1$$

$$x\,cos\,\gamma + y\,sin\,\gamma = n$$

atau

$$x\,cos\,\gamma + y\,sin\,\gamma - n = 0$$

Yang disebut dengan persamaan Normal Hesse dari garis $ax + by + c = 0$

***Teladan* 2.1.1** : Robahlah persamaan garis $-3x - 4y + 10 = 0$ dalam bentuk persamaan normal Hesse.

Penyelesaian : Karena $n = \sqrt{(-3)^3 + (-4)^2} = 5$ (lihat pada bagian berikutnya, jarak titik 0(0,0) ke garis), maka pertama-tama robah persamaan $-3x - 4y + 10 = 0$ menjadi bentuk

$$\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - 2 = 0$$

maka diperoleh

$Cos\ \gamma = 3/5$, $\qquad sin\ \gamma = 4/5$

$\mathrm{Cos}\ \gamma = \cos 37.87^0 \qquad \sin\gamma = sin\ 49.4^0$

Jadi

$x.\ cos\ 37.87^0 + y\ sin\ 49.4^0 = 0$

catatan : nilai *n* juga bisa dihitung dengan menggunakan persamaan (2.1.5) atau (2.1.6).

Persamaan Umum Garis Lurus

Dari pembahasan pada seksi-seksi sebelumnya terlihat bahwa persamaan sembarang garis lurus adalah berderajad satu dalam koordinat karesian / koortinat tegak lurus *x* dan *y*. Sebaliknya akan ditunjukkan bahwa sebarang persamaan berderajad satu dalam *x* dan *y* menyatakan sebuah garis lurus. (Hal ini merupakan jawaban mengapa sebuah persamaan derajad satu disebut *persamaan linier*).

Persamaan umum derajad satu dalam *x* dan *y* adalah

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2.1.8)$$

di mana *A* dan *B* tidak keduanya nol.

Jika $B \neq 0$, bagilah kedua ruas persamaan (2.1.8) dengan *B* dan setelah disusun ulang akan diperoleh,

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad (2.1.9)$$

Ini adalah sebuah garis dengan kemiringan $-\frac{A}{B}$ dan memotong sumbu-*y* di $-\frac{C}{B}$, meskipun *A* atau *C* atau keduanya bernilai nol.

Jika $B = 0$, maka $A \neq 0$ dan selanjutnya akan diperoleh persamaan

$$x = -\frac{C}{A}, \qquad (2.1.10)$$

yang mana ini merupakan persamaan garis lurus yang sejajar dengan sumbu-*y* jika $C \neq 0$, dan berimpit dengan sumbu-*y* jika $C = 0$.

Dengan demikian dalam semua kasus, persamaan (2.1.8) merepresentasikan sebuah garis lurus.

Seperti telah diperlihatkan bahwa kemiringan garis (1) adalah $-\frac{A}{B}$ dan memotong sumbu-y di $-\frac{C}{B}$ (dengan asumsi pada masing-masing kasus $B \neq 0$). Untuk menentukan perpotongan dengan sumbu-x diambil $y = 0$ akan menghasilkan $x = -\frac{C}{A}$. (dengan asumsi $A \neq 0$).

Pada penggambaran sketsa grafik sembarang persamaan derajad satu yang berbentuk $Ax + By + C = 0$ dapat ditentukan dengan cukup mengambil plot dua koordinat titik berbeda sembarang yang termuat dalam garis itu, kemudian lukis garis yang melalui kedua titik.

Salah satu cara termudah dan tercepat dalam membuat sketsa garis adalah mengambil titik-titik potong dengan sumbu koordinat sebagai dua titik sebarang itu kemudian menghubungkan kedua titik itu sebagai garis lurus. Satu masalah yang mungkin timbul adalah apabila garis melalui titik pusat koordinat, atau kedua titik potong sangatlah dekat, atau mungkin sulit menggambarkan secara tepat dikarenakan perpotongan di kedua sumbu berupa nilai pecahan. Tetapi hal ini bisa diatasi dengan mengambil sembarang titik lain yang termuat dalam garis, kemudian digambar sebagaimana cara sebelumnya.

2.2. Kolinieritas Tiga Buah Titik

Persamaan garis lurus juga sering disebut dengan fungsi linear, akan tetapi dalam tulisan ini hanya akan digunakan persamaan garis lurus saja. Misalkan persamaan garis lurus tersebut adalah $y = ax + b$. Titik A, B dan C terletak pada garis $y = ax+b$. perhatikan gambar di bawah ini. Misalkan titik $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ dan $C(x_3,y_3)$, Karena A dan B terletak pada garis $y = ax + b$, maka haruslah berlaku :

$$y_1 = ax_1 + b$$

dan

$$y_2 = ax_2 + b$$

jadi

$$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2) \qquad (2.2.1)$$

Selanjutnya tadi dari A dan C terletak pada garis $y = ax + b$ yang mengakibatkan

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$y_3 = ax_3 + b$$

yang mengakibatkan

$$y_1 - y_3 = a(x_1 - x_3) \qquad (2.2.2)$$

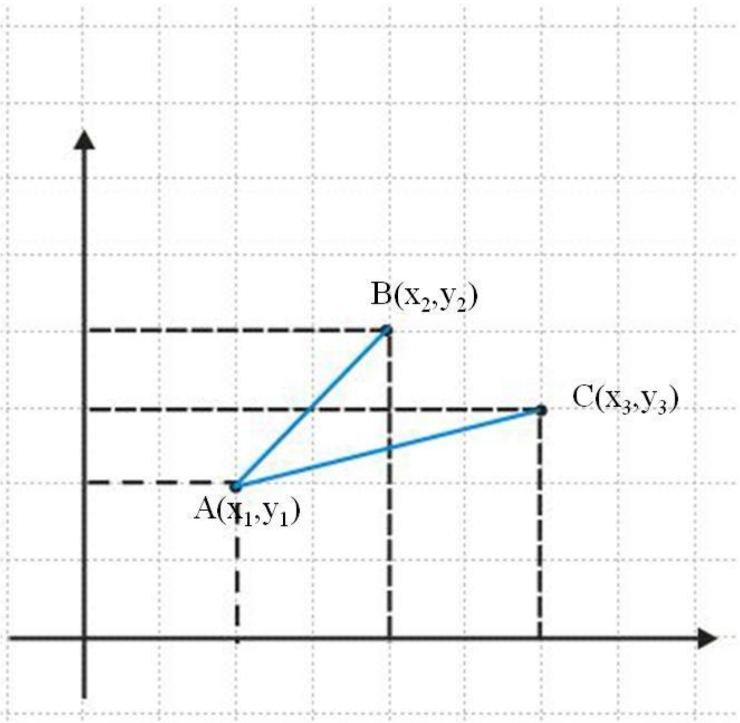
Dari persamaan (2.2.1) dan (2.2.2) diperoleh

$$\frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} \qquad (2.2.3)$$

Kemudian bila dibuat titik B' dan C' seperti pada gambar 2.2.2, maka berlaku

$$\frac{BB'}{AB'} = \frac{CC'}{AC'}$$

Dengan kata lain $tg\ \alpha = tg\ \beta$ yang mengakibatkan $\alpha = \beta$. Jadi ketiga titik akan kolinear bila $\alpha = \beta$ dengan



Gambar 2.2.1

$$\alpha = \frac{BB'}{AB'} \qquad \text{dan } \beta = \frac{CC'}{AC'}$$

Persamaan (2.2.3) merupakan syarat tiga buah titik $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ dan $C(x_3,y_3)$ adalah kolinear (segaris).

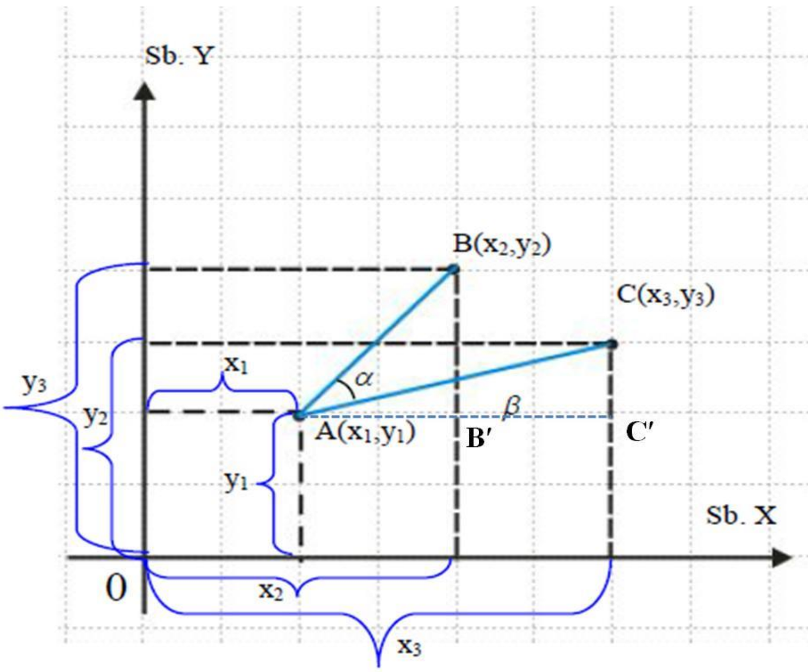
Persamaan (2.2.3) di atas, kalau di uraikan, maka akan menghasilkan persamaan berikut

$$(y_1 - y_2).(x_1 - x_3) = (x_1 - x_2).(y_1 - y_3)$$

$$x_1y_1 - x_3y_1 - x_1y_2 + x_3y_2 = x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_3$$

$$x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

$$x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$



Gambar 2.2.2

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sebut

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka ketiga titik titik $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ dan $C(x_3,y_3)$ akan kolinear jika det $(A) = 0$, dan jika $\det(A) \neq 0$, maka ketiga garis yang dibentuk oleh titik-titik titik $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ dan $C(x_3,y_3)$ akan berpotongan. Pembaca dapat memeriksa sebagai latihan, apakah ketiga dititik titik $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ dan $C(x_3,y_3)$ akan kolinear jika kita misalkan matrik B sebagai

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix},$$

Bila det $(B) = 0$, apakah ketiga garis tersebut juga kolinear. Selanjutnya sebagai latihan bagi pembaca, jika kita punya dua buah garis, katakan

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

tunjukkan bahwa garis tersebut adalah berpotongan di satu titik jika

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

Dengan kata lain juga dapat ditunjukkan

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Kemudian tunjukkan bahwa kedua garis tersebut sejajar, jika

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Dan ahirnya tunjukkanlah bahwa kedua garis tersebut berimpit bila

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Dengan cara yang hampir serupa, pembaca dapat menunjukkan bahwa bila kita mempunyai 3 buah garis, katakan

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$l_3 : a_3x + b_3y + c_3 = 0$

maka ketiga garis tersebut akan berpotongan di satu titik bila determinan dari

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

2.3. Sudut Antara Dua Garis Lurus

Misalkan kita punya dua buah garis lurus yang persamaannya ditulis dalam bentuk

$l_1 : m_1x + b_1$

$l_2 : m_2x + b_2$

katakan γ adalah sudut yang dibentuk oleh kedua garis tersebut dan sudut yang dibentuk oleh garis l_1 dan l_2 terhadap sumbu X masing-masing adalah α_1 dan α_2, seperti pada gambar 2.3.1. maka

$tg\ \alpha_1 = m_1$

dan

$tg\ \alpha_2 = m_2$

Perhatikan gambar 2.3.1. perlu di ingat bahwa sebenarnya kita mengambil kedua garis secara sebarang, jika garisnya seperti pada gambar 2.3.1, maka yang akan berlaku adalah

$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1.$

Akan tetapi untuk posisi lain bisa berlaku

$\gamma = \alpha_1 - \alpha_2.$

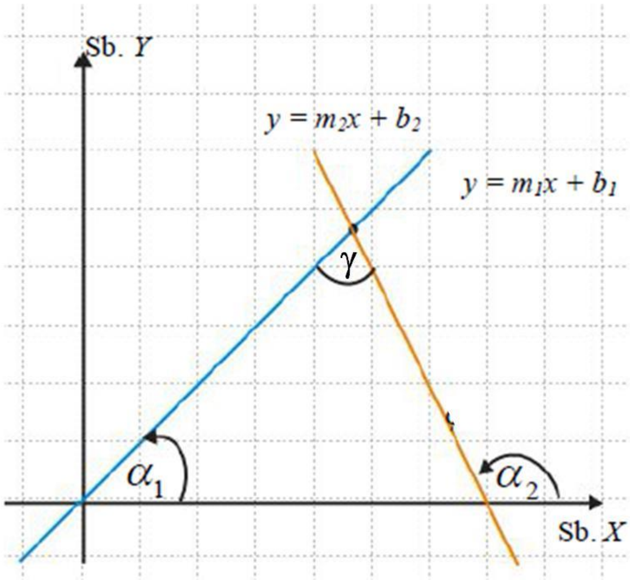
Jadi secara umum yang berlaku adalah :

$$\gamma = |\alpha_1 - \alpha_2|$$

$$tg\,\gamma = tg|\alpha_1 - \alpha_2|$$

$$= \frac{tg\,\alpha_1 - tg\,\alpha_2}{1 + tg\,\alpha_1 . tg\,\alpha_2} \quad \text{atau} \quad tg\,\gamma = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2}$$

$$\gamma = arc.tg \left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_{1\,.}m_2} \right) \qquad (2.3.1)$$



Gambar 2.3.1

Persamaan (2.3.1) disebut dengan besar sudut antara dua buah garis lurus. Dari persamaan ini jugalah dapat dihasilkan berbagai kondisi berikut ini.

a. Jika kedua garis tersebut tegak lurus, maka berlaku

$$tg\ 90 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_{1\,.}m_2}$$

Karena *tg* 90 = *sin* 90 / *cos* 90, maka haruslah berlaku

$$1 + m_1.m_2 = \cos 90^0$$

$$1 + m_1m_2 = 0$$

$$m_1.m_2 = -1 \qquad (2.3.2)$$

Persamaan (2.3.2) inilah menjadi syarat agar dua buah garis tegak lurus.

b. Jika kedua garis tersebut sejajar, maka besar sudut antara kedua garis tersebut adalah 0^0, jadi haruslah berlaku

$$tg\ 0 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_{1\,.}m_2}$$

Artinya $m_1 - m_2 = sin\ 0^0$.

Jadi

$$m_1 - m_2 = 0$$

atau

$$m_1 = m_2 \qquad (2.3.3)$$

Persamaan (2.3.3) ini merupakan syarat agar dua buah garis sejajar.

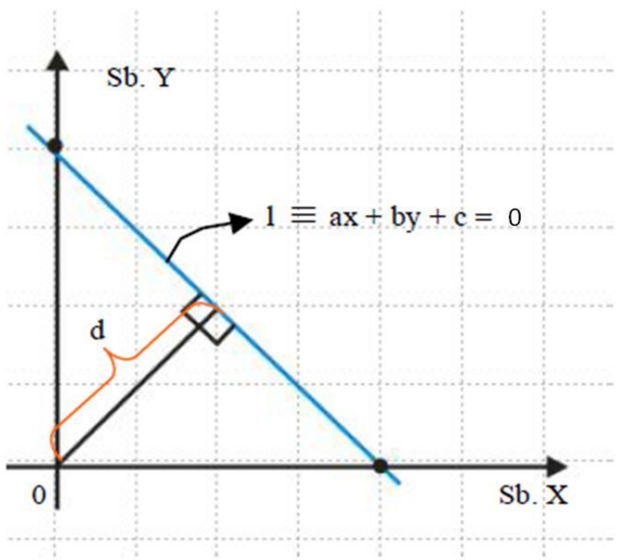
2.4. *Jarak Titik ke Garis*

Jarak Dari Titik O(0,0) ke Garis ax + by + c = 0.

Misalkan kita mempunyai persamaan umum garis l : $ax + by + c = 0$, akan ditentukkan jarak dari titik O(0,0) ke garis tersebut, untuk itu perhatikan gambar 2.4.1 berikut :

Bagi persamaan garis $ax + by + c = 0$dengan $\sqrt{a^2 + b^2}$ maka diperoleh bentuk

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$



Gambar 2.4.1

Karena

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$$

Maka

$$d = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (2.4.1)$$

Sehingga persamaan (2.4.1) merupakan jarak titik $O(0,0)$ ke garis $ax + by + c = 0$.

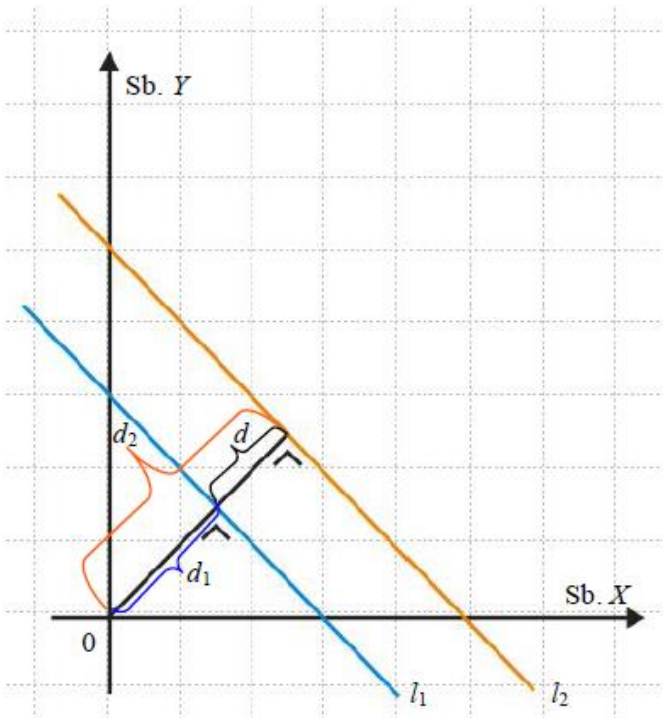
Jarak Dua Garis Lurus

Misalkan kita punya dua buah garis lurus

$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

akan ditentukan jarak dari l_1 ke l_2 (seperti pada gambar 2.4.2). Berdasarkan persamaan (2.4.1), maka jarak dari titik $O(0,0)$ ke garis $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ adalah



Gambar 2.4.2

$$d_1 = \left|\frac{c_1}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}}\right|$$

Dan jarak dari titik $O(0,0)$ ke garis l_2 : $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ adalah

$$d_2 = \left|\frac{c_2}{\sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2}}\right|$$

Kalau d merupakan jarak dari garis l_1 ke l_2 maka $d = |d_2 - d_1|$. Karena kedua garis tersebut sejajar maka $a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$, kalau koefisien x dan y tersebut kita katakan saja a dan b, maka

$$d = \left|\frac{c_2 - c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \qquad (2.4.2)$$

Jarak titik $P(x_1,y_1)$ ke garis $ax + by + c = 0$

Pertama-tama misalkan kita punya persamaan garis l_1 : $y = mx + b$ yang melalui titik $P(x_1,y_1)$, akan ditentukan jarak dari titik $P(x_1,y_1)$,ke garis l_2 : $ax + by + c = 0$. Garis l_1 : $y = mx + b$ dibuat sejajar dengan garais l_2 : $ax + by + c = 0$, Jadi gradient kedua garis tersebut haruslah sama. Gradient garis ke l_2 ($m\ l_2 = -a/b$). Karena garis l_1 sejajar dengan garis l_2. Maka persamaan garis yang melalui titi $P(x_1,y_1)$ dengan gradient $-a/b$ adalah

$$y - y_1 = -\frac{a}{b}\,(x - x_1)$$

$$ax + by - (ax_1 - by_1) = 0$$

pada persamaan garis di atas nilai $c = -(ax_1 - by_1)$. Jadi jarak dari kedua garis tersebut adalah

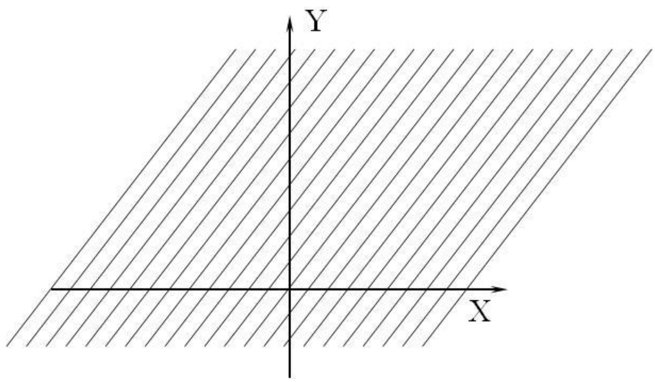
$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \qquad (2.4.3)$$

Persamaan (2.4.3) di atas, merupakan jarak antara titik $P(x_1,y_1)$, ke garis ke garis $ax + by + c = 0$.

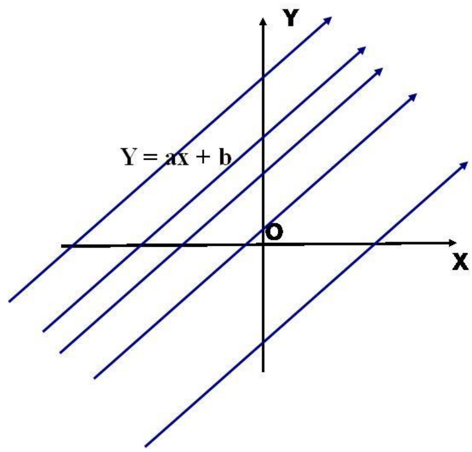
2.5. *Berkas/Keluarga Garis*.

Persamaan $y = 2x + b$ menyatakan semua garis yang mempunyai kemiringan 2. Perhatikan gambar 2.1.3a, untuk setiap perubahan nilai b (yang mana merupakan perpotongan dengan sumbu-y) hanyalah mempunyai pengaruh pada pergerakan garis ke atas atau ke bawah tanpa perubahan kemiringan. Kuantitas b disebut **parameter**.

Sebuah parameter adalah suatu konstanta yang dapat disesuaikan fungsinya. Ia mempunyai beberapa karakteristik variabel dan beberapa karakteristik konstanta. Parameter menjadi variabel jika dalam hal kita memberikan sembarang perubahan nilai, tetapi setelah pemberian nilainya ia dipandang sebagai tetapan atau konstan, sementara itu kita memposisikan x dan y bervariasi, jadi diperoleh sebuah garis tunggal untuk setiap nilai tetap b.

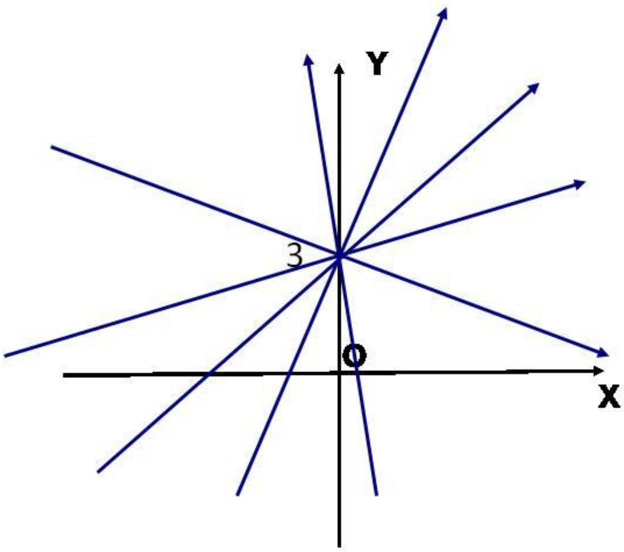


Gambar 2.5.1a



Gambar 2.5.1b

Pada gambar 2.5.1b, merupakan kumpulan/keluarga dari persamaan garis secara umum $y = ax + b$. dengan gradient tetap a sedangkan parameternya berobah-robah yaitu sebesar b. Pada gambar 2.5.2 lebih menarik lagi yaitu merupakan keluarga dari semua garis lurus yang melalui titik (0, 3).



Gambar 2.5.2

Sehingga kita akan membahas apa persamaan garis yang sejajar dengannya atau yang tegak lurus dan lain sebagainya.

Kalau kita misalkan persamaan garis tersebut secara umum adalah $y + ax + b$, kemudian garis tersebut kita geser sejauh m satuan, misalkan kita geser kesebelah kiri. Maka persamaannya menjadi $y = a(x - m) + n = ax - am + n$ atau dapat juga ditulis dalam bentuk $ax - y - am + n = 0$. Dengan a, m dan n adalah sebarang, sehingga tetap berada dalam bentuk umum garis lurus yaitu $ax + by + c = 0$. Untuk itu misalkan kita punya dua buah garis l_1 dan l_2 dengan

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

karena garis tersebut berpotongan, maka mestilah dipenuhi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Jadi kalau kita mesti mencari lagi titik potong dari garis l_1 dan l_2 kemudian kita tentukan persamaannya yang memenuhi syarat yang diberikan, maka pekerjaan kita tidak ubahnya seperti yang disekolah menengah. Dilain pihak pekerjaan seperti itu juga tidak selamanya baik dilakukan, apalagi kalau persamaan garisnya lebih dari 2, tentunya pekerjaan kita akan lebih merepotkan. Untuk itu ada baiknya kita formulakan dengan cara lain.

Karena l_1 dan l_2 berpotongan, maka mestilah dipenuhi :

$$a_1x + b_1y + c_1 = a_2x + b_2y + c_2$$

atau

$$a_1x + b_1y + c_1 - (a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

kalau l_1 kita kali dengan t_1 dan l_2 kita kali dengan t_2 maka titik potong kedua garis tersebut tidak akan berubah dan begitu juga dengan titik potongnya, maka

$$t_1(a_1x + b_1y + c_1) = t_2\,(a_2x + b_2y + c_2) \qquad (2.5.1)$$

maka dari persamaan (2.5.1) ini kita cari nilai t_1 dan t_2 kemudian di gabungkan dengan persyaratan lain yang diinginkan soalnya. Nilai t_1 dan t_2 tidak kita ketahui apakah positip atau negatip, maka persamaan (2.5.1) juga boleh kita tulis dalam bentuk

$$t_1(a_1x + b_1y + c_1) + t_2\,(a_2x + b_2y + c_2) = 0,$$

Pembaca menulis tanda dari t_1 atau t_2 negatip atau positip juga boleh, perbedaannya nanti hanya akan muncul dalam bentuk persamaannya, akan tetapi bila digabungkan dengan syarat yang diberikan, maka hasilnya tetap akan sama.

***Teladan* 2.5.1**. Tentukan persamaan garis yang melalui perpotongan garis $3x - 4y + 12 = 0$ dengan garis $x + 3y – 6 = 0$, yang memenuhi syarat berikut :

a. Sejajar dengan garis $2x + y – 1 = 0$
b. Sejajar dengan sumbu X
c. Tegaklurus dengan $4x – 7y – 10 = 0$.

Penyelesaian : Persamaan berkas/keluarga garisnya adalah

$$t_1(3x – 4y + 12) = t_2(x + 3y – 6)$$

$$(3t_1 + t_2)x +(3t_2 – 4t_1)y + 12t_1 – 6t_2 = 0 \qquad (*)$$

a. Karena garis yang diminta adalah sejajar dengan persamaan garis $2x + y - 1 = 0$, maka haruslah berlaku :

$$\frac{3t_1 + t_2}{2} = \frac{3t_2 - 4t_1}{1}$$

$$11\ t_1 = 5\ t_2.$$

Pilih $t_1 = 5$ dan $t_2 = 11$ kemudian disumsitusikan ke persamaan (*), maka diperoleh

$$2x + 13y - 6 = 0.$$

Itulah persamaan yang diminta.

b. Karena persamaan garis yang diminta adalah sejajar dengan sumbu *X*, maka persamaan (*) haruslah memenuhi $3t_1 + t_2 = 0$, ambil $t_1 = 1$ dan $t_2 = -3$. Kemudian subsitusikan lagi ke persamaan (*), maka akan diperoleh $13\ y + 30 = 0$, (itulah persamaan garis yang diminta).

c. Karena persamaan garis yang diminta tegak lurus dengan garis $4x - 7\text{y} - 10 = 0$, maka haruslah berlaku

$$(-1).\frac{3t_1 + t_2}{3t_2 - 4t_1}.\frac{4}{7} = -1$$

$$40t_1 - 17t_2 = 0$$

Ambil $t_1 = 17$ dan $t_2 = 40$, dan disubsitusikan kepersamaan (*) maka diperoleh lah persamaan garis yang diminta yaitu $91x - 42\ y - 56 = 0$. ♥

Berikut ini akan diberikan Teladan menarik penggunaan berkas/kumpulan garis, yaitu untuk membuktikan bahwa ketiga garis besar dari suatu ΔABC berpotongan disatu titik. Akan tetapi dalam hal ini di ambil kasus khusu untuk koordinat titik *A*, *B* dan *C* yang berada pada sumbu *X* dan *Y*, kemudian sebagai tambahan teknik bagi pembaca, dalam proses pembuktian akan diberikan dengan cara yang sedikit berbeda akan tetapi tidak lari dari konsep yang ada.

***Teladan* 2.5.2**. Buktikan bahwa ketiga garis berat yang koordinatnya $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, dan $C(0, c)$ adalah berpotongan di satu titik.

Penyelesaian : Misalkan P, Q, dan R masing-masing titik tengah dari garis BC, AC, dan AB. Dengan menggunakan rumus titik tengah diperoleh koordinat masing-masing titik tengah yaitu $P(\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c)$, $Q(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}c)$, $R(\frac{1}{2}(a + b), 0)$ (lihat gambar 2.5.3 berikut).

Persamaan garis yang melalui titik C dan R adalah:

$$\frac{y-c}{0-c} = \frac{x-0}{\frac{1}{2}(a+b)-0}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2cx + (a + b)y - (a + b)c = 0 \qquad (2.5.2)$$

Persamaan garis yang melalui titik A dan P adalah:

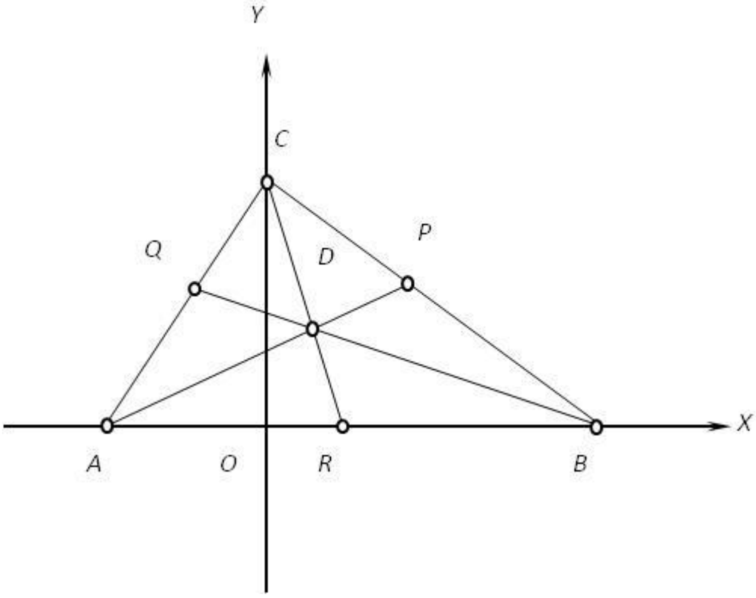
$$\frac{y-0}{\frac{1}{2}c-0} = \frac{x-a}{\frac{1}{2}b-a}$$

$$\Leftrightarrow \quad cx + (2a - b)y - ac = 0 \qquad (2.5.3)$$

Persamaan garis yang melalui titik B dan Q adalah:

$$\frac{y-0}{\frac{1}{2}c-0} = \frac{x-b}{\frac{1}{2}a-b}$$

$$\Leftrightarrow \quad cx + (2b - a)y - bc = 0 \qquad (2.5.4)$$



Gambar 2.5.3

Jika kita dapat menunjukkan bahwa masing-masing garis (2.5.2), (2.5.3) dan (2.5.4) adalah anggota suatu berkas garis, dengan kata lain bahwa satu garis merupakan hasil kombinasi linear dari dua garis lainnya maka kita telah membuktikan bahwa ketiga garis adalah berpotongan di satu titik.

Berkas garis (2.5.3) dan (2.5.4) adalah

$$(cx + (2a - b)y - ac) + k(cx + (2b - a)y - bc) = 0$$

Jika diambil $k = 1$ maka akan diperoleh anggota berkas garis

$$cx + (2a - b)y - ac + cx + (2b - a)y - bc = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2cx + (a + b)y - (a + b)c = 0.$$

Persamaan terakhir tidak lain adalah persamaan (1). Hal ini membuktikan bahwa ketiga garis tersebut berpotongan di satu titik.

***Soal Latihan* 2**

1. a) Tentukan keluarga garis yang perpotongannya dengan sumbu-y dan perpotongannya dengan sumbu-x berjumlah 5.

   (b) Tentukan persamaan anggota keluarga garis di (a) yang mempunyai kemiringan $-\frac{2}{3}$

2. (a) Tentukan keluarga garis yang perpotongannya dengan sumbu-y dikurangi perpotongannya dengan sumbu-x adalah 5.

   (b) Tentukan persamaan anggota keluarga garis di (a) yang melalui (2, 4).

3. Tentukan persamaan keluarga garis yang perkalian perpotongan dengan sumbu-x dan sumbu-y adalah 5.

4. Tentukan persamaan keluarga garis yang melalui titik potong garis $3x + 4y - 12 = 0$ dengan garis $x - 2y + 4 = 0$ dan tegak lurus dengan garis $5x - y = 0$.

5. Tentukan persamaan keluarga garis yang perpotongan dengan sumbu-x dibagi perpotongan dengan sumbu-y adalah 5.

6. Tentukan persamaan garis yang melalui titik potong garis $2x - y + 6 = 0$ dan garis $2x + 7y - 20 = 0$ dan melalui titik O (0.0).
7. *). Tentukan persamaan keluarga garis yang membentuk sudut 45° dengan garis $2x - 3y - 10 = 0$.
8. Tentukan persamaan keluarga garis yang jaraknya terhadap titik (6, 2) adalah 5.
9. Misalkan persamaan 3 buah garis lurus adalah sebagai berikut

   $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$

   $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

   $l_3 : a_3x + b_3y + c_3 = 0$

   Tunjukkan bahwa ketiga garis tersebut akan berpotongan di satu titik bila determinan dari

   $$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

10. Tentukan persamaan garis yang melalui perpotongan garis $2x + 3y - 7 = 0$ dan $5x - 2y - 8 = 0$ dan
    (a) melalui titik asal,
    (b) mempunyai kemiringan $-\frac{16}{5}$,
    (c) sejajar dengan garis $2x - 3y + 7 = 0$.
    (d) tegak lurus dengan garis $4x + 3y - 12 = 0$.
11. Tentukan persamaan garis yang melalui perpotongan garis $2x - 3y - 26 = 0$ dan $6x + 16y + 97 = 0$ dan
    (a) tegak lurus dengan garis yang pertama,
    (b) tegak lurus dengan garis kedua,
    (c) sejajar dengan sumbu-x,
    (d) tegak lurus dengan sumbu-x.
12. Tentukan persamaan garis yang melalui perpotongan garis $5x - 3y - 10 = 0$ dan $x - y + 1 = 0$ dan
    (a) melalui titik (7, 6),

(b) membagi dua sama panjang segmen yang menghubungkan titik (1, 6) dengan (–3, 2),

(c) memotong sumbu-x di 4.

13. Tentukan persamaan garis yang melalui perpotongan garis $2x - 3y - 3 = 0$ dan $x - 2y - 1 = 0$ dan

(a) berjarak 1 dari titik asal,

(b) memotong sumbu-y di –2,

(c) perkalian titik potong dengan sumbu koordinat sama dengan –4.

14. Tunjukkan bahwa ketiga garis tinggi suatu segitiga berpotongan di satu titik.

15. *) Tunjukkan bahwa titik berat suatu segitiga membagi garis berat dengan perbandingan 1 : 2.

16. *). *AB* dan *CD* adalah sisi-sisi yang sejajar dari sebuah trapesium *ABCD*, sedangkan *P* dan *Q* masing-masing merupakan titik tengah sisi-sisi *AB* dan *CD*.

(a) Buktikan bahwa sisi *AD* dan *BD* serta garis *PQ* berpotongan di satu titik.

(b) Buktikan bahwa diagonal *AC* dan *BD* serta garis *PQ* berpotongan di satu titik.

Pembahasan dalam bab 2 ini adalah tentang garis lurus, akan tetapi disini tambahkan tentang garis kuasa dan titik kuasa serta berkas lingkaran, hal ini dilakukan karena persamaan lingkaran secara khusus tidak dibahas lagi karena berbagai bentuk lingkaran dan garis singgung pada lingkaran sudah dibahas pada tingkat sekolah menengah. Namun sedikit buku yang membahas tentang berkas lingkaran, untuk itulah materi tersebut di muat sebagai tambahan pada ban 2 ini.

2.6. *Garis Kuasa dan Titik Kuasa*

Misalkan diketahui dua buah lingkaran. Pikirkan suatu titik yang mempunyai kuasa sama terhadap dua lingkaran tersebut. Himpunan (tempat kedudukan) titik-titik yang demikian,yakni mempunyai kuasa yang sama terhadap dua lingkaran tertentu disebut *garis kuasa kedua lingkaran* itu. Misal diketahui dua lingkaran sebagai berikut.

$$l_1 = x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

dan

$$l_2 = x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0.$$

Jika titik $T(x_1,y_1)$ mempunyai kuasa yang sama terhadap lingkaran l_1 dan l_2 , maka dipenuhi persamaan berikut.

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2$$

atau

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0$$

Hal ini akan berlaku pada setiap titik yang kuasanya terhadap kedua lingkaran itu sama. Dengan demikian, garis kuasa yang merupakan tempat kedudukan titik-titik yang mempunyai kuasa yang sama terhadap lingkaran l_1 dan l_2 adalah sebagai berikut

$$g : (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0$$

Karena secara simbolis lingkaran dapat dinyatakan sebagai $l(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$ atau

$$l(\mathrm{x}, \mathrm{y}) : x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

maka kuasa titik $T(x_1,y_1)$ terhadap lingkaran l (x, y) dapat ditulis dengan $l(x_1, y_1)$. Jadi persamaan garis kuasa lingkaran $l_1(x, y) = 0$ dan $l_2(x, y) = 0$ dapat ditulis sebagai berikut.

$$l_1(x, y) - l_2(x, y) = 0 \text{ atau } l_1 - l_2 = 0$$

Perhatikan bahwa garis kuasa mempunyai gradient

$$m_1 = -\frac{A_1 - A_2}{B_1 - B_2}$$

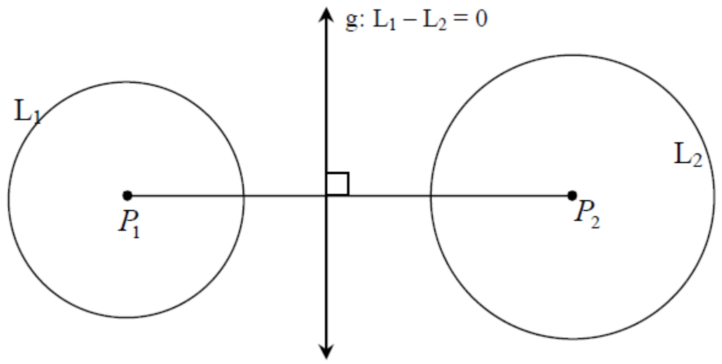
titik pusat lingkaran l_1 dan l_2 berturut-turut adalah

$$P_1 = \left(-\tfrac{1}{2}A_1, -\tfrac{1}{2}B_1\right) \text{ dan } P_1 = \left(-\tfrac{1}{2}A_2, -\tfrac{1}{2}B_2\right)$$

Gradien garis sentral atau garis penghubung kedua pusat lingkaran ini adalah

$$m_2 = -\frac{B_1 - B}{A_1 - A_2}$$

Karena $m_1.m_2$ = -1, maka garis kuasa dua buah lingkaran akan tegak lurus dengan garis sentral (penghubung titik-titik pusat) kedua lingkaran tersebut.



Gambar 2.6.1

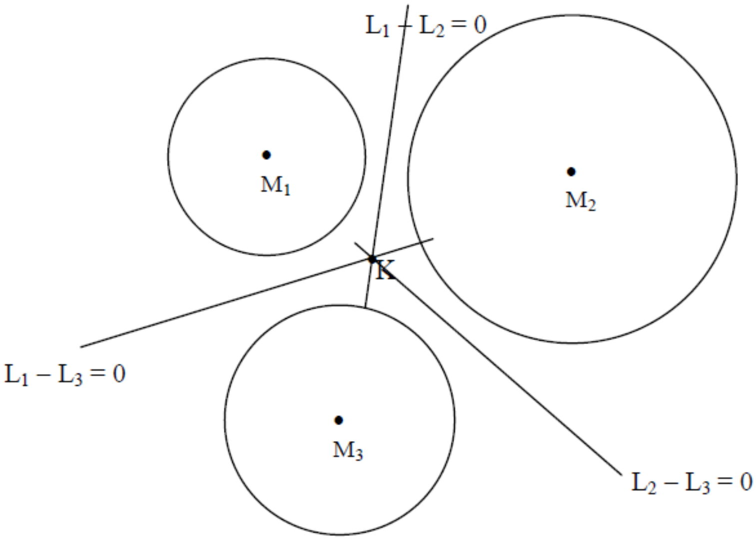
Untuk selanjutnya pembaca dapat memikirkan kasus khusus sebagai berikut : Bagaimana kedudukan garis kuasa dua buah lingkaran jika kedua lingkaran tersebut berpotongan atau bersinggunga? Apakah garis kuasanya memotong kedua lingkaran?

Titik Kuasa

Tempat kedudukan titik-titik yang mempunyai kuasa yang sama terhadap dua lingkaran adalah suatu garis lurus. Jadi kalau ada tiga buah lingkaran, akan terdapat sebuah titik yang mempunyai kuasa yang sama terhadap ketiga lingkaran tersebut. Titik yang demikian disebut titik kuasa. Perhatikan Gambar berikut ini.

Titik K adalah suatu titik yang kuasanya terhadap l_1 = 0 dan l_2 = 0 sama, karena K terletak pada $l_1 - l_2 = 0$. dan K mempunyai kuasa yang sama pula terhadap l_2 = 0 dan l_3 = 0, karena K terletak pada $l_2 - l_3 = 0$. Jadi K mempunyai kuasa yang sama terhadap $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, dan $l_3 = 0$ dan disebut titik kuasa ketiga lingkaran tersebut. Persamaan titik kuasa dapat ditulis secara simbolis sebagai berikut.

$$L_1 = l_2 = l_3$$



Gambar 2.6.2

Teladan 2.6.1 **:** Tentukan koordinat-koordinat dari titik kuasa lingkaran-lingkaran berikut ini.

$l_1 = x^2 + y^2 + x + y - 14 = 0,$

$l_2 = x^2 + y^2 = 13,$ dan

$l_3 = x^2 + y^2 + 3x - 2y - 26 = 0.$

Penyelesaian : $l_1 - l_2 = 0$, didapat $x + y - 1 = 0$, $l_3 - l_2 = 0$, didapat $3x - 2y - 13 = 0$. Dari kedua persamaan itu didapat $x = 3$ dan $y = -2$. Sehingga titik kuasa ketiga lingkaran itu adalah $K(3, -2)$.

Dua Lingkaran Yang Berpotongan

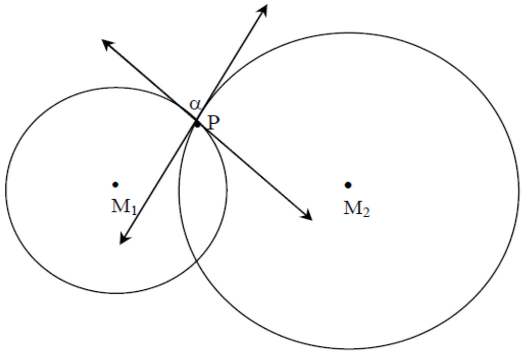
Sudut antara dua buah lingkaran didefinisikan sebagai sudut yang dibentuk oleh garis-garis singgung pada kedua lingkaran itu di titik potongnya. Dua lingkaran dikatakan saling memotong tegak lurus jika sudut antara garis-garis singgung di titik potongnya adalah 90^0. Perhatikan gambar berikut.

Misal diketahui dua lingkaran sebagai berikut ini.

$$l_1 = x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

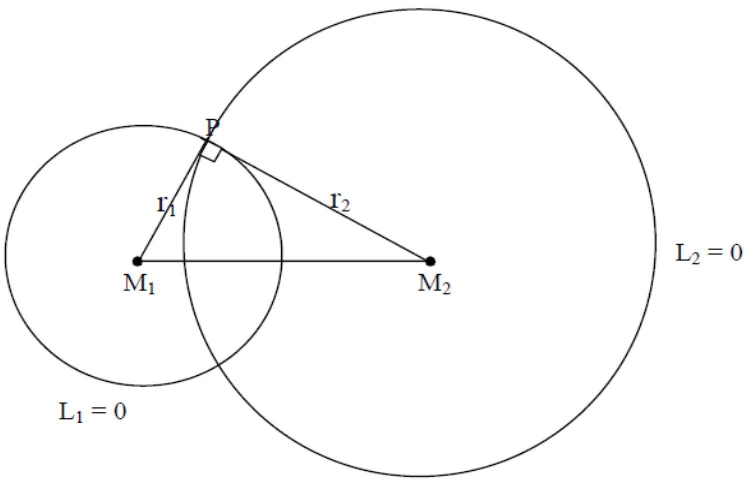
dan

$$l_2 = x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$



Gambar 2.6.3

Kedua lingkaran itu akan berpotongan tegak lurus apabila garis-garis singgung berimpit dengan jari-jari kedua lingkaran.



Gambar 2.6.4

Perhatikan bahwa r_1 tegak lurus r, sehingga ΔM_1M_2P adalah segitiga siku-siku.

Diketahui:

$$M_1 = \left(-\tfrac{1}{2}A_1, -\tfrac{1}{2}B_1\right), \quad M_2 = \left(-\tfrac{1}{2}A_2, -\tfrac{1}{2}B_2\right)$$

dan

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{4}D_1^2 + \frac{1}{4}E_1^2 - F_1} \text{ dan } r_2 = \sqrt{\frac{1}{4}D_2^2 + \frac{1}{4}E_2^2 - F_2}$$

Sehingga berlaku

$$(M_1M_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$$

atau

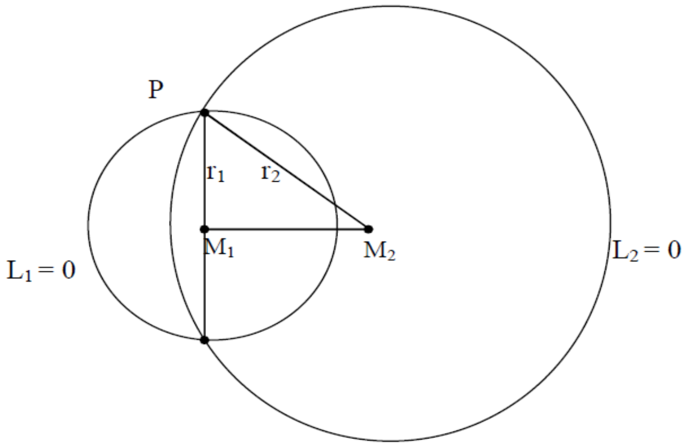
$$(E_2 - E_1)^2 + (D_2 - D_1)^2 = D_1^2 + E_1^2 - F_1 + D_2^2 + E_2^2 - F_2$$

atau

$$2D_1D_2 + 2E_1E_2 = F_1 + F_2$$

Inilah syarat dua lingkaran saling tegak lurus.

Sebuah lingkaran dapat juga memotong lingkaran lain sedemikian sehingga membagi dua sama besar lingkaran tersebut. Perhatikan gambar berikut



Gambar 2.6.5

Jika lingkaran l_2 membagi dua sama besar lingkaran l_1, maka dalam ΔM_1PM_2 berlaku

$$(M_1M_2)^2 = r_2^2 + r_1^2$$

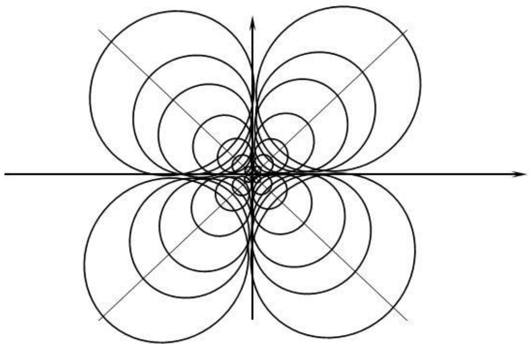
Jadi, supaya suatu lingkaran membagi dua sama besar lingkaran lain, haruslah kuadrat jarak titik-titik pusatnya sama dengan selisih kuadrat jari-jarinya

Berkas Lingkaran

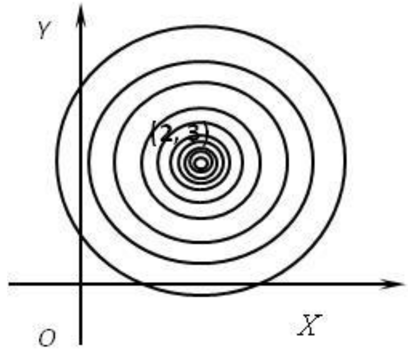
Seperti diperlihatkan pada seksi 3.10, bahwa jika sebuah persamaan linier memuat satu konstanta sebarang, atau parameter, maka persamaan itu menyatakan sebuah himpunan semua garis pada bidang. Situasi yang sama juga ada untuk lingkaran. Persamaan lingkaran yang memuat parameter disebut *keluarga lingkaran***.**

Misalkan persamaan

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2$$



gambar 2.6.6a



gambar 2.6.6b

akan menyatakan keluarga lingkaran yang berpusat di (2, 3) (lihat gambar 2.6.6a) Dengan memberikan nilai tertentu untuk r maka akan menunjuk pada lingkaran tertentu secara unik.

Persamaan dalam bentuk

$$(x-h)^2 + (y \pm h)^2 = h^2$$

akan menyatakan keluarga lingkaran yang meyinggung kedua sumbu koordinat (perhatikan gambar 2.6.6b).

Juga sangat memungkinkan mempunyai keluarga lingkaran yang mempunyai dua parameter. Sebagai teladan, persamaan

$$(x-h)^2 + (y-2h)^2 = r^2$$

menyatakan keluarga lingkaran yang mempunyai pusat pada garis $y = 2x$, tetapi dengan jari-jari sebagai variabel.

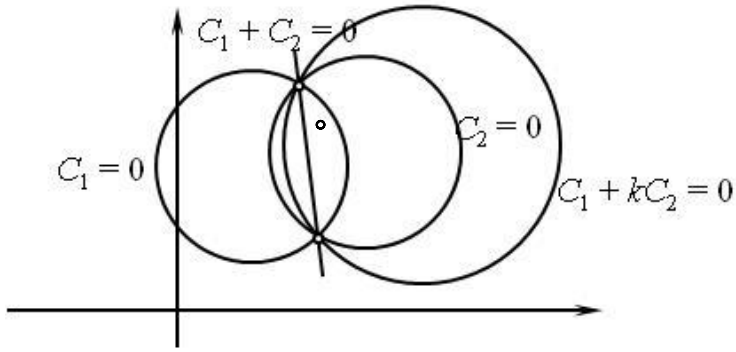
Pandang dua lingkaran L_1 dan L_2 yang berpotongan (baik real maupun imajiner) dengan persamaan sebagai berikut:

$$L_1 \equiv x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ dan}$$

$$L_2 \equiv x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0;$$

Pandang pula persamaan yang berbentuk:

$$L_1 + kL_2 \equiv x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 + k(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2) = 0 \qquad (2.6.1)$$



Gambar 2.6.7

Untuk sebarang nilai $k \neq -1$ maka persamaan $L_1 + kL_2 = 0$ menyatakan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran L_1 dan L_2. Ini mudah dipahami bahwa (2.6.1) adalah suatu lingkaran dengan menyusun kembali persamaan (2.6.1) dalam bentuk:

$$x^2 + y^2 + \frac{a_1 - a_2}{1+k}x + \frac{b_1 - b_2}{1+k}y + \frac{c_1 - c_2}{1+k} = 0 \qquad (2.6.2)$$

yang mana persamaan di atas merupakan sebuah lingkaran. Koordinat titik potong kedua lingkaran L_1 dan L_2 juga memenuhi lingkaran dengan persamaan $L_1 + kL_2 = 0$, sebab titik potong itu memenuhi persamaan L_1 dan L_2.

Sedangkan untuk $k = -1$, maka $L_1 - L_2 = 0$ merupakan garis kuasa kedua lingkaran yang juga dapat dianggap sebagai lingkaran dengan pusat pada garis hubung titik pusat kedua lingkaran dan terletak di tak hingga, sehingga busurnya berupa garis lurus.

Jika diberikan semua nilai parameter k yang mungkin maka himpunan semua lingkaran yang berbentuk $L_1 + kL_2 = 0$ disebut ***berkas lingkaran*** dengan L_1 dan L_2 sebagai lingkaran dasar/basis. Sifat istimewa yang dimiliki anggota berkas lingkaran adalah bahwa semua anggota berkas lingkaran mempunyai sebuah garis kuasa berserikat dan pusatnya adalah berada pada garis lurus yang menghubungkan kedua titik pusat lingkaran dasarnya.

***Teladan* 2.6.2:** Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong lingkaran

$L_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 6y - 96 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 18x - 8y + 48 = 0$,

dan melalui titik asal.

Penyelesaian:

Lingkaran yang dicari merupakan salah satu anggota berkas lingkaran dengan basis L_1 dan L_2, yaitu

$$(x^2 + y^2 + 4x - 6y - 96) + k(x^2 + y^2 - 18x - 8y + 48) = 0.$$

Karena lingkaran juga melalui titik asal $O(0, 0)$ maka substitusikan $x = 0$ dan $y = 0$ pada persamaan di atas diperoleh $-96 + 48k = 0$, atau $k = 2$

Substitusikan nilai k pada berkas lingkaran diperoleh persamaan lingkaran yang dicari yaitu :

$$3x^2 + 3y^2 - 32x - 22y = 0$$

Soal Latihan 3

1. Tentukan besar sudut antara lingkaran $l_1 : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$ dan $l_2 : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$
2. Tentukan koordinat titik kuasa lingkaran-lingkaran berikut.
   $l_1 : x^2 + y^2 = 25$; $l_2 : x^2 + y^2 - 3x - 2y - 8 = 0$; dan $l_3 : x^2 + y^2 + 4x - 5y - 17 = 0$
3. Tentukan persamaan garis kuasa lingkaran-lingkaran berikut.
   $l_1 : x^2 + y^2 - 3x - 2y + 4 = 0$ dan $l_2 : 3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0$

4. Tentukan koordinat suatu titik pada garis $g : x - y - 2 = 0$ yang mempunyai kuasa yang sama terhadap lingkaran $l_1 : (x - 2)^2 + y^2 = 2$ dan $l_2 : x^2 + (y - 3)^2 = 5$
5. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui $A(1, -1)$ dan melalui titik-titik potong lingkaran-lingkaran $l_1 : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$ dan $l_2 : x^2 + y^2 + 6x - 12y + 35 = 0$
6. Tentukan persamaan garis-garis kuasa lingkaran-lingkaran $l_1 : x^2 + y^2 + x = 0$; $l_2 : x^2 + y^2 + 4y + 7 = 0$, dan $l_3 : 2x^2 + 2y^2 + 5x + 3y + 9 = 0$.

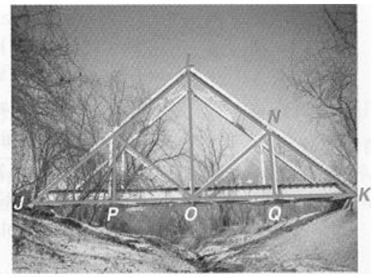
   Tentukan pula titik kuasanya.
7. Tentukan persamaan lingkaran yang memotong tegak lurus lingkaran $l: x^2 + y^2 - 2x + 5y -5 = 0$, melalui titik (6, 1), dan pusatnya terletak pada garis $g: 9x + 4y = 47$.
8. Buktikan bahwa kedua lingkaran $l_1 : x^2 + y^2 +10x - 2y +17 = 0$ dan $l_2: x^2 + y^2 - 8x + 22y - 7 = 0$ saling bersinggungan. Tentukan titik singgungnya.

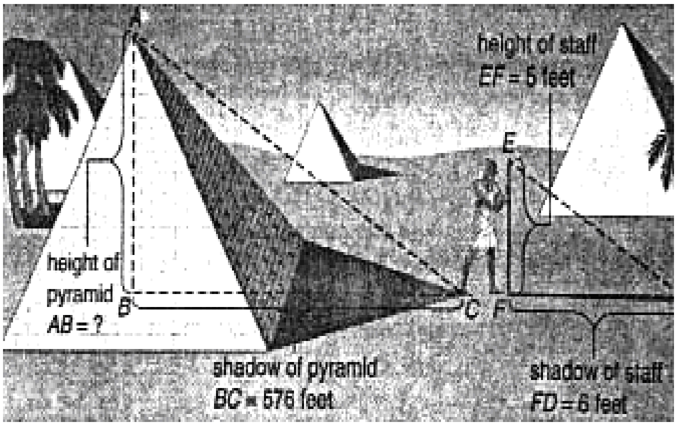
BAB III

Kongruensi dan Kesebangunan

Perhatikan Gambar-gambar berikut dalam kehidupan sehari- hari

Bukankah ini semua masalah kongruensi





BAB III

KONGRUENSI DAN KESEBAGUNAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai garis dan sudut, pengertian segitiga, kongruensi antara dua segitiga, dan kesebangunan antara dua segitiga, yang akan dijelaskan pada masing-masing sub bab berikut.

3.1. *Garis dan Sudut*

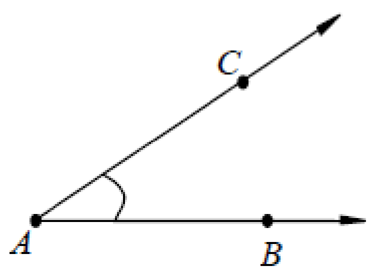
Garis merupakan himpunan dari semua titik-titik. Jika ada dua garis yang berpotongan, maka perpotongannya tersebut adalah sebuah titik yang disebut titik perpotongan, dan juga perpotongan dua garis juga dapat membentuk sudut. Berikut akan dibahas beberapa definisi dan teorema mengenai garis dan sudut, khususnya sudut yang bertolak belakang.

***Definisi* 3.1.1** Untuk setiap dua titik *A* dan *B*, *segmen garis AB* adalah himpunan titik *A* dan titik *B*, bersama dengan semua titik yang terletak diantara *A* dan *B*.

Gambar 3.1.1.

Sebelum masuk pada pembahasan sudut bertolak belakang, maka akan diberikan pengertian dari sudut dan sudut yang kongruen.

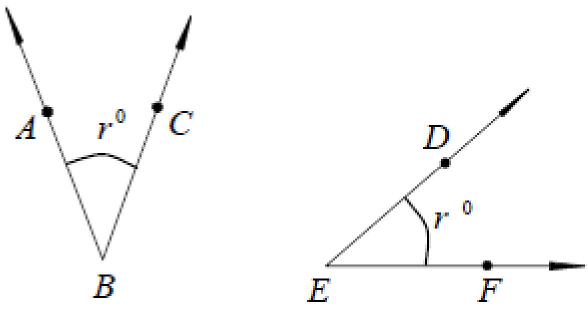
***Definisi* 3.1.2.** Misalkan dua segmen garis berarah mempunyai titik akhir yang sama tapi tidak berada pada garis yang sama, maka gabungan kedua garis tersebut disebut *sudut*.



Gambar 3.1.2.

Perhatikan gambar 3.1.2 garis berarah *AB* dan *AC* sama-sama mempunyai titik akhir di *A*, maka gabungannnya membentuk sudut, yaitu $\angle BAC$ atau $\angle CAB$.

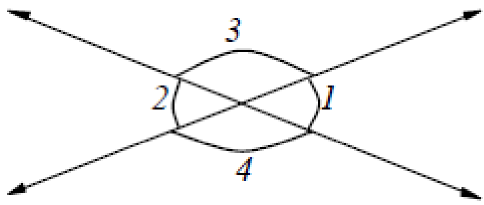
***Definisi* 3.1.3** Dua buah sudut dengan ukuran yang sama disebut *kongruen*.



Gambar 3.1.4.

Perhatikan gambar 3.1.4, $\angle ABC$ dan $\angle DEF$ dikatakan *kongruen* jika ukuran $m \angle ABC =$ ukuran $m\angle DEF$, dan ditulis $\angle ABC \cong \angle DEF$. Salah satu contoh sudut yang kongruen adalah sudut yang bertolak belakang, yaitu sudut yang dibentuk oleh perpotongan dua buah segmen garis dan mempunyai besar sudut yang sama atau kongruen.

***Definisi* 3.1.4.** Dua buah sudut dikatakan *sudut bertolak belakang* adalah apabila sisi-sisinya terbentuk dari dua pasang garis berarah yang berpotongan.



Gambar 3.1.5.

Perhatikan gambar 3.1.5, empat buah sudut yang dibentuk oleh perpotongan dua buah segmen garis adalah sudut bertolak belakang yaitu $\angle 1$ dengan $\angle 2$ dan $\angle 3$ dengan $\angle 4$. Adapun pasangan sudut yang dibentuk tersebut mempunyai besaryang sama atau kongruen, yang dibuktikan pada teorema berikut.

***Teorema* 3.1.1.** Sudut yang bertolak belakang adalah *kongruen*.

***Bukti*:** Perhatikan gambar 3.1.5, akan dibuktikan $\angle 1 \cong \angle 2$. Karena $\angle 1$dan $\angle 3$ serta $\angle 2$ dan $\angle 3$ adalah sudut pelurus, maka

$m\angle 1 + m\angle 3 = 180^0$
…(3.1.1)

$m\angle 2 + m\angle 3 = 180^0$
…(3.1.2)

Dari persamaan (3.1.1) dan (3.1.2) diperoleh

$m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$

$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 - m\angle 3$

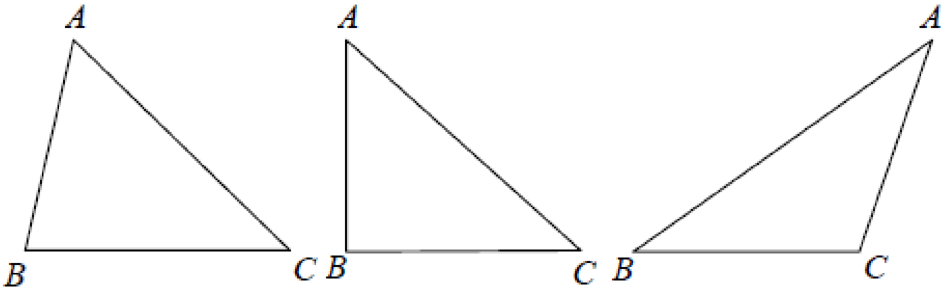
$m\angle 1 = m\angle 2$

Jadi terbukti $\angle 1 \cong \angle 2$ ▼

3.2 *Segitiga*

Segitiga merupakan suatu bangun datar yang mempunyai tiga buah sisi dan tiga buah sudut. Pada sub bab ini akan dibahas mengenai pengertian dari segitiga, luas segitiga, dan aturan sinus.

***Definisi* 3.2.1** Misalkan *A*, *B*, dan *C* adalah titik-titik yang tak segaris, sehingga gabungan dari segmen *AB* , *AC* , dan *BC* disebut *segitiga*, dan dinotasikan dengan ΔABC.

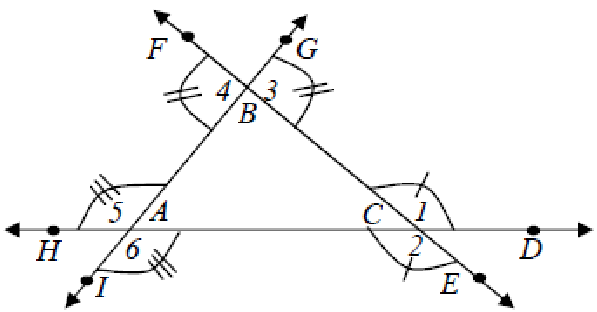


Gambar 3.2.1.

Perhatikan gambar 3.2.1, titik-titik A, B, dan C disebut puncak dan segmen garis AB , AC , dan BC disebut sisi. Setiap ΔABC mempunyai tiga sudut, yaitu $\angle BAC$, $\angle ABC$, dan $\angle ACB$, atau bisa ditulis dengan $\angle A$, $\angle B$, dan $\angle C$.

Pada setiap segitiga mempunyai sudut luar dan sudut jauh yang masingmasing disebut dengan sudut *exterior* dan sudut *remote interior*.

Perhatikan gambar 3.2.2, terdapat 6 buah sudut *exterior* dari ΔABC, yaitu $\angle BCD$, $\angle ACE$, $\angle CBG$, $\angle ABF$, $\angle BAH$, dan $\angle CAI$. Selain itu pada ΔABC juga mempunyai sudut *remote interior* yaitu $\angle A$ dan $\angle B$ yang merupakan sudut *remote interior* dari $\angle BCD$ dan $\angle ACE$, $\angle A$ dan $\angle C$ yang merupakan sudut *remote interior* dari$\angle CBG$ dan $\angle ABF$, dan $\angle B$ dan $\angle C$ yang merupakan sudut *remote interior* dari $\angle BAH$ dan $\angle CAI$. Pada teorema berikut akan dinyatakan bahwa besar sudut *exterior* lebih besar dari pada sudut *remote interior*nya.



Gambar 3.2.2

Teorema **3.2.1.** Besar sudut *exterior* dari sebuah segitiga adalah lebih besar dari pada tiap-tiap sudut *remote interior* nya.

***Bukti*:** Perhatikan gambar 3.2.2, Akan dibuktikan $\angle BCD > \angle A$. Karena $\angle ACB$ dan $\angle BCD$ membentuk pasangan linier, maka diperoleh bahwa

$\angle ACB$ dan $\angle BCD$ adalah sudut pelurus, sehingga

$$m\angle ACB + m\angle BCD = 180^0 \qquad \ldots(3.2.1)$$

Jumlah sudut dalam dari ΔABC adalah

$$m\angle A + m\angle B + m\angle ACB = 180^0 \qquad \ldots(3.2.2)$$

Dari persamaan (3.2.1) dan (3.2.2) diperoleh

$$m\angle ACB + m\angle BCD = m\angle A + m\angle B + m\angle ACB$$

$$m\angle BCD = m\angle A + m\angle B + m\angle ACB - m\angle ACB$$

$$m\angle BCD - m\angle A = m\angle B \qquad \ldots(2.2.3)$$

Dari persamaan (3.2.3), karena $m\angle B > 0$ sehingga diperoleh bahwa

$$m\angle BCD - m\angle A > 0$$

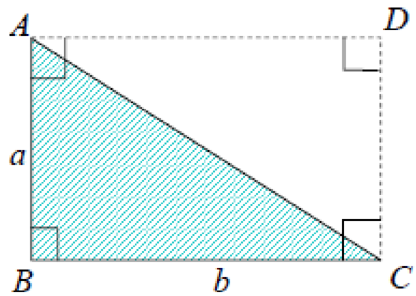
$$m\angle BCD > m\angle A \qquad \blacktriangledown$$

Seperti bangun datar lainnya, segitiga juga mempunyai ukuran luas, yang merupakan setengah dari perkalian sisi alas dan garis tingginya. Berikut ini akan diberikan beberapa teorema mengenai luas segitiga.

Teorema **3.2.2.** Luas segitiga siku-siku adalah setengah dari perkalian dua sisi yang mengapit sudut siku-sikunya.

Bukti **:** Perhatikan gambar 3.2.3 bagian yang diarsir pada ΔABC adalah luas dari segitiga siku-siku *ABC*. Akan dibuktikan $Luas\ \Delta ABC = \frac{1}{2}a.b$

Misalkan titik *D* merupakan titik luar dari ΔABC, sehingga membentuk persegi panjang *ABCD* dimana $\angle D$ juga merupakan sudut siku-siku, dan misalkan *a* dan *b* adalah sisi-sisi dari persegi panjang *ABCD* dan dinotasikan dengan □*ABCD* maka



Gambar 3.2.3

$L□ABCD = ab$ …(3.2.4)

$L□ABCD = L\Delta ABC + L\Delta ADC$ …(3.2.5)

Dari persamaan (3.2.4) dan (3.2.5) diperoleh

$L\Delta ABC + L\Delta ADC = ab$

$2.L□ABC = ab$

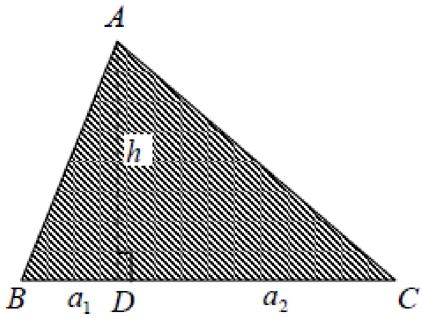
Jadi

$$\text{Luas } \Delta\text{ABC} = \frac{1}{2}a.b$$ ▼

Teorema **3.2.3.** Luas suatu segitiga adalah setengah dari perkalian panjang satu sisi alas dengan garis tinggi terhadap sisi tersebut.

Bukti **:** Perhatikan gambar 3.2.4, misalkan diberikan suatu ΔABC dengan garis tinggi *h* dari *A* ke *BC* dengan *D* adalah titik potongnya. Akan dibuktikan $L\Delta ABC = hBC$.

Misalkan $BD = a_1$ dan $CD = a_2$, sehingga $BC = a_1 + a_2$ adalah sisi alasnya. Perhatikan ΔADB dan ΔADC. Karena ΔADB dan ΔADC adalah segitiga siku-siku, yang menyebabkan



Gambar 3.2.4.

$$L\Delta ABC = L\Delta ADB + L\Delta ADC \ldots(3.2.6)$$

Dari Teorema 3.2.2, maka persamaan (3.2.6) menjadi

$$\text{Luas } \Delta\text{ABC} = \frac{1}{2}a_1.h + \frac{1}{2}a_2.h$$

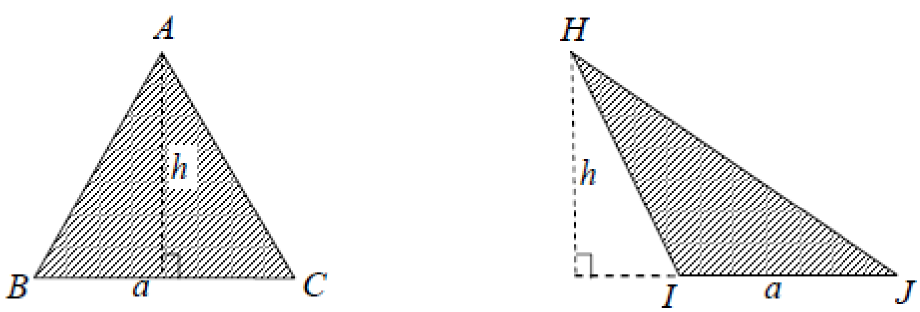
$$= \frac{1}{2}h\left(a_1 + a\ \right)$$

$$\text{Luas } \Delta\text{ABC} = \frac{1}{2}h.BC$$

Sebuah segitiga yang mempunyai bentuk yang berbeda memungkinkan saja mempunyai luas yang sama asalkan alas dan tingginya sama. Hal itu diungkapkan dalam bentuk teorema berikut ini

***Teorema* 3.2.4.** Jika dua buah segitiga mempunyai sisi alas yang sama dan garis tinggi yang sama, maka dua segitiga tersebut mempunyai luas yang sama.

***Bukti*:** Perhatikan gambar 3.2.5



Gambar 3.2.5.

Misalkan pada ΔABC dan ΔHIJ mempunyai sisi alas dan garis tinggi yang sama yaitu a dan h. Akan dibuktikan $L\Delta ABC = L\Delta HIJ$. Dari Teorema 3.2.3 diperoleh

$$Luas\ \Delta ABC = \frac{1}{2}ah. \tag{3.2.7}$$

$$Luas\ \Delta HIJ = \frac{1}{2}ah. \tag{3.2.8}$$

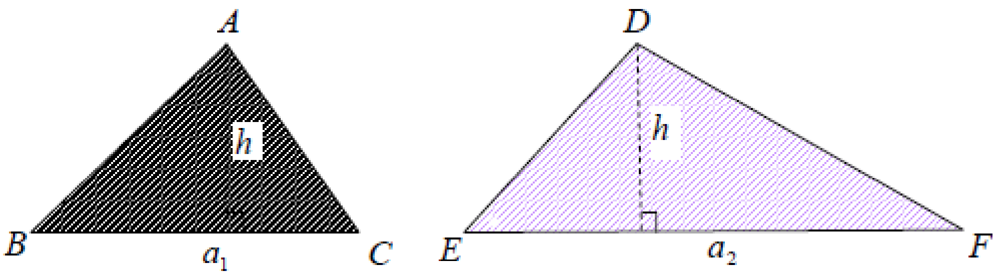
Maka dari persamaan (3.2.7) dan (3.2.8) diperoleh

$L\Delta ABC = L\Delta HIJ$ ▼

Selanjutnya akan dibuktikan perbandingan luas s dua buah segitiga dengan garis tinggi yang sama yang bergantung pada perbandingan alasnya.

***Teorema* 3.2.5.** Jika dua buah segitiga mempunyai garis tinggi yang sama maka perbandingan luas dua segitiga tersebut sama dengan perbandingan sisi alasnya.

***Bukti* :** Perhatikan gambar 3.2.7



Gambar 3.2.7.

Pada ΔABC dan ΔDEF, misalkan sisi alas $BC = a_1$ dan $EF = a_2$, dan garis tinggi dari kedua segitiga adalah h, akan ditunjukkan

$$\frac{Luas\ \Delta ABC}{Luas\ \Delta DEF} = \frac{a_1}{a_2}$$

dari Teorema 3.2.3 diperoleh

$$Luas\ \Delta ABC = \frac{1}{2} a_1 h. \qquad \ldots(3.2.9)$$

$$Luas\ \Delta DEF = \frac{1}{2} a_2 h. \qquad \ldots(3.2.10)$$

Maka dari persamaan (3.2.9) dan (3.2.10) diperoleh

$$\frac{Luas\ \Delta ABC}{Luas\ \Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2} a_1 h}{\frac{1}{2} a_2 h}$$

$$\frac{Luas\ \Delta ABC}{Luas\ \Delta DEF} = \frac{a_1}{a_2} \qquad \blacktriangledown$$

Pada segitiga khususnya segitiga siku-siku mempunyai aturan sudut yang disebut dengan aturan sinus, berikut ini akan dijelaskan mengenai aturan sinus pada segitiga sembarang yang akan dijelaskan pada teorema berikut. Namun pada bab lingkaran juga akan diberikan teorema atruan sinus akan tetapi dengan hasil yang lebih lengkap yang terkait dengan nilai jari-jari lingkaran luar. Akan tetapi pada teorema berikut hanya diberikan aturan sinus yang sama seperti yang ada diberbagai buku sekolah menengah.

Teorema* 3.2.6. *Aturan Sinus, diberikan ΔABC, misalkan $a = BC$,$b = AC$, dan $c = AB$, maka

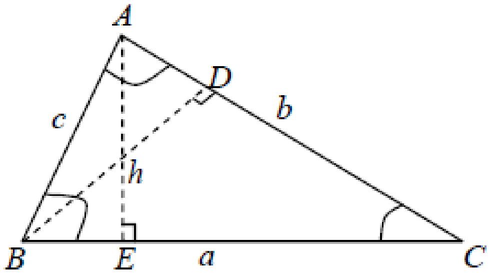
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

***Bukti* :** Perhatikan gambar 3.2.8

Pada ΔABC ditarik garis yang tegak lurus dari titik B

ke AC di titik D namakan h, karena $m\angle ADB = m\angle CDB = 90^0$, maka ΔADB dan ΔCDB adalah segitiga siku-siku.

Perhatikan ΔADB dan ΔCDB



Gambar 3.2.8.

$$Sin\ \ A = \frac{h}{c}\ \ \ dan\ \ Sin\ \ C = \frac{h}{a}$$

atau

$$c\,sin\ A = h \qquad dan\ \ \ sin\ C = h \qquad \ldots(3.2.11)$$

karena h merupakan garis tinggi yang sama, maka dari persamaan (3.2.11) diperoleh,

$$c\ sin\ A\ =\ a\ sin\ C \qquad \ldots(3.2.12)$$

kalikan kedua ruas dari persamaan (3.2.12) dengan $\frac{1}{ac}$ sehingga diperoleh

$$\frac{sin\ A}{a} = \frac{sin\,C}{c} \qquad \ldots(3.2.13)$$

Dengan cara yang sama, misalkan h adalah garis tinggi dari A ke BC maka diperoleh,

$$\frac{sin\ B}{b} = \frac{sin\,C}{c} \qquad \ldots(3.2.14)$$

Maka berdasarkan persamaan (3.2.13) dan (3.2.14) diperoleh bahwa,

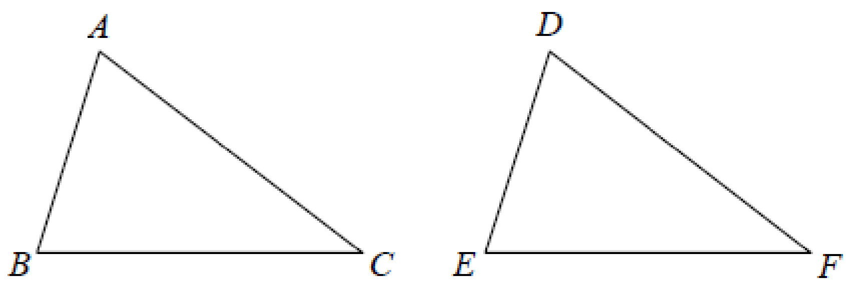
$$\frac{sin\ A}{a} = \frac{sinB}{b} = \frac{sin\,C}{c}$$

▼

3.3 *Kongruensi Antara Dua Segitiga.*

Sebelum masuk pada pembahasan dari kongruen antara dua segitiga, akan dijelaskan dulu mengenai korespondensi. Korespondensi antara dua segitiga adalah pemasangan satu-satu antara sisi dan sudut yang bersesuaian dari segitiga satu ke segitiga yang lainnya. Sebagai contoh misalkan diberikan korespondensi antara titik sudut ΔABC dengan ΔDEF yang ditulis $ABC \leftrightarrow DEF$.

Perhatikan gambar 3.3.1, ΔABC dan ΔDEF adalah pemasangan satu-satu dari titik -titik sudut kedua segitiga tersebut, yaitu $\angle A \leftrightarrow \angle D$, $\angle B \leftrightarrow \angle E$, $\angle C \leftrightarrow \angle F$ dan $AB \leftrightarrow DE$, $AC \leftrightarrow DF$, $BC \leftrightarrow EF$, sehingga dikatakan ΔABC berkorespondensi dengan ΔDEF.



Gambar 3.3.1.

***Definisi* 3.3.1.** Diberikan korespondensi antara dua segitiga. Apabila setiap pasang sisi yang berkorespondensi sama panjang, dan setiap pasang sudut yang berkorespondensi sama besar sehingga korespondensi kedua segitiga tersebut dikatakan *kongruen*.

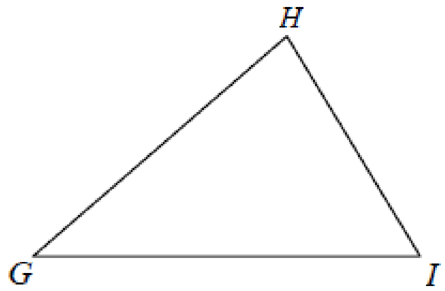
Berikut ini akan dijelaskan mengenai pengertian *include*, yaitu sebagai syarat dari dua segitiga dikatakan kongruen, yang dijelaskan pada definisi berikut ini.

***Definisi* 3.3.2.** Sebuah sisi segitiga dikatakan *included* dengan sudutsudutnya adalah jika puncak-puncaknya adalah titik akhir dari segmen garis tersebut.

Sebuah sudut segitiga dikatakan *included* dengan sisi-sisinya adalah jika sudut tersebut berada pada sisi-sisi yang mengapitnya, sebagai contoh:

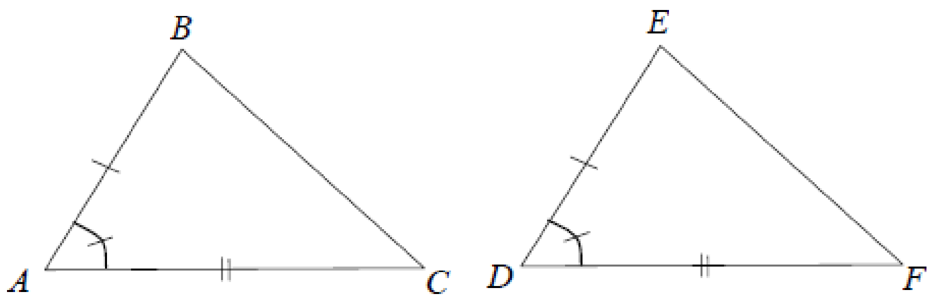
Perhatikan gambar 3.3.2, pada ΔGHI, GI *included* dengan $\angle G$ dan $\angle I$, dan $\angle G$ *included* dengan GH dan GI .

Dalam kongruensi terdapat beberapa kondisi yang menyatakan bahwa dua segitiga dikatakan kongruen berdasarkan korespondensi sisi dan sudut, yang dinyatakan dalam postulat dan teorema berikut



Gambar 3.3.2.

***Postulat* 3.3.1.** Setiap korespondensi S-Sd-S (sisi-sudut-sisi) adalah kongruen.

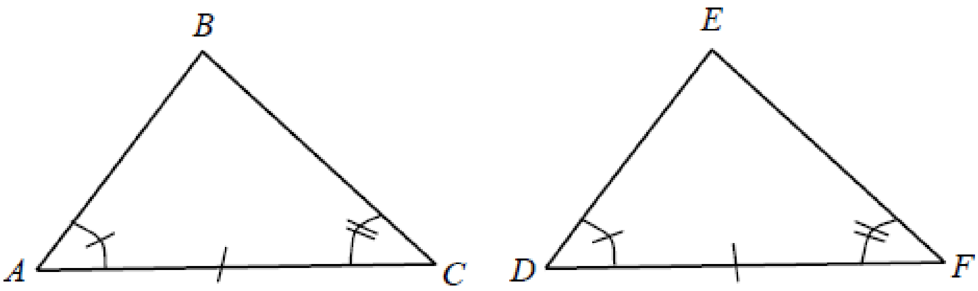


Gambar 3.3.3.

Perhatikan gambar 3.3.3, dua sisi dan satu sudut dari kedua segitiga tersebut adalah kongruen yaitu, $AB \cong DE$, $\angle A \cong \angle D$, dan $AC \cong DF$, sehingga $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

***Postulat* 3.3.2.** Setiap korespondensi Sd-S-Sd (sudut-sisi-sudut) adalah kongruen.

Perhatikan gambar 3.3.4, dua sisi dan satu sudut dari kedua segitiga tersebut adalah kongruen yaitu, $\angle A \cong \angle D$, dan $AC \cong DF$, $\angle C \cong \angle F$, sehingga $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



Gambar 3.3.4.

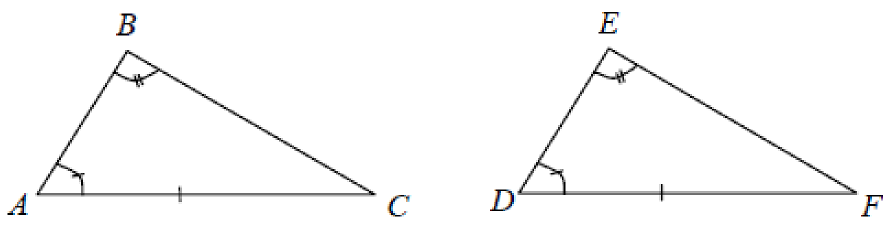
Teorema* 3.3.1.** Setiap korespondensi ***S-Sd-Sd (sisi-sudut-sudut) adalah kongruen.

***Bukti*:** Perhatikan ΔABC dan ΔDEF pada gambar 3.3.5.

$\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ dan $AC \cong DF$ maka $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Akan dibuktikan $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Untuk membuktikannya ada tiga kemungkinan untuk AB dan DE, yaitu:

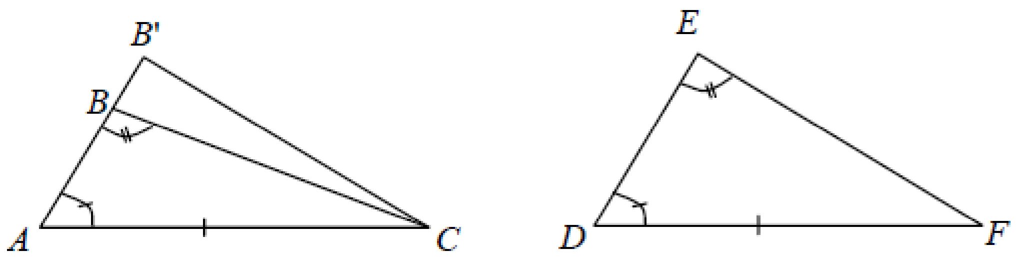
1. $AB = DE$

   Maka diperoleh $AB \cong DE$, $\angle A \cong \angle D$, dan $AC \cong DF$, sehingga dari postulat 2.3.1 kongruensi S-Sd-S diperoleh $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



Gambar 3.3.5.

2. $AB < DE$



Gambar 3.3.6.

Perhatikan ΔABC dan ΔDEF pada gambar 3.3.6, pada ΔABC, misalkan B' adalah titik pada AB sehingga $AB' = DE$, maka dari Postulat S-Sd-S diperoleh $\Delta A\,B'C \cong \Delta DEF$. Oleh sebab itu $\angle AB'C \cong \angle DEF$. Karena diketahui bahwa $\angle ABC \cong \angle DEF$, maka $\angle ABC \cong \angle AB'C$, namun hal tersebut tak mungkin, sebab dari $\angle ABC$ adalah merupakan sudut *exterior* dari $\Delta BB'C$, sehingga dari Teorema 3.2.1 diperoleh $\angle ABC \cong \angle AB'C$. Jadi kemungkinan 2 tak terpenuhi.

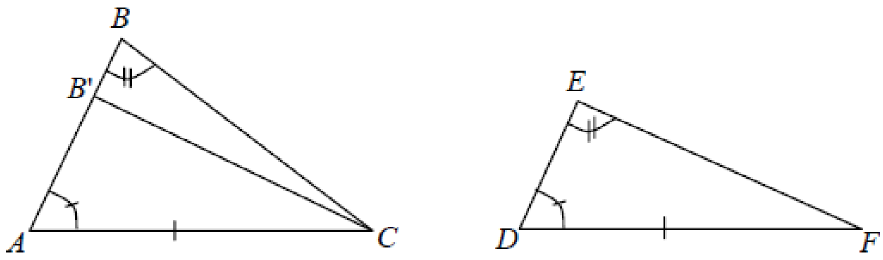
3. $AB > DE$.

Perhatikan ΔABC dan ΔDEF pada gambar 3.3.9, sama halnya dengan bukti 2 bahwa

dari posulat S-Sd-S diperoleh $\Delta A\,B'C \cong \Delta DEF$. Oleh sebab itu $\angle AB'C \cong \angle DEF$, dan karena diketahui $\angle ABC \cong \angle DEF$ maka $\cong ABC \cong \angle AB'C$. Hal ini juga tak mungkin sebab $\angle AB'C$ adalah sudut *exterior* dari $\Delta B'BC$ sehingga $\angle AB'C > \angle ABC$. Jadi kemungkinan 3 juga tak terpenuhi.

Karena hanya kemungkinan 1 yang dipenuhi, jadi haruslah $AB = DE$ sehingga diperoleh bahwa $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Jadi terbukti bahwa korespondensi S-Sd-Sd adalah kongruen. ▼



Gambar 3.3.9.

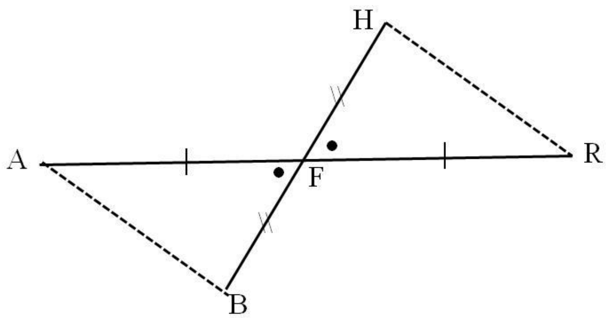
***Teladan* 3.3.1**. diberikan *AR* dan *BH* berpotongan di titik *F* seperti pada gambar 3.3.10. Tunjukkan $AB \cong RH$.

Penyelesaian : Perhatikan langkah berikut

1. $AF = RF$
2. $FB = BH$
3. $\angle AFB = \angle RFH$
4. $\Delta AFB \cong \Delta\ RFH$

maka

5. $AB \cong RH$



gambar 3.3.10

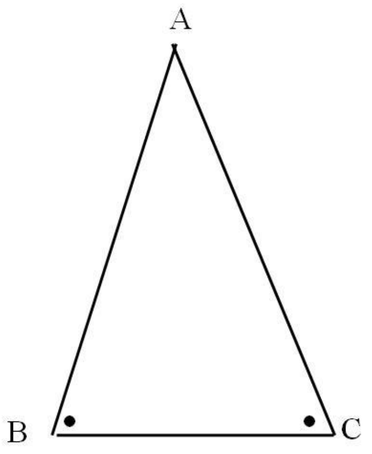
Teladan 3.3.2. Misalkan dua sudut dari suatu segitiga adalah sama, tunjukkan bahwa kedua sisi di depan sudut yang sama tersebut adalah konruen.

Penyelesaian : Diberikan ΔABC, jika $\angle B \cong \angle C$, akan ditunjukkan $AB = AC$.

$\angle B \cong \angle C$, $BC \cong CB$ dan $\angle C \cong \angle B$, maka berdasarkan sd-s-sd dibeperoleh :

$\Delta\, ABC \cong \Delta ACB$

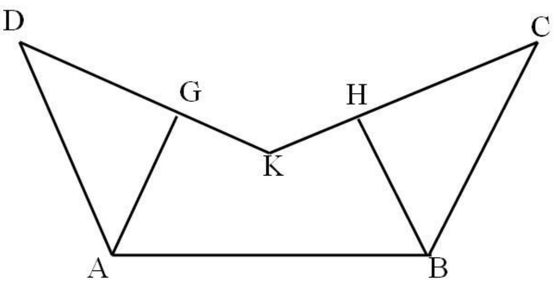
sehingga $AB = AC$



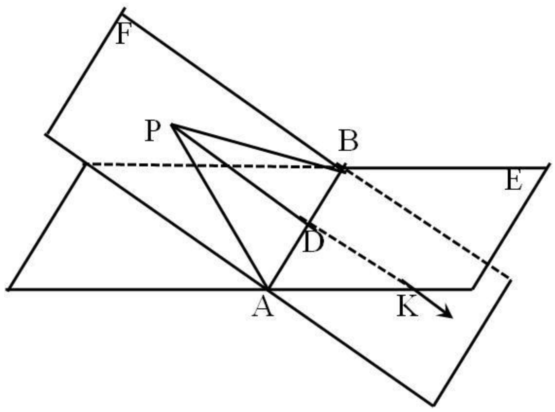
gambar 3.3.11

***Soal Latihan* 4**.

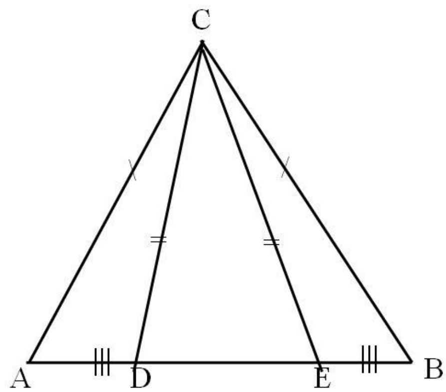
1. Tunjukan bahwa jika ΔABC sama sisi, maka ketiga sudutnya sama besar
2. Jika segmen AE dan DF berpotongan di titik P. Jika P merupakan bisektor dari kedua garis tersebut tunjukkan bahwa $\Delta PDA \cong \Delta\, PFE$
3. Diberikan segmen garis RS sedangkan T dan U berada pada sisi yang bersebelahan terhadap garis RS sehingga $TR = UR$, $TS = US$ dan $UR < US$. Tunjukkan bahwa $\angle T = \angle U$
4. Perhatikan gambar disebelah, jika $DG = CH$, $\angle$D = $\angle$C, $AG \perp DK$, $BH \perp CK$, tunjukkan bahwa $AD = BC$.



5. Diberikan 4 buah titik A, B, C dan D, dengan A-E-D serta A-D-C adalah kolinear, B adalah titik yang tidak berada pada sisi AC sehingga $AB = CB$, $EB = DB$ dan $AE = CD$. Tunjukkan bahwa $\angle ABE \cong \angle DBC$
6. Diberikan AC = BC dan $\angle$ CAE $\cong$ $\angle$CBD, tunjukkan bahwa ΔACE $\cong$ ΔBCD
7. MN dan PQ berpotongan dititik O, dengan M-O-N dan P-O-Q kolinear. S dan T berada pada interior $\angle$QON, sehingga $\angle TOQ \cong \angle TON$ dan $\angle SOQ \cong \angle SON$. Jika OR bisektor $\angle POM$. Tunjukkan bahwa R-S-T kolinear.
8. Perhatikan gambar disebelah, bidang ***E*** dan ***F*** berpotongan di garis AB, PK berada di bidang F dan memotong AB di titik D. jika $PA = PB$, $\angle PAB \cong \angle PBA$, dan D adalah titik tengah dari AB. Tunjukkan bahwa PK bisektor dari $\angle APB$.

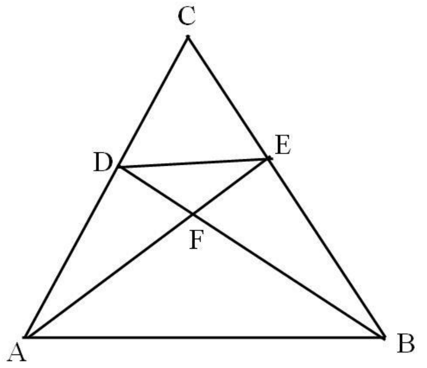


9. Pada gambar disebelah $AC = BC$, $DC = EC$ dan $AD = BE$, tunjukkan bahwa $\angle ACE \cong \angle BCD$.

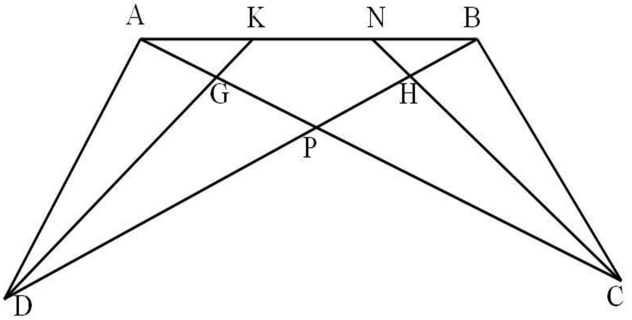


10. *). Jika BQ adalah bisektor PA di R, tapi $BQ \neq PA$, B dan Q letaknya bersebelahan terhadap sisi PA. S dan C titik pada PR dan AR, sehingga $RS = RC$, $BC \perp PA$ dan $QS \perp PA$, $\angle BAR \cong \angle QPR$. Tunjukkan bahwa PA bisektor dari BQ dan $\angle ABC \cong \angle PQS$.

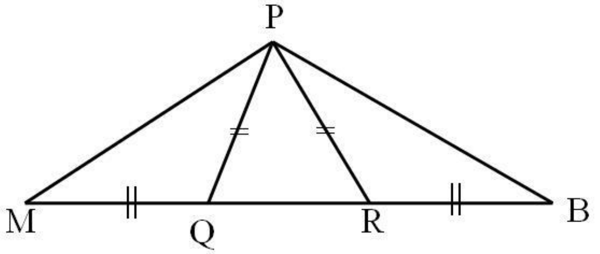
11. Jika pada gambar disebelah $DF = EF$ dan $\angle CDE = \angle CED$. Tunjukkan bahwa ΔAFB samakaki.



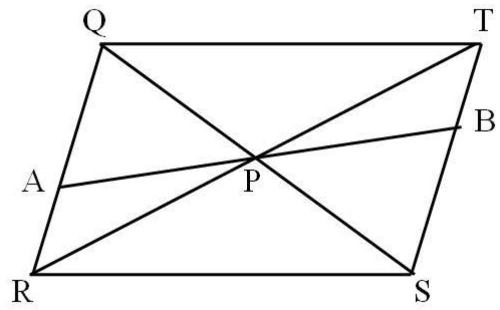
12. Pada gambar disebelahm $AD = BC$, $AC = BD$, $AK = BN$ dan $AG = BH$. Tunjukkan bahwa $KG = NH$



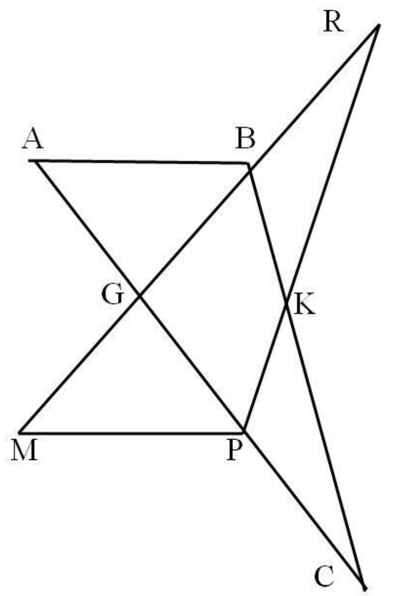
13. Jika pada gambar disebelah $MQ = PQ = PR =$ NR, tunjukkan bahwa Δ *MNP* sama kaki.



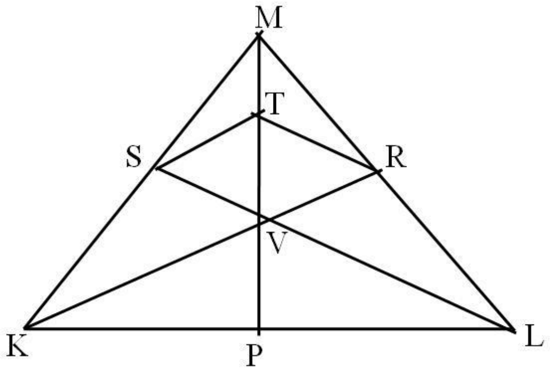
14. Jika pada gambar disebelah QS dan RT berpotongan di titik P dengan P merupakan bisektor dari QS dan RT. Tunjukkan bahwa $AP = BP$.



15. Jika pada gambar disebelah titik G dan B adalah trisektor MR (membagi MR atas 3 bagian yang sama panjang). Dan titik G dan P adalah trisektor AC, Jika $AG = BG$. Tunjukkan $\angle R \cong \angle C$.



16. Diberikan ΔKVL yang sama kaki (dengan $VK = VL$), M-V-P kolinear dengan MP bisektor $\angle KML$ dan $\angle KVL$. Buktikan $ST = RT$.



17. *). Diberikan $\angle HRE$ dengan $RH = RE$, titik M dan K berada pada sisi $\angle HRE$ sehingga R-H-M dan R-E-K kolinear. EM dan HK berpotongan di titik T. $\angle HRT \cong \angle ERT$. Tunjukkan bahwa $\Delta MTH \cong \Delta KTE$.

3.4 *Kesebangunan Antara Dua Segitiga*

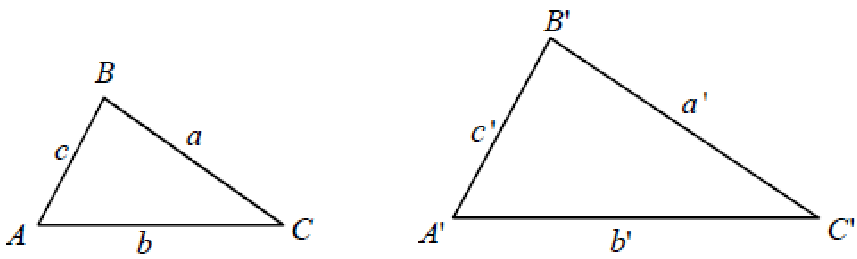
Pada bagian ini dibahas mengenai pengertian dari proporsional sisi, kesebangunan antara dua segitiga, dan beberapa teorema kesebangunan.

***Definisi* 3.4.1.** diberikan dua buah barisan $a, b, c, \ldots$ dan $p, q, r, \ldots$ dari anggota bilangan positif, kedua barisan tersebut dikatakan *proporsional* apabila ditulis dalam bentuk

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} \qquad \ldots(3.4.1)$$

Sekarang, jika dua barisan tersebut adalah merupakan suatu nilai dari sisisisi dari dua buah segitiga yang berkorespondensi dan ditulis dalam bentukpersamaan (3.4.1), maka dapat dikatakan bahwa kedua segitiga tersebut mempunyai sisi-sisi yang proporsional. Syarat dua segitiga dikatakan sebangun akan dijelaskan pada pembahasan berikut.

***Definisi* 3.4.2.** Diberikan sebuah korespondensi antara dua segitiga, apabila sudut-sudut yang berkorespondensi kongruen, dan sisi-sisi yang berkorespondensi proporsional, maka korespondensinya dikatakan *kesebangunan*, dan kedua segitiga tersebut dikatakan sebangun.



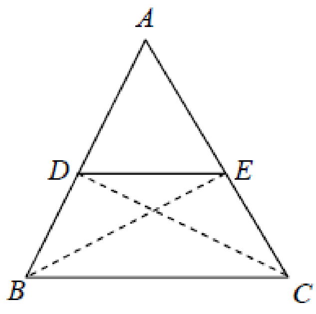
Gambar 3.4.1

Perhatikan gambar 3.4.1, diberikan korespondensi antara ΔABC dan $\Delta\, A'B'C'$. Jika $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$ dan $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, maka korespondensi $ABC \leftrightarrow A'B'C'$ adalah sebangun, dan ditulis $\Delta ABC \sim A'B'C'$.

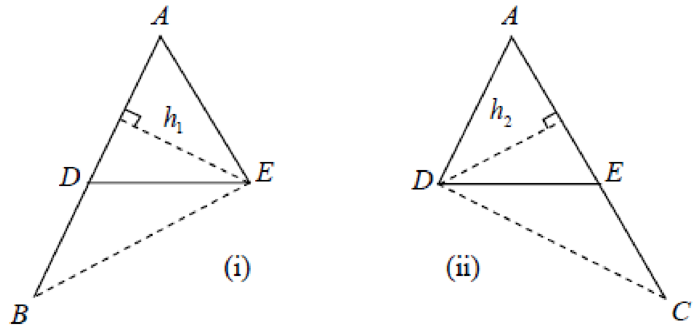
Untuk membuktikan Teorema kesebangunan digunakan beberapa teorema mengenai proporsional sisi dan kesejajaran berikut.

***Teorema* 3.4.1.** Diberikan ΔABC, misalkan titik D di AB dan titik E di AC sehingga DE sejajar BC , maka

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$



Gambar 3.4.2.



Gambar 3.4.3.

Bukti **:** Perhatikan gambar 3.4.2, dari gambar diperoleh seperti pada gambar 3.4.3

1. Akan ditentukan perbandingan *BD* dan *AD*.

Perhatikan gambar 3.4.3 (i), pada ΔADE dan ΔBDE, misalkan *AD* dan *BD* sebagai sisi alas dan ΔADE dan ΔBDE mempunyai garis tinggi yang sama yaitu h_1 , berdasarkan Teorema 3.2.5, diperoleh

$$\frac{L\Delta ADE}{L\Delta BDE} = \frac{BD}{AD} \qquad \ldots(3.4.2)$$

Dengan cara yang sama, perhatikan gambar 3.4.3 (ii). Pada ΔADE dan ΔCDE, misalkan *AE* dan *CE* sebagai sisi alas. Karena ΔADE dan ΔCDE mempunyai garis tinggi yang sama yaitu 2 h , maka diperoleh

$$\frac{L\Delta CDE}{L\Delta ADE} = \frac{CE}{AE} \qquad \ldots(3.4.3)$$

2. Akan ditentukan luas ΔADE dan ΔCDE.

Perhatikan ΔADE dan ΔCDE, segitiga tersebut mempunyai sisi alas yang sama dan mempunyai garis tinggi yang sama, karena $DE \,//\, BC$, maka dari Teorema 3.2.4

$$L\Delta BDE = L\Delta CDE \qquad \ldots(3.4.4)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.4.2) dan (3.4.3) ke persamaan (3.4.4) diperoleh

$$\frac{BD}{AD}=\frac{CE}{AE}$$

$$\frac{BD}{AD}+1=\frac{CE}{AE}+1$$

$$\frac{BD+AD}{AD}=\frac{CE+AE}{AE}$$

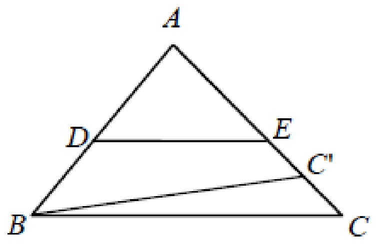
$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AE}$$ ▼

Teorema **3.4.2.** Jika sebuah garis memotong dua buah sisi dari segitiga dan perpotongannya adalah proporsional, maka garis tersebut sejajar dengan sisi yang ke tiga.

Bukti**:** Perhatikan gambar 3.4.4, diberikan ΔABC . Misalkan *D* adalah titik diantara *A* dan *B*, dan *E* titik diantara *A* dan *C*. Jika

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC'}{AE}$$

maka *DE* // *BC*.



Gambar 3.4.4.

Misalkan ada titik C' yang berada diantara *AC* dan $C' \neq C$ dan BC' adalah garis yang melalui *B* yang sejajar dengan *DE* dan memotong *AC* di C' sehingga dari Teorema 3.4.1 diperoleh

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC'}{AE} \qquad \ldots(3.4.5)$$

Karena diketahui $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$, maka dari persamaan (3.4.5) diperoleh

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AC'}{AE} \qquad \ldots(3.4.6)$$

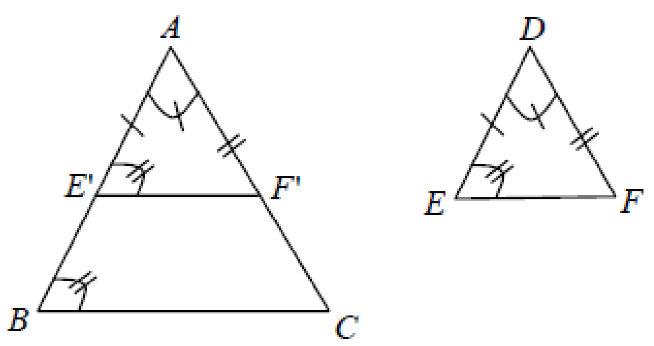
Dari persamaan (3.4.6) diperoleh bahwa $AC' = AC$ sehingga $C = C'$, hal ini tentunya juga tak mungkin sebab $C' = C$. Jadi artinya hanya terdapat satu-satunya garis yang sejajar dengan DE yaitu BC . ▼

Seperti pada kongruensi, dalam kesebangunan juga terdapat beberapa bentuk kesebangunan segitiga berdasarkan sisi dan sudutnya, yaitu kesebangunan Sd-Sd-Sd, Sd-Sd, dan S-Sd-S yang berturut-turut dijelaskan pada teorema berikut.

***Teorema* 3.4.3. *Kesebangunan Sd-Sd-Sd* (*sudut-sudut-sudut*)**

Diberikan sebuah korespondensi antara dua segitiga. Jika sudut-sudut yang berkorespondensi kongruen, maka korespondensinya adalah kesebangunan.

***Bukti*:** Perhatikan gambar 3.4.5, diberikan korespondensi $ABC \leftrightarrow DEF$ antara dua buah segitiga. Jika $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, dan $\angle C \cong \angle F$, maka $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



Gambar 3.4.5.

Akan ditunjukkan

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

Perhatikan ΔABC, ΔDEF , dan $\Delta AE'F'$ Misalkan E' adalah titik diantara AB dan F' titik diantara AC, sehingga $AE' = DE$ dan $AF' = DF$, sehingga berdasarkan Postulat S-

Sd-S diperoleh $\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$. Oleh karena itu diperoleh $\angle AE'F' = \angle E$, dan juga karena $\angle E = \angle B$, maka $\angle AE'F' = \angle B$.

(1) Jika $E' = B$, maka $\Delta AE'F'$ dan ΔABC merupakan segitiga yang sama. Pada kasus ini $\Delta ABC \cong \Delta\ DEF$, sehingga diperoleh bahwa:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

(2) Jika $E' = B$, maka EF dan BC sejajar, sehingga berdasarkan Teorema 3.4.1 diperoleh

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$$

Karena $AE' = DE$ dan $AF' = DF$, maka

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{AF}$$

sehingga $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ▼

***Akibat Teorema* 3.4.3. *Kesebangunan Sd-Sd* (*sudut-sudut*)**

Diberikan korespondensi antara dua segitiga. Jika dua pasang sudut yang berkorespondensi kongruen, maka korespondensinya adalah kesebangunan.

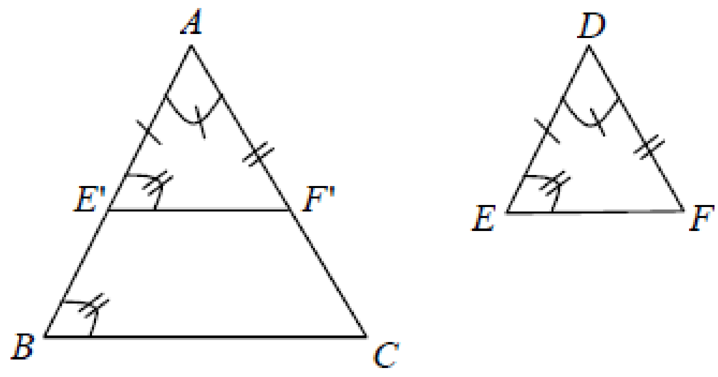
***Teorema* 3.4.4. *Kesebangunan S-Sd-S* (*sisi-sudut-sisi*)**

Diberikan korespondensi antara dua segitiga. Jika dua pasang sisi yang berkorespondensi proporsional dan sepasang sudut yang diapitnya kongruen, maka korespondensinya adalah kesebangunan.

***Bukti*:** Perhatikan gambar 3.4.6, diberikan korespondensi antara ΔABC dan ΔDEF , jika $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{AF}$ dan $\angle A \cong \angle D$, maka $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Perhatikan $\Delta ABC, \Delta DEF$, dan $\Delta AE'F'$. Misalkan E' adalah titik diantara AB dan F' titik diantara AC , sehingga $AE' = DE$ dan $AF' = DF$, sehingga berdasarkan S-Sd-S diperoleh

$$\Delta AE'F' \cong \Delta DEF \qquad \ldots(3.4.7)$$



Gambar 3.4.6.

Oleh sebab itu

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$$

Sehingga dari Teorema 3.4.2 diperoleh $E'F'$ sejajar dengan BC , dan mengakibatkan

$$\angle B \cong \angle AE'F'$$

Karena $\angle A \cong \angle D$ dan $\angle B \cong \angle AE'F'$, maka dari Akibat Teorema 3.4.3 diperoleh

$$\Delta ABC \sim \Delta AE'F' \qquad \ldots(3.4.8)$$

Karena (3.4.7) dan (3.4.8) maka diperoleh bahwa

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$ ▼

Pada teorema berikut ini akan akan dijelaskan mengenai perbandingan luas antara dua segitiga yang mempunyai sepasang sudut yang kongruen, yang juga merupakan salah satu alternatif yang digunakan untuk membuktikan Teorema Butterfly. Pembuktiannya menggunakan Akibat Teorema 3.4.3 Kesebangunan Sd-Sd (sudut-sudut).

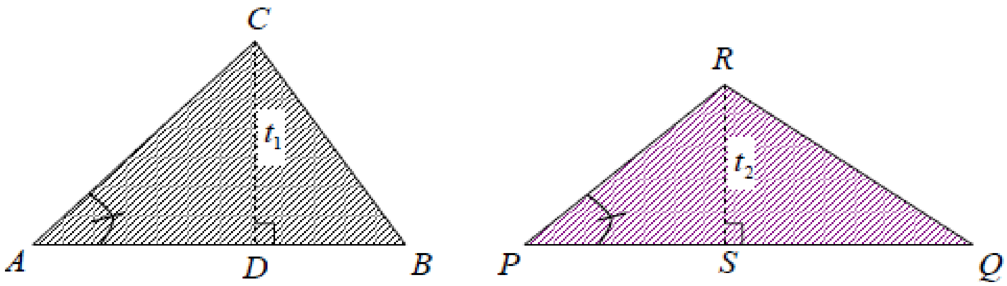
***Teorema* 3.4.5.** Jika dua buah segitiga mempunyai sepasang sudut yang sama besar, maka dua segitiga tersebut mempunyai perbandingan luas yang sama dengan perbandingan dari perkalian sisi-sisi yang mengapitnya.

Bukti: Perhatikan gambar 3.4.7, diberikan ΔABC dan ΔPQR dengan $\angle A \cong \angle P$. Akan dibuktikan

$$\frac{L\Delta ABC}{L\Delta PQR} = \frac{AB.AC}{PQ.PR}$$

Tarik garis $CD \perp AB$ dan $RS \perp PQ$, sehingga

$$m\angle ADC = m\angle PSR = 90^0 \qquad \ldots(3.4.9)$$



Gambar 3.4.7.

Sehingga dari persamaan (3.4.9) diperoleh

$$\angle ADC \cong \angle PSR$$

Karena $\angle A \cong \angle P$ dan $\angle ADC \cong \angle PSR$ maka dari Akibat Teorema 3.4.3 diperoleh

$$\Delta ADC \sim \Delta PSR$$

Sehingga dari Definisi 3.4.2 terdapat perbandingan sisi-sisi yang proporsional, yaitu

$$\frac{AC}{PR} = \frac{CD}{RS} = \frac{t_1}{t_2} \qquad \ldots(3.4.10)$$

Dan dari Teorema 3.2.3 diperoleh,

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2} AB.t_1 \qquad \ldots(3.4.11)$$

$$L\Delta PQR = \frac{1}{2} PQ.t_2 \qquad \ldots(3.4.12)$$

Perbandingan luas segitiga pada persamaan (3.4.11) dan (3.4.12) diperoleh

$$\frac{L\Delta ABC}{L\Delta PQR} = \frac{\frac{1}{2} AB.t_1}{\frac{1}{2} PQ.t_2}$$

$$\frac{L\Delta ABC}{L\Delta PQR} = \frac{AB.t_1}{PQ.t_2} \qquad \ldots(3.4.13)$$

Substitusi persamaan (3.4.13) ke persamaan (3..4.10) untuk t_1 dan t_2 diperoleh

$$\frac{L\Delta ABC}{L\Delta PQR} = \frac{AB.AC}{PQ.PR} \qquad \blacktriangledown$$

***Teorema* 3.4.6** : perbandingan dua buah segitiga yang sebangun adalah sama dengan kuadrat dari sepasang sisi yang seletak.

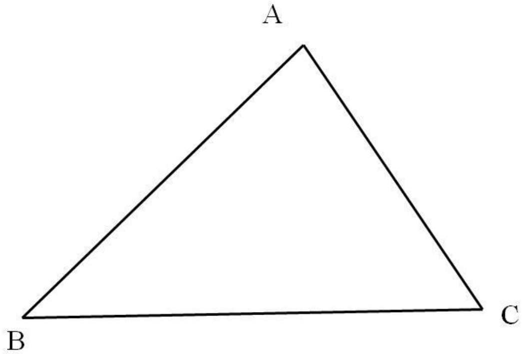
Bukti : Misalkan seperti pada gambar 2.3.8a dan 2.3.8b bahwa $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

Akan dibuktikan bahwa

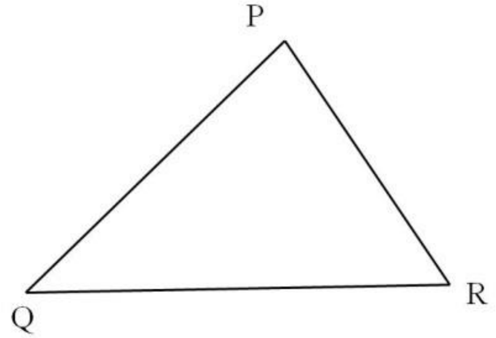
$$\frac{luas\ \Delta ABC}{Luas\ \Delta PQR} = \frac{(AB)^2}{(PQ)^2} = \frac{(BC)^2}{(QR)^2} = \frac{(AC)^2}{(PR)^2}$$

Dari kesamaan $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ diperoleh

$$\frac{luas\ \Delta ABC}{Luas\ \Delta PQR} = \frac{AB.AC}{PQ.PR} = \frac{AB.AB}{PQ.PQ} = \frac{(AB)^2}{(PQ)^2}$$



Gambar 3.4.8a



Gambar 3.4.8b

Dengan cara yang serupa akan dapat ditunjukkan bahwa

$$\frac{luas\ \Delta ABC}{Luas\ \Delta PQR} = \frac{(BC)^2}{(QR)^2}$$

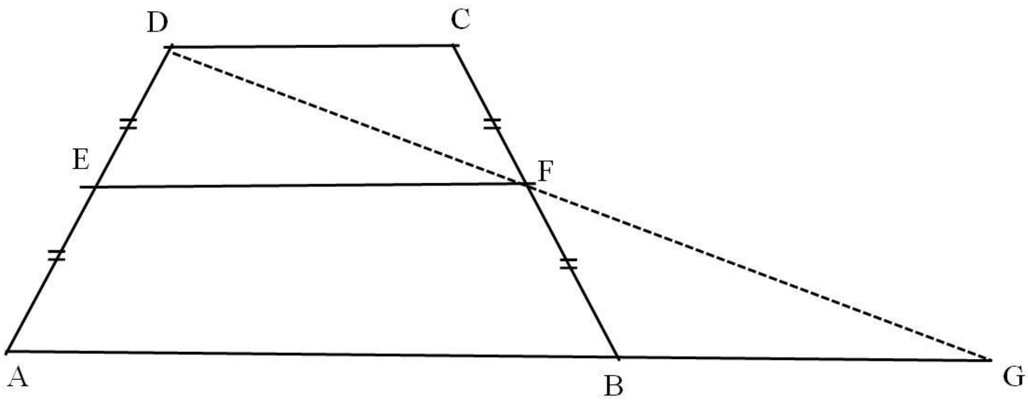
dan

$$\frac{luas\ \Delta ABC}{Luas\ \Delta PQR} = \frac{(AC)^2}{(PR)^2}$$

Berikut ini akan diberikan penerapan kesebangunan pada trapesium, yaitu bila pada sisi yang tidak sejajar kita buat titik tengahnya kemudian dihubungkan, maka akan ditunjukkan bahwa garis tadi tidak lain adalah sejajar dengan dua sisi sejajar pada trapesium tersebut yang dikontruksi dalam bentuk teorema berikut ini.

***Teorema* 3.4.7**. Garis yang menghubungkan pertengahan kaki-kaki suatu trapesium, sejajar dengan sisi-sisi sejajarnya dan panjangnya setengah dari jumlah sisi yang sejajar.

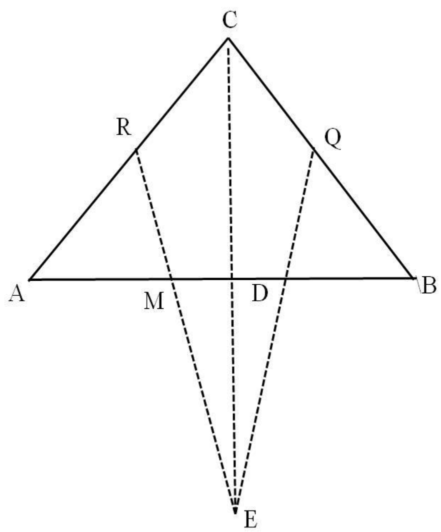
Bukti : Perhatikan gambar 3.4.9 di bawah ini. Misalkan trapesium *ABCD* dengan *AB* // *DC* kemudian *AE* = *ED* dan *BF* = FC, akan ditunjukkan bahwa $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$. untuk itu hubungkan titik *DF* sehingga memotong perpanjangan *AB* di titik *G*. maka akan diperoleh Δ*BGF* ≅Δ*CDF*, jadi *DC* = *BG* dan *DF* = *FG*. Dengan kata lain *EF* sejajar dengan setengah *AGD*, sehingga *EF* // *AG* dan *EF* = ½ *AG*. jadi *EF* // *AB* // *DC* dan $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$.



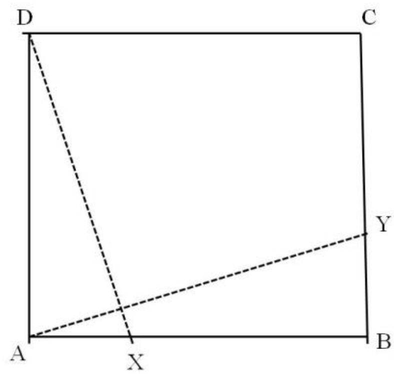
Gambar 3.4.9

***Soal Latihan* 5**

1. Jika □ *ABCD* merupakan trapesium samakaki, tunjukkan bahwa kedua diagonalnya sama panjang dan sudut alasnya sama besar.
2. Jika ΔABC samakaki dengan $AC = BC$. Titik Q dan R merupakan titik tengah AC dan BC. Garis berat CD diperpanjang sehingga $CD = DE$. Titik M dan N masing-masing adalah titik potong antara AB dengan ER dan QR (lihat gambar 3.4.10). Tunjukkan bahwa $CMEN$ suatu belah ketupat.



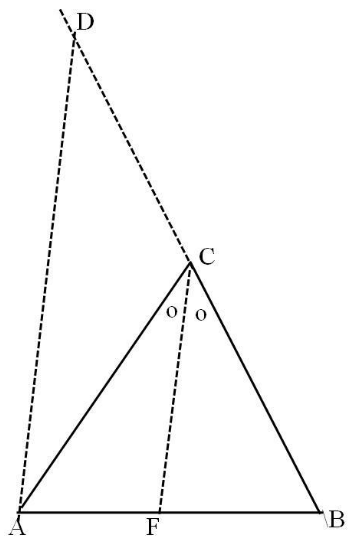
Gambar 3.4.10



gambar 3.4.11

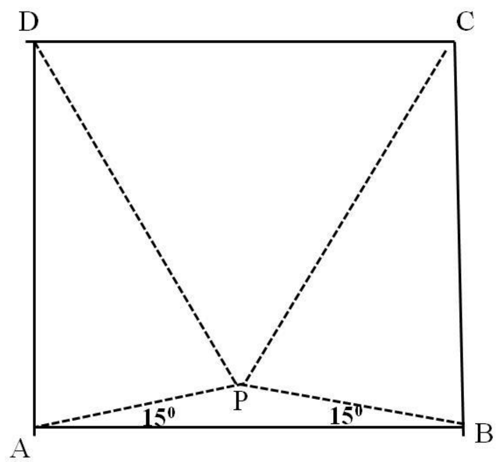
3. Diketahui $ABCD$ suatu persegi, titik X terletak pada AB dan Y terletak pada BC sehingga $DX = AY$. Buktikan $AX \perp AY$
4. Diketahui ΔABC, garis AD dan BE masing-masing garis tinggi. Buktikan bahwa :
   a. ΔADC sebangun dengan ΔBCE
   b. ΔDEC sebangun dengan ΔABC
   c. Jika CF juga garis tinggi, buktikan bahwa AD garis bagi $\angle FDE$
5. Sisi sejajar trapesium sama kaki adalah 6 cm dan 10 cm. Jika panjang diagonalnya adalah 12 cm. Hitunglah panjang potongan diagonal trapesium

6. Diketahui ΔABC dan CF merupakan garis bagi. Tarik garis AD sejajar CF sehingga memotong perpanjangan BC di D seperti gambar disebelah.
   a. Buktikan bahwa ΔBCF sebangun dengan ΔABD
   b. Buktikan bahwa $AF : BF = AC : BC$



gambar 3.4.12.

7. *). Pada ΔABC, garis CF merupakan garis bagi luar yang memotong perpanjangan AB di dekat A. Buktikan bahwa $FA : FB = AC : BC$
8. *). Perhatikan gambar 3.4.13. Diketahui $ABCD$ suatu persegi, dibuat segitiga ABP sehingga $\angle PAB = \angle PBA = 15^0$. Buktikan bahwa ΔCDP samasisi.



gambar 3.4.13.

9. *). Perhatikan gambar 3.4.15. Diketahui ΔABC. Melalui ketiga titik sudut A, B dan C, masing-masing ditarik garis yang tegak lurus terhadap sisi segitiga AB, BC dan CA, sehingga terbentuk segitiga yang baru. Jika DEF segitiga yang baru. Buktikan

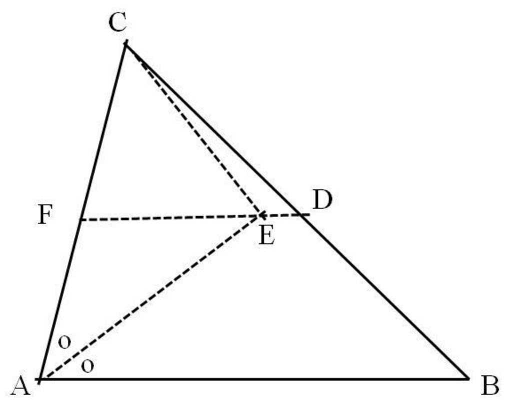
a. $L\Delta ABD = L\Delta BCE = L\Delta ACF$

b. $L\Delta ABD = \frac{2}{3}\ L\Delta ADE$

c. $L\Delta ACF = \frac{1}{3}\ L\Delta AEF$

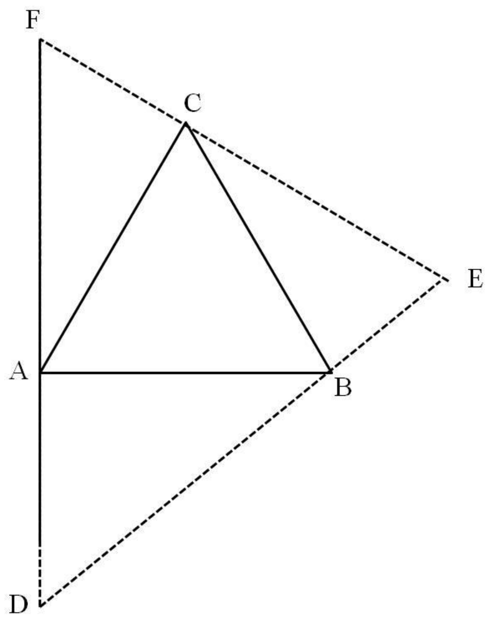
d. $L\Delta DEF = 3\ L\Delta ABC$

10. *) . Perhatikan gambar 3.4.14. Di dalam ΔABC, garis $CE \perp AE$, buktikan bahwa D membagi dua garis BC.



gambar 3.4.14

11. Diketahui ΔABC sebangun dengan ΔPQR. Jika $\frac{AB}{PQ} = k$, hitunglah $\frac{L\Delta ABC}{L\Delta PQR}$.

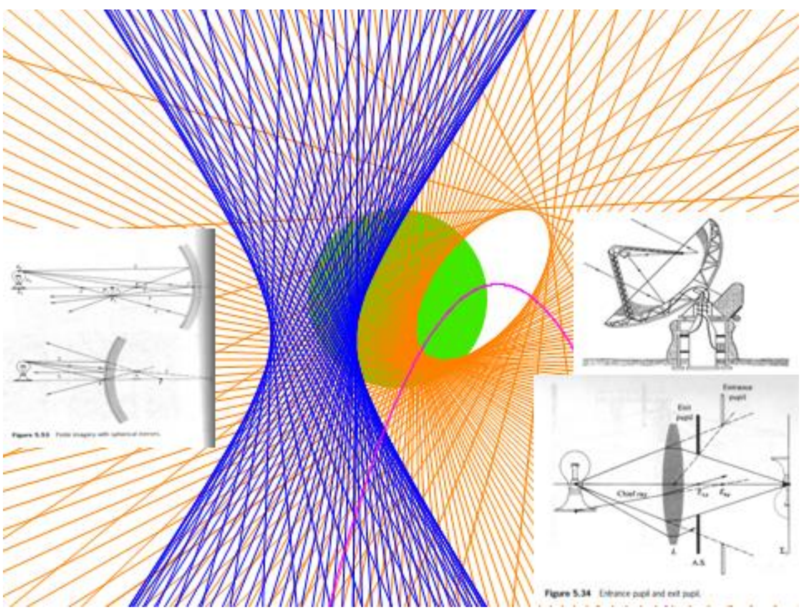


gambar 3.4.15

BAB IV

Irisan Kerucut

Mungkin tidak perlu dibahas lagi bagaimana banyaknya bentuk-bentuk irisan kerucut, di dalam hidup ini, seperti lingkaran, elips, parabola dan parabola, gambar di bawah ini sudah menginspirasikan kepada kita bagaimana pentingnya kita memahami konsep dari irisan kerucut tersebut.



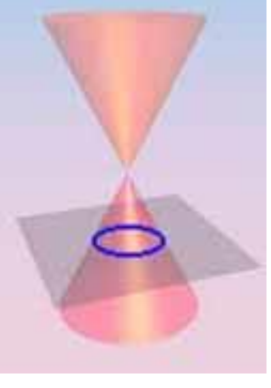
BAB

IV

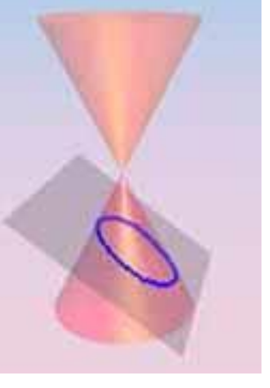
IRISAN KERUCUT

4.1. *Pengantar Irisan Kerucut*

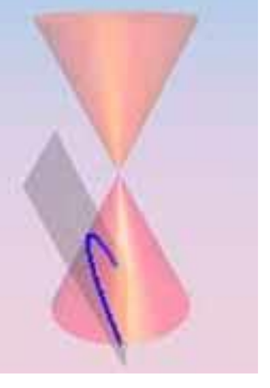
Irisan kerucut adalah irisan suatu bidang dengan sebuah kerucut, ada 5 bentuk yang dapat dihasilkan dari perpotongan suatu bidang dengan sebuah kerucut tersebut, yaitu Lingkaran, Elips, Parabola, Hyperbola dan Segitiga. Dalam bab ini hanya akan dibahas 3 jenis yaitu Elips, Parabola dan Hyperbola. Sedangkan lingkaran dan segitiga sudah dibahas pada bab terdahulu. Untuk itu perhatikan gambar di bawah ini



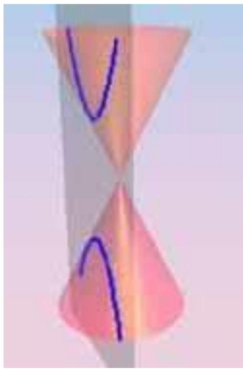
Gambar 4.1.a



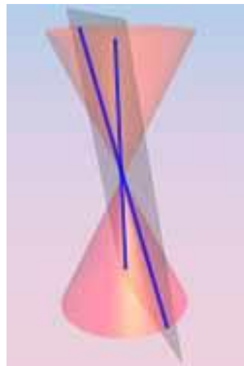
Gambar 4.1.b



Gambar 4.1.c



Gambar 4.1.d



gambar 4.1.e

Gambar 4.1.a merupakan perpotongan kerucut dengan bidang yang menghasilkan Lingkaran

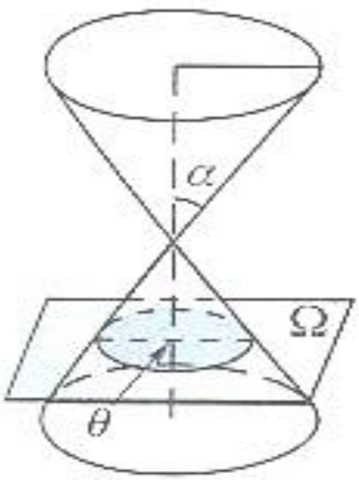
Gambar 4.1.b merupakan perpotongan kerucut dengan bidang yang menghasilkan Elips

Gambar 4.1.c merupakan perpotongan kerucut dengan bidang yang menghasilkan Parabola

Gambar 4.1.d merupakan perpotongan kerucut dengan bidang yang menghasilkan Hyperbola

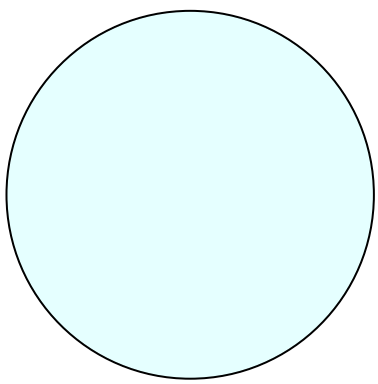
Gambar 4.1.e merupakan perpotongan kerucut dengan bidang yang menghasilkan Segitiga

Perhatikan gambar 4.1.2 berikut ini



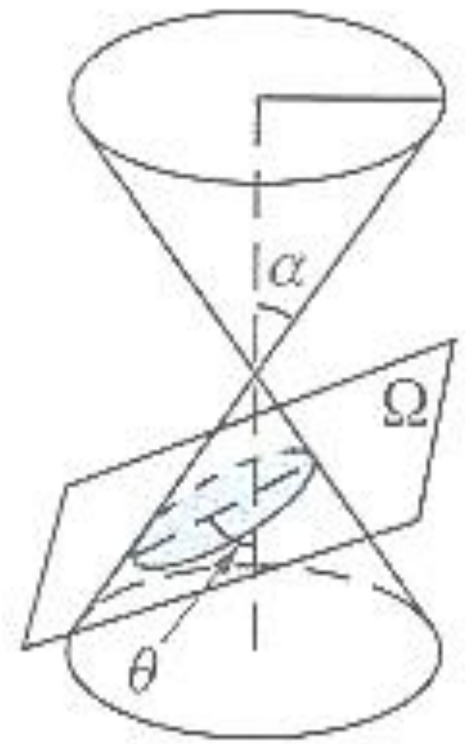
Gambar 4.1.2a

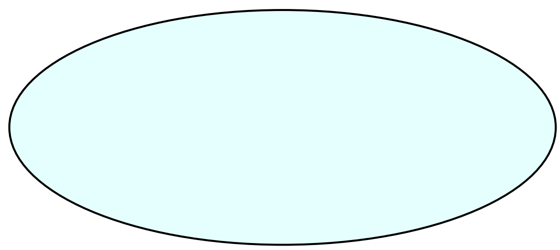
$\theta = \pi/2$



gambar 4.1.2b

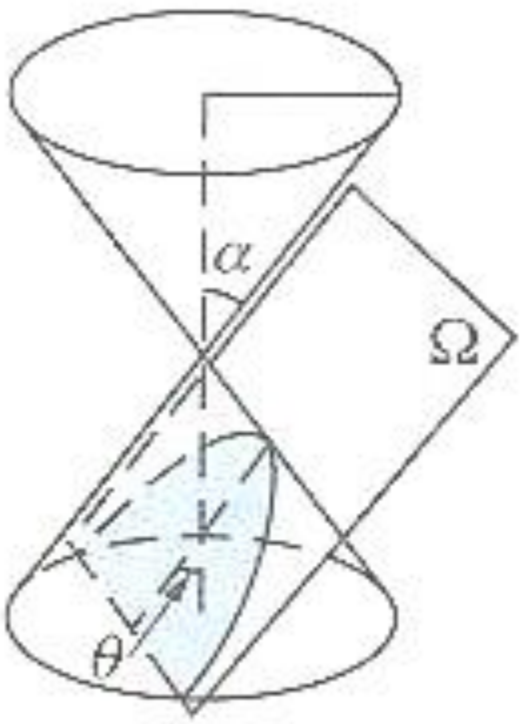
Misalkan kerucut di atas dipotong oleh sebuah bidang Ω, jika sudut andar sumbu symetri pada kerucut dengan dindingnya disebut α dan θ adalah sudut antara sumbu symetri kerucut dengan bidang Ω. Maka lingkaran akan terbentuk apabila sudut $\theta = \pi/2$. Artinya bidang Ω tegak lurus dengan sumbu symetri dari kerucut lihat gambar 4.1.2a dengan hasil seperti pada gambar 4.1.2b.





Gambar 4.1.3a $\alpha < \theta < \pi/2$ gambar 4.1.3b

Elips dihasilkan apabila perpotongan bidang Ω dengan sumby simetri dari kerucut menghasilkan sudut θ, dengan $\alpha < \theta < \pi/2$. Artinya bidang hanya memotong satu bagian dari kerucut yang ada, tapi tidak tegak lurus dengan sumbu symetri dan tidak sejajar dengan dinding dari kerucut tersebut perhatikan gambar 4.1.3a dengan hasil seperti pada gambar 4.1.3b.

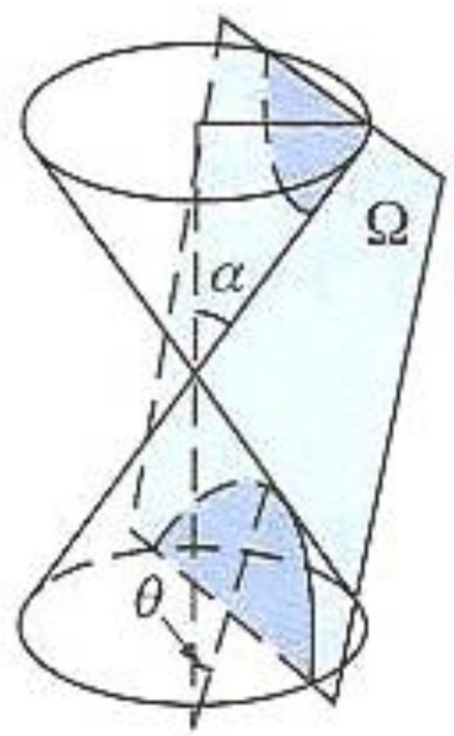


Gambar 4.1.4a $\theta = \alpha$ gambar 4.1.4b

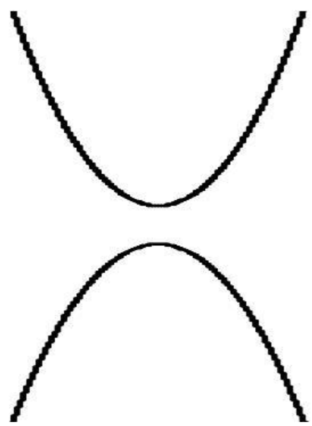
Parabola terjadi bila perpotongan bidang Ω dengan kerucut membentuk sudut $\theta = \alpha$, artinya bidang sejajar dengan dinding dari kerucut. Untuk jelasnya perhatikan gambar 4.1.4a dengan hasil seperti pada gambar 4.1.4b.

Hyperbola terbentuk bila perpotongan bidang Ω dengan kerucut membentuk sudut θ, dengan $0 \leq \theta < \alpha$. Artinya bidang Ω memotong kedua kerucut, tapi tidak tepat melalui titik pertemuan bersama kedua kerucut tersebut. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar 4.1.5a dengan hasil seperti pada gambar 4.1.5b.

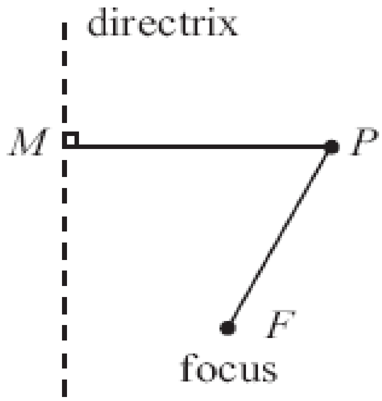
Misalkan diberikan suatu garis tetap yang disebut *direktrik* dan sebuat titik F yang disebut *Fokus*. Pada posisi lain berada titik *P*(x,*y*), perhatikan gambar 4.1.6a. Selanjutnya buat garis yang tegak lurus dari *P*(*x*,*y*) ke direktrik, katakan titik *M* adalah proyeksi *P* ke direktrik. Kemudian hubungkan titik *P*(*x*,*y*) ke titik fokus F.Jika titik *P*(*x*,*y*) posisinya berpindah-pindah. Permasalahannya adalah apa yang akan terjadi jika jarak yang dipeleh kelipatan dari yang lainnya. Misalkan perbadingan antara jarak *P* ke *M* dengan jarak *P* ke *F* merupakan suatu bilangan konstan, yang disebut dengan eletrisitas (*e*). jadi $e = \frac{PM}{PF}$



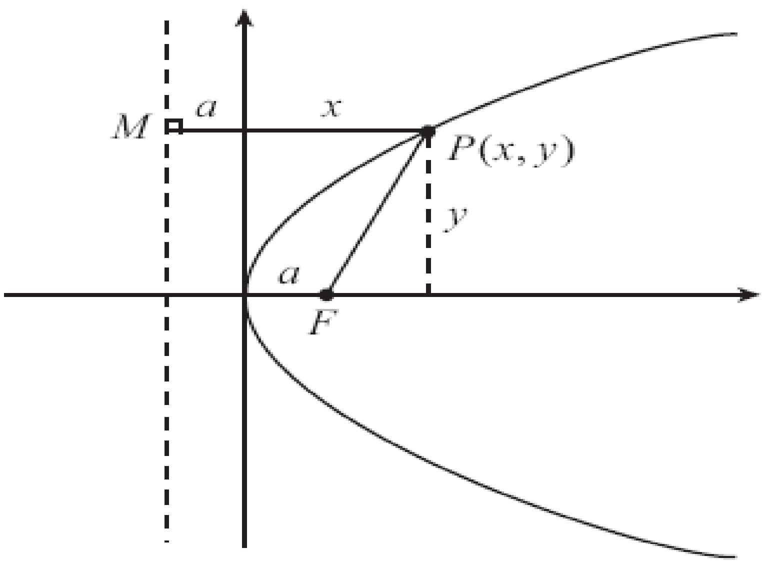
Gambar 4.1.5a $0 \leq \theta < \alpha$



gambar 4.1.5b



Gambar 4.1.6a



gambar 4.1.6b

Jadi jika e < 1, akan menghasilkan Elips

Jika e =1, akan menghasilkan Parabola, dan

Jika e > 1, akan menghasilkan Hyperbola.

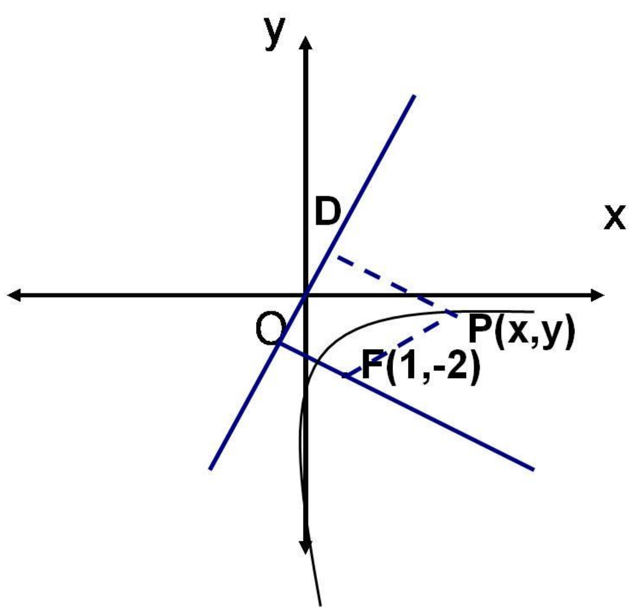
Kasus khusus akan menghasilkan Lingkaran jika e = 0.

***Teladan* 4.1.1**. Tentukan persamaan irisan kerucut yang mempunyai fokus di titik $F(1,-2)$ dengan $e = 1$ dan direktriknya adalah garis $2x - y = 0$.

Penyelesaian. Karena $e = 1$, maka irisan kerucut yang dihasilkan adalah parabola, arinya $PM = PF$, jadi

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \left|\frac{2x-y}{\sqrt{5}}\right|$$

Yang kalau disederhanakan akan menghasilkan $x^2 + 4y^2 - 4xy - 10x + 20y + 25 = 0$.
Yang kalau digambarkan seperti gambar 4.1.7.



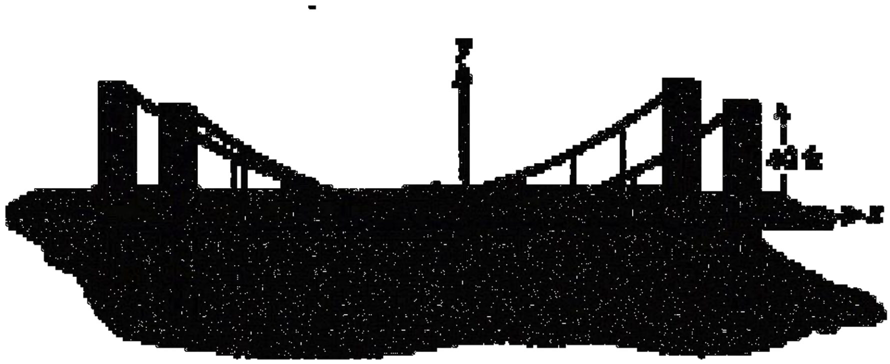
Gambar 4.1.7

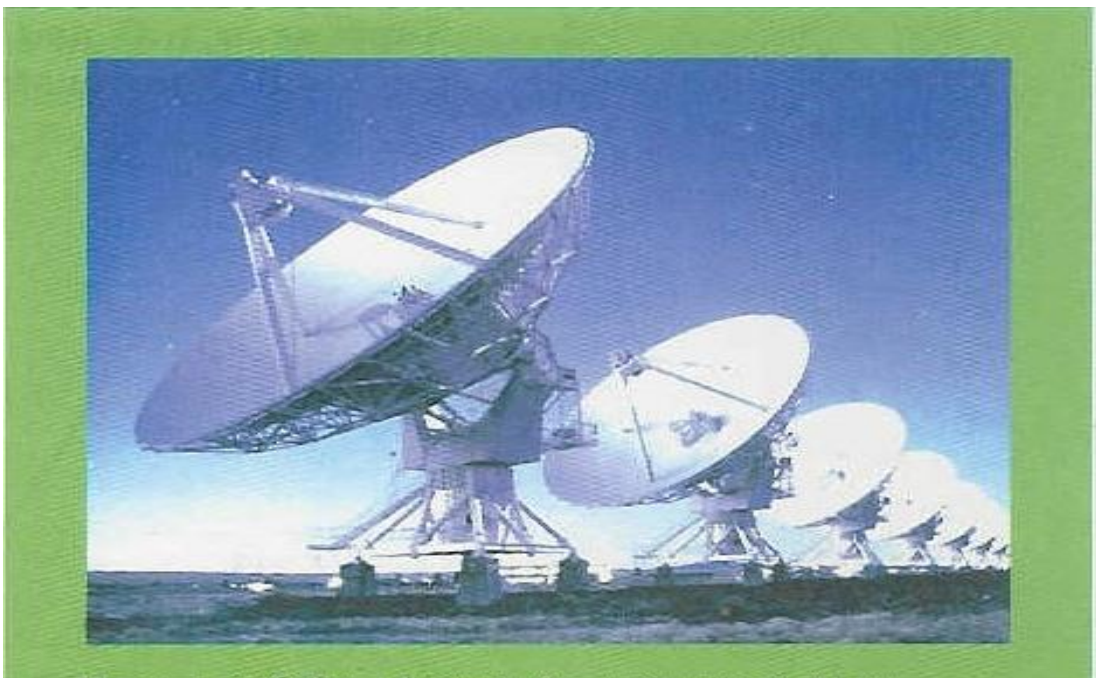
Soal Latihan 6.

Tentukan Persamaan Irisan kerucut yang memenuhi syarat berikut ini

1. Fokusnya di titik (-1,2) dan direktriknya di garis $x = 3$ dengan $e = 1$.
2. Fokusnya di titik (0,2) dan direktriknya di garis $y = 4$ dengan $e = ½$
3. Fokusnya di titik (0,0) dan direktriknya di garis $x = 3$ dengan $e = 2$.
4. Fokusnya di titik (1,-2) dan direktriknya di garis $2x – y = 0$ dengan $e = 1$.
5. Fokusnya di titik (3,0) dan direktriknya di garis $x = 5$ dengan $e = 1/3$.
6. Fokusnya di titik (-5,0) dan direktriknya di garis $x = 7$ dengan $e = 3/5$.
7. Fokusnya di titik (0,4) dan direktriknya di garis $y = -6$ dengan $e = 3/2$.
8. Fokusnya di titik (-3,2) dan direktriknya sumbu X dengan $e = 1$.
9. Fokusnya di titik (-5,-1) dan direktriknya di garis $2x + 3y - 6 = 0$ dengan $e = ½$.
10. Fokusnya di titik (-1,2) dan direktriknya di garis $3x + 4y + 12 = 0$ dengan $e = 3$.
11. Fokusnya di titik (0,0) dan direktriknya di garis $y = 3$ dengan $e = 1$.
12. Fokusnya di titik (2,,-3) dan direktriknya di garis $4x – 3y + 24$ dengan $e = 1$.

Perhatikan bentuk-bentuk irisan kerucut di bawah ini, hal ini banyak kita jumpai dalam berbagai aspek kehidupan, karena begitu banyaknya persoalan dalam hidup ini yang berkaitan dengan Parabola ini, maka sangat perlulah kita membahas dan mendalami berbagai konsep yang terkait dengan parabola ini.



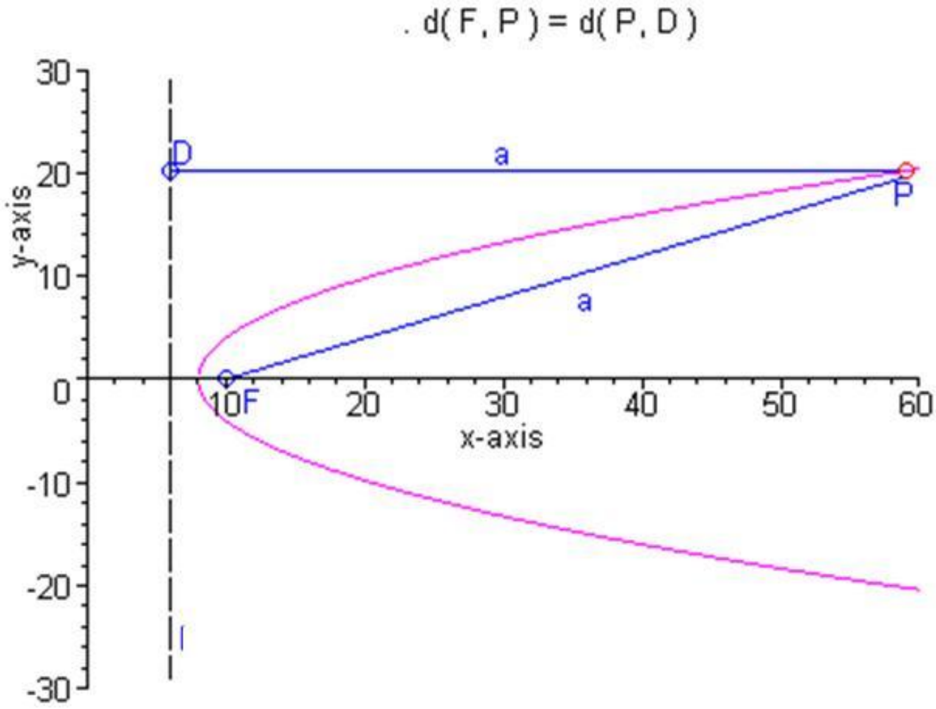


Because of the advance in communication technology, nowadays you can always see small scale satellite dishes of this kind in Hong Kong.

4.2. *Parabola*

4.2.1. *Parabola yang berpuncak di 0*(0,0)

Pada bagian 4.1 telah dijelaskan bahwa parabola terjadi apabila perpotongan bidang Ω dengan kecurut untuk $\theta = \alpha$, yang kalau ditinjau dari segi eletrisitas $e = 1$, untuk itu perhatikan gambar 4.2.1.

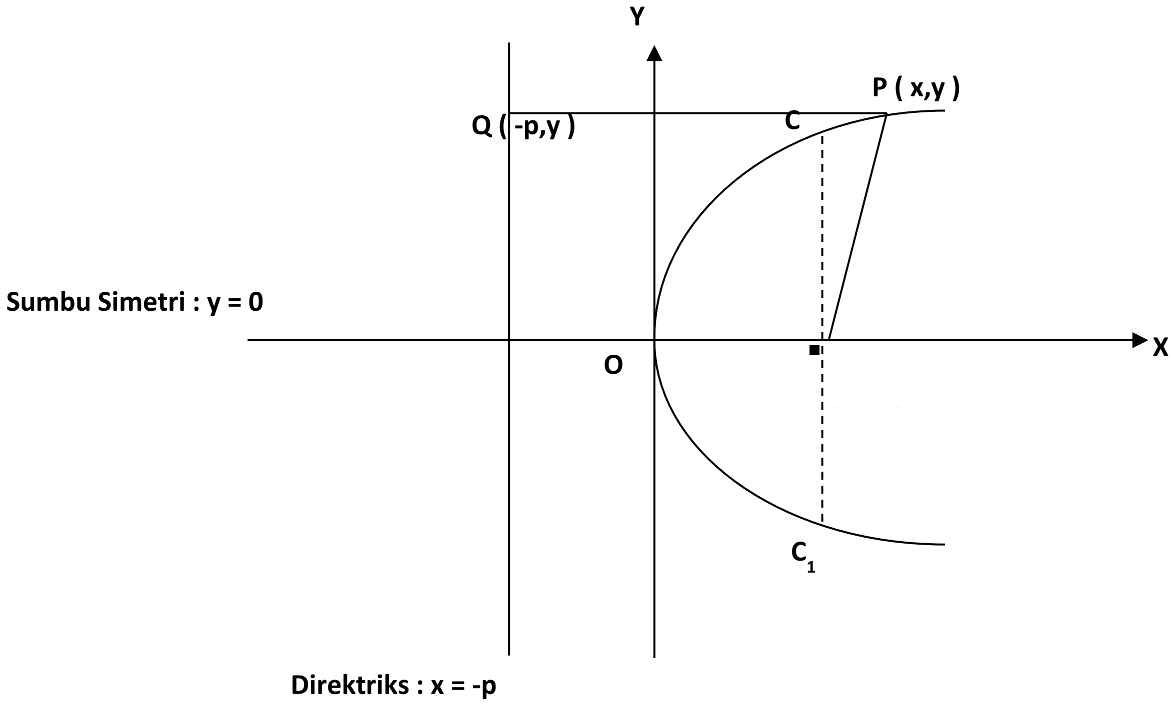


Gambar 4.2.1

Jadi parabola akan terbentuk apabila *PF* = *PD.*

Definisi* 4.2.1. *Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama terhadap suatu titik tertentu dan garis tertentu. Titik –tertentu itu disebut *titik api* (*fokus*) dan garis tertentu itu disebut direktriks.

Dari gambar 4.2.2, O(0,0) merupakan puncak parabola, garis g adalah direktriks parabola dengan persamaan direktriks $x = -p$, $F(p,0)$ merupakan fokus parabola, Sumbu X merupakan sumbu simetri parabola dengan persamaan parabola $y = 0$ dan titik C_1 dan C_2 disebut titik *lotus rektum* dan panjang C_1C_2 adalah panjang lotus rektum dari parabola.



Gambar 4.2.2

Untuk menentukan persamaan standart padabola, misalkan $P(x,y)$ adalah sebarang titik pada parabola, berdasarkan definisi parabola maka berlaku :

Jarak PF = jarak PQ

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

$$(x-p)^2+y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$x^2 - x^2 + p^2 - p^2 - 2px - 2px + y^2 = 0$$

$$-4px + y^2 = 0$$

$$y^2 = 4px$$

Dengan demikian persamaan parabola yang berpuncak di O(0,0) dengan fokus F(p,0) adalah

$$y^2 = 4px$$

Catatan **:**

1. Jika $p > 0$ maka parabola terbuka kekanan
2. Jika $p < 0$ maka parabola terbuka kekiri (lihat gambar 4.2.3)
3. Dengan : - Puncak O (0,0)
   - Fokus $F(p,0)$
   - Persamaan direktriks : $x = -p$
   - Persamaan sumbu simetri : $y = 0$

Karena jarak dari titik C ke direktris adalah $2p$, yang sama panjangnya dengan jarak C_1 ke fokus, jadi :

Panjang lotus rektum adalah $4p$

Sehingga koordinat masing-masing lotus rektum adalah

$C_1(p, 2p)$ dan $C_2(p,-2p)$

Jika gambar 4.2.2 diputar 180^0, maka akan diperoleh parabola yang terbuka ke kiri dan dengan cara yang sama dengan penurunan persamaan standart parabola yang terbuka ke kanan diperoleh :

Persamaan parabola untuk gambar 4.2.3 adalah

$$y^2 = -4px$$

Dengan

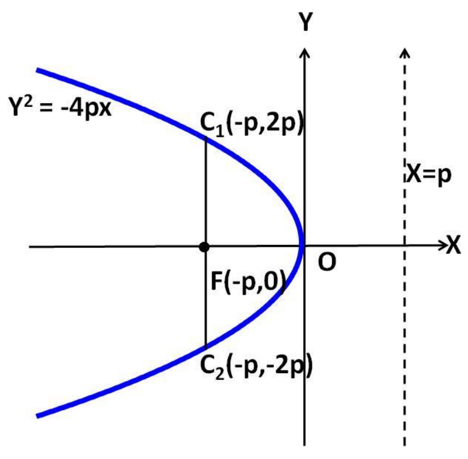
Fokus di $F(-p,0)$

Direktriks $x = p$

Panjang lotus rektum tetap = $4p$

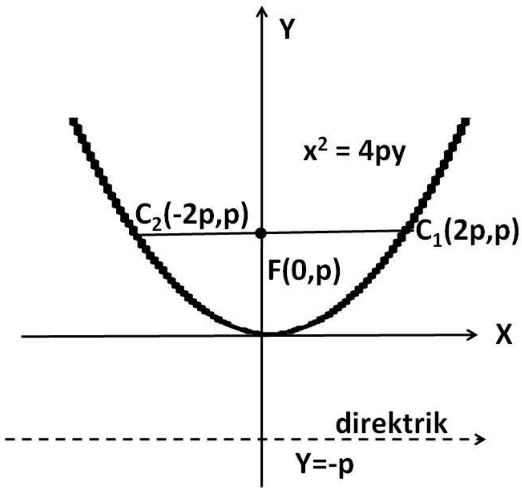
Koordinat $C_1(-p,2p)$ dan

Koordinat $C_2(-p,-2p)$



Gambar 4.2.3

Jika gambar 4.2.2 diputar 90^0, maka akan diperoleh parabola yang terbuka ke kiri dan dengan cara yang sama dengan penurunan persamaan standart parabola yang terbuka ke atas diperoleh :



Gambar 4.2.4

Persamaan parabola untuk gambar 4.2.3 adalah

$$x^2 = 4py$$

Dengan

Fokus di $F(0,p)$

Direktriks $y = -p$

Panjang lotus rektum tetap = $4p$

Koordinat $C_1(2p,p)$ dan

Koordinat $C_2(-2p,p)$

Sebenarnya akan lebih menarik dan mudah dipahami menurunkan persamaan parabola yang terbuka ke atas (lihat gambar 4.2.4) adalah dengan cara rotasi di atas. Akan tetapi bagi pembaca yang ingin melihat penurunannya secara analitik dapat dilihat penurunan di bawah, ini sebenarnya operasi yang sama dengan penurunan parabola yang terbuka ke kanan

Misalkan titik $P(x,y)$ adalah sembarang titik pada parabola, berdasarkan definisi parabola berlaku :

Jarak PF = jarak PQ

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

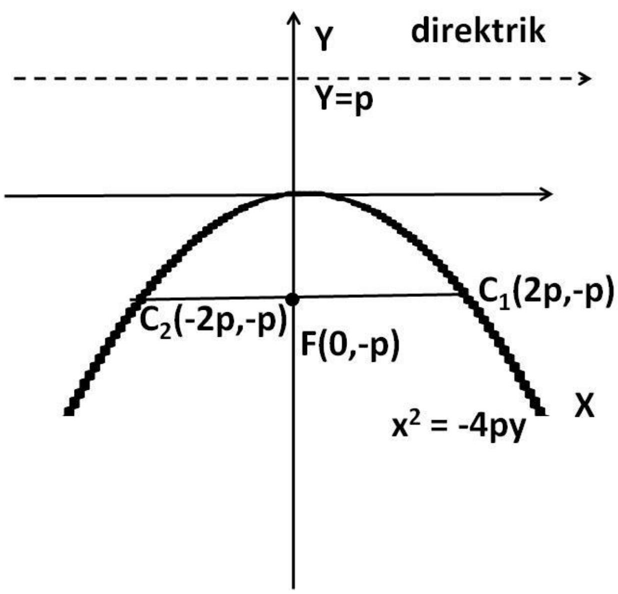
$$x^2+(y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2-y^2-y^2+p^2-p^2-2py-2py=0$$

$$-4py+x^2=0$$

$$x^2 = 4py$$

Jika gambar 4.2.4 diputar 180^0, maka akan diperoleh parabola yang terbuka ke kiri dan dengan cara yang sama dengan penurunan persamaan standart parabola yang terbuka ke bawah diperoleh :



Gambar 4.2.5

Persamaan parabola untuk gambar 4.2.3 adalah

$$x^2 = -4py$$

Dengan

Fokus di $F(0,-p)$

Direktriks $y = p$

Panjang lotus rektum tetap = $4p$

Koordinat $C_1(2p,-p)$ dan

Koordinat $C_2(-2p,-p)$.

4.2.2. Parabola Berpuncak di A(a,b)

Persamaan parabola yang berpuncak di titik $A(a,b)$ dapat secara lansung diperoleh dengan mengeser gambar 4.2.2 sejauh a satuan ke kanan/kiri dan b satuan ke atas/bawah, sehingga diperoleh persamaan parabolanya adalah sebagai berikut :

$$(y-b)^2 = 4p(x-a)$$

Pada parabola gambar 4.2.6

Titik puncak di $A(a,b)$

Fokus di $F(a+p,b)$

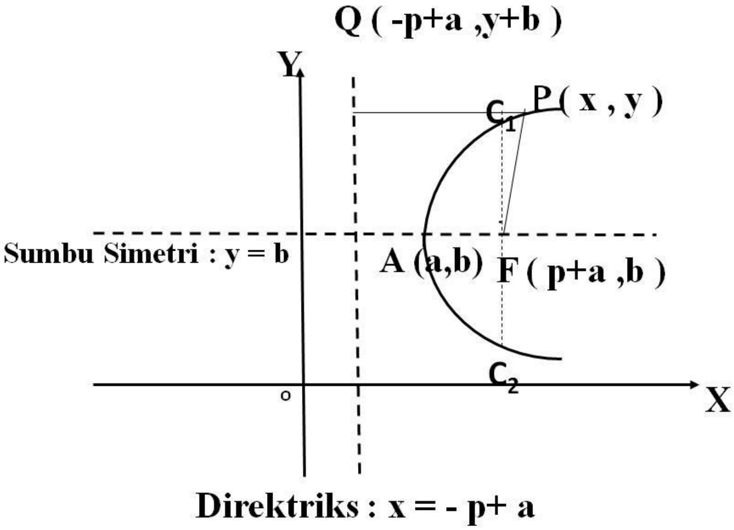
Koordinat lotus rektum adalah

$C_1\ (a+p,b+2p)$ dan $C_2(a+p,\ b-2p)$

Sehingga panjang lotus rektum tetap = $4p$

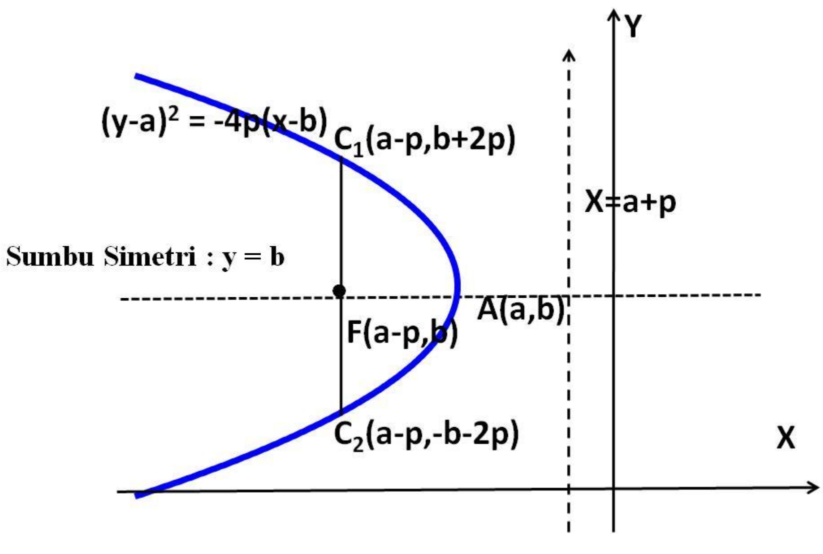
Sumbu symetris di $y = b$

Direktris $x = a - p$ dengan koordinat direktris adalah $(a - p,\ b)$



Gambar 4.2.6

Bila gambar 4.2.3 digeser sejauh (a,b), maka akan menghasilkan ellip yang puncaknya di A(a,b) dan dengan koordinat titik lainnya adalah sebagai berikut :



Gambar 4.2.7

Pada parabola gambar 4.2.67

Titik puncak di A(a,b)

Fokus di $F(a - p,b)$

Koordinat lotus rektum adalah

C_1 $(a\text{-}p,b\text{+}2p)$ dan $C_2(a\text{-}p,\ b\text{-}2p)$

Sehingga panjang lotus rektum tetap = $4p$

Sumbu symetris di $y = b$

Direktris $x = a + p$ dengan koordinat direktris adalah $(a+p,\ b)$

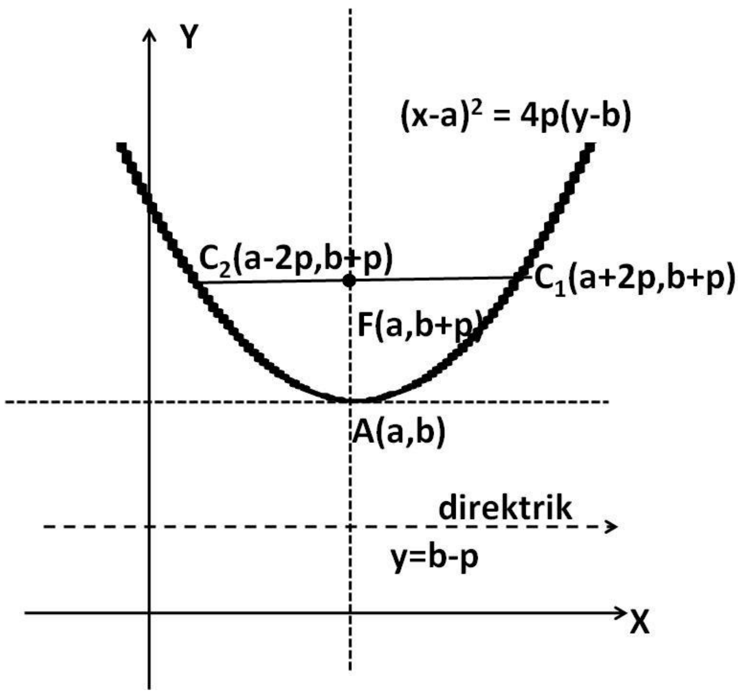
Persamaan ellipnya adalah

$$(y - a)^2 = -4p(x - b)$$

Sedangkan jika elips pada gambar 4.2.4 digeser sejauh (a,b), maka akan diperoleh persamaan elips berikut

$$\boldsymbol{(x - a)^2 = 4p(y - b)}$$

Dengan koordinat lainnya adalah sebagai berikut :



Gambar 4.2.8

Pada gambar 4.2.8

Koordinat titik puncak $A(a,b)$

Koordinat titik fokus $F(a, b+p)$

Koordinat lotus rektum adalah

$C_1(a+2p, b+p)$ dan $C_2(a-2p, b+p)$

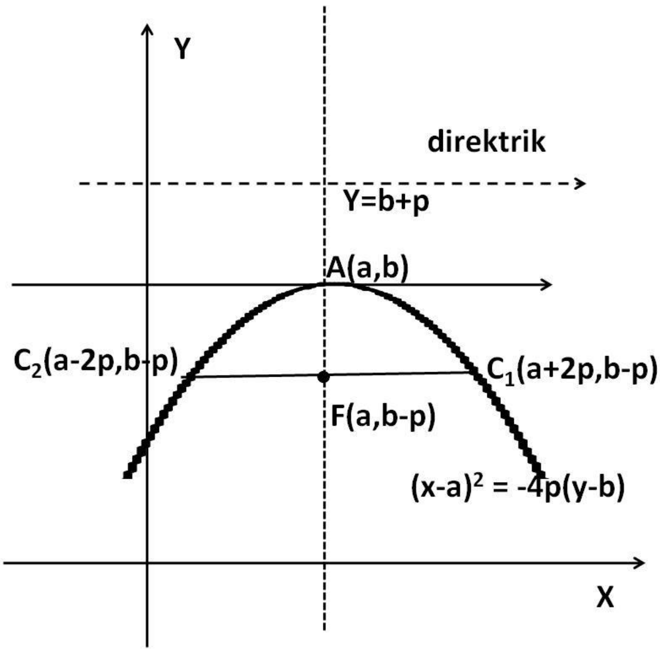
Direktrisnya berada pada garis $y = b - p$

dan sumbu symetrisnya pada $x = a$.

Sedangkan jika elips pada gambar 4.2.5 digeser sejauh (a,b), maka akan diperoleh persamaan elips berikut

$$\mathbf{(x - a)^2 = -4p(y - b)}$$

Dengan koordinat lainnya adalah sebagai berikut :



Gambar 4.2.9

Pada gambar 4.2.9

Koordinat titik puncak $A(a,b)$

Koordinat titik fokus $F(a, b\text{-}p)$

Koordinat lotus rektum adalah $C_1(a+2p, b-p)$ dan $C_2(a-2p, b-p)$

Direktrisnya berada pada garis $y = b + p$

dan sumbu symetrisnya pada $x = a$.

***Teladan* 4.2.1.** Tentukan koordinat fokus dan persamaan sumbu simetri, persamaan direktriks dan panjang lotus rektum dari persamaan parabola $y^2 = 8x$

Penyelesaian : Diketahui pers. Parabola $y^2 = -8x$, dimana persamaan umum parabola adalah $y^2 = 4px$. Sehingga diperoleh $4px = -8x$, maka p = -2 < 0. Jadi parabola terbuka ke kiri. Dari hasil yang didapat , diperoleh :

- Fokus parabola di F(p , 0) = (-2 , 0)
- Persamaan direktriks : $x = - p = - (-2) = 2$
- Persamaan sumbu simetri : y = 0

Dari fokus F (- 2 , 0) , x = - 2 , diperoleh $y^2 = -8.(-2) = 16$, sehingga diperoleh $y = \pm 4$. Jadi koordinat titik-titik ujung lactus rectumnya adalah (2 , 4) dan (-2 , - 4).Dengan demikian panjang lotus rektumnya adalah 2 . 4 = 8.

***Teladan* 4.2.2.** Tentukan persamaanparabola jika titik puncaknya (2,3) dan fokusnya (6 , 3)

Penyelesaian : Diketahui titik puncak (2 , 3,) = (a , b), maka diperoleh a = 2, b = 3, fokus

$$\left.\begin{array}{l} F(6,3) \\ F(p+a, b) \end{array}\right\} \qquad p + a = \qquad p + 2 = 6 , \qquad p = 4$$

Jadi persamaan parabolanya adalah

$$(y-b)^2 = 4p(x-a)$$
$$(y-3)^2 = 4.4(x-2)$$
$$(y-3)^2 = 16(x-2)$$

***Teladan* 4.2.3.** Tentukan koordinat titik puncak, titik fokus, sumbu simetri dan persamaan direktriks dari persamaan parabola $y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$ **!**

***Penyelesaian* :**

$$y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$$
$$y^2 + 4y = 4x - 8$$
$$(y+2)^2 - 2^2 = 4x - 8$$
$$(y+2)^2 = 4x - 8 + 4$$
$$(y+2)^2 = 4x - 4$$
$$\left.\begin{array}{l}(y+2)^2 = 4(x-1)\\ (y-b)^2 = 4p(x-a)\end{array}\right\} \quad 4p = 4,\ p = 1$$

Dengan $a = 1$, $b = -2$, dengan demikian diperoleh :

- titik puncak $(a, b) = (1, -2)$
- Titik fokus $F(p + a , b) = (2, -2)$
- Persamaan direktriks : $x = -p = -1$
- Persamaan sumbu simetri : $y = b = -2$

4.2.3. *Persamaan Garis Singgung Pada Parabola*

Walaupun persamaan garis singgung pada lingkaran tidak diberikan pada buku ini, karena pada dasarnya, persamaan garis singgung pada lingkaran sudah dibahas pada tingkat sekolah menengah,. Sedangkan persamaan garis singgung pada parabola tidak banyak buku teks tingkat sekolah menengah yang membahas, maka berikut ini akan diberikan beberapa konsep tentang menentukan persamaan garis singgung pada suatu parabola. Garis singgung yang dibahas juga terdiri dari berbagai kondisi yaitu di titik puncak dengan gradient tertentu dan lain sebagainya.

A. *Persamaan Garis Singgung Parabola Dengan Puncak* (0,0)

1. *Persamaan garis singgung parabola dengan gradien m*

Misalnya titik $P(x_1, y_1)$ terletak pada parabola $y^2 = -4px$ dan $\ell : y = mx + b$ maka

$$(mx + b)^2 = -4\text{px}$$

$$\Leftrightarrow m^2x^2 + 2mbx + b^2 + 4\text{px} = 0 \text{ x} + \text{b}^2 + 4\text{px} = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2x^2 + (2mb + 4\text{px})x + b^2 = 04\text{p })\text{x} + \text{b}^2 = 0$$

Garis menyinggung parabola $y^2 = -4px$, maka berlaku $D = 0$, sehingga $b^2 - 4ac = 0$

$$(2mb + 4p)^2 - 4m^2b^2 = 0$$

$$\leftrightarrow 4m^2b^2 + 16mbp + 16p^2 - 4m^2 b^2 = 0$$

$$\leftrightarrow 16mbp = -16p^2$$

$$mb = \frac{-16p^2}{16p}$$

$$mb = -p$$

$$b = \frac{-p}{m}$$

Subtitusikan $b = \frac{-p}{m}$ pada persamaan garis ℓ, diperoleh y = mx $+ \frac{-p}{m}$

Jadi, persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = -4px$ dengan gradien m adalah

$$y = mx + \frac{-p}{m}$$

Misalnya titik $P(x_1, y_1)$ terletak pada parabola $x^2 = 4py$ dan l: $y = mx + b$, maka

$$\Leftrightarrow x^2 = 4p(mx+b)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4pmx + 4pb$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4pmx - 4pb = 0$$

Garis ℓ menyinggung parabola $x^2 = 4py$, maka beraku $D = 0$, sehingga: $b^2 - 4ac = 0$

$$\Leftrightarrow (-4pmx)^2 - 4(-4pb) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16p^2m^2 + 16pb = 0$$

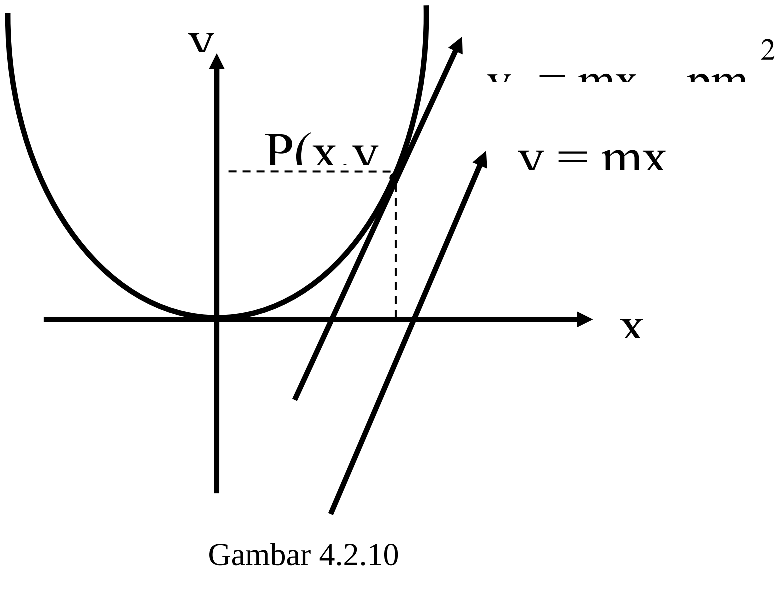
$$\Leftrightarrow 16p^2m^2 = -16pb$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{16p^2m^2}{-16p}$$

$$\Leftrightarrow b = -pm^2$$

Subtitusi $b = -pm^2$ pada persamaan garis ℓ, diperoleh y = mx$-$ pm^2

Jadi persamaan garis singgung pada parabola $x^2 = 4py$ dengan gradien m adalah $y = mx - pm^2$ dengan pendekatan yang sama,



Gambar 4.2.10

akan diperoleh persamaan garis singgung parabola dengan gradien *m* seperti tabel berikut ini:

No	Persamaan parabola	Persamaan garis singgung
1.	$y^2 = 4px$	$y = mx + \dfrac{p}{m}$
2.	$y^2 = -4py$	$y = mx - \dfrac{p}{m}$
3.	$x^2 = 4py$	$y = mx - pm^2$
4.	$x^2 = -4py$	$y = mx + pm^2$

2. *Persamaan garis singgung parabola melalui titik* (x_1, y_1)

Persamaan garis singgung y melalui titik $P(x_1, y_1)$ yang terletak pada parabola $y^2 = -4px$, dapat dinyatakan sebagai:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dengan tafsiran geometri turunan, besar *m* dapat dicari sebagai berikut:

$$x = \frac{y^2}{-4p}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{-4p}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{-2p}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2p}{y}$$

$$jadi, m = \frac{dy}{dx} = \frac{-2p}{y}$$

Dititik (x_1, y_1) : $m = -\dfrac{2p}{y_1}$

Nilai $m = -\frac{2p}{y_1}$ didistribusikan ke persamaan $y - y_1 = m(x - x_1)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow y - y_1 = -\frac{2p}{y_1}(x - x_1) \\
&\Leftrightarrow y_1(y - y_1) = -2px + 2px_1 \\
&\Leftrightarrow y_1 y - y_1{}^2 = -2px + 2px_1 \quad \left(ingat\ \ y_1{}^2 = -4px\right) \\
&\Leftrightarrow y_1 y - (-4px) = -2px + 2px_1 \\
&\Leftrightarrow y_1 y + 4px = -2px + 2px_1 \\
&\Leftrightarrow y_1 y = -2px - 2px_1 \\
&\Leftrightarrow y_1 y = -2p(x + x_1)
\end{aligned}$$

Dengan demikian persamaan garis singgung yang dimaksud adalah

$$y_1 y = -2p\ (x\ + x_1\ )$$

Persamaan garis singgung yang melalui titik $P(x_{1,}\, y_1)$ yang terletak pada parabola $x^2 = -4py$, dapat dinyatakan sebagai $y - y_1 = m(x - x_1)$ dengan tafsiran geometri turunan, besar m dapat dicari sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&x^2 = -4py \\
&\Rightarrow y = \frac{x^2}{-4p} \\
&\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{-4p} \\
&\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{-2p} \\
&Jadi, m = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{-2p} \\
&Dititik\,(x - x_1) : m = \frac{x_1}{-2p}\, disubtitusikan\ \ kepersamaan
\end{aligned}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) diperoleh:$$

$$y - y_1 = \frac{x_1}{-2p}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow -2p(y - y_1) = x_1 x - x_1^{\ 2}$$

$$\Rightarrow -2py + 2py_1 = x_1 x - x_1^{\ 2} \qquad \left(ingat \ \ x_1^{\ 2} = -4py_1\right)$$

$$\Rightarrow -2py + 2py_1 = x_1 x - (-4py_1)$$

$$\Rightarrow -2py + 2py_1 = x_1 x + 4py_1$$

$$\Rightarrow x_1 x = -2py_1 - 2py$$

$$\Rightarrow x_1 x = -2p(y + y_1)$$

Dengan pendekatan yang sama, akan diperoleh persamaan garis singgung parabola seperti pada tabel dibawah ini:

No	Persamaan parabola	Persamaan garis singgung
1	$y^2 = 4px$	$y_1 y = 2p(x + x_1)$
2	$y^2 = -4px$	$y_1 y = -2p(x + x_1)$
3	$x^2 = 4py$	$x_1 x = 2p(y + y_1)$
4	$x^2 = -4py$	$x_1 x = -2p(y + y_1)$

B. *Persamaan garis singgung parabola dengan puncak* (*a.b*)

1. Persamaan garis singgung parabola dengan gradien m

Untuk parabola dengan bentuk umum $(x - a)^2 = 4p(y - b)$

Dengan garis singgung $y = mx + n$ dapat kita peroleh persamaan garis singgungnya dengan mensubstitusikan $y = mx + n$ ke dalam persamaan parabola

$$(x - a)^2 = 4p(y - b)$$

Subtitusi $y = mx + n$

$\Leftrightarrow (x - a)^2 = 4p\,(mx + n - b)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 = 4pmx + 4p(n - b)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 - 4pmx - 4p(n - b) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2ax - 4pmx + a^2 - 4p(n - b) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (-2a - 4pm)x + a^2 - 4p(n - b) = 0$

Syarat garis yang menyinggung parabola adalah D= 0

$\Leftrightarrow (-2a - 4pm)^2 - 4.1.(-4p(n - b) + a^2 = 0$

$\Leftrightarrow 4a^2 + 16pma + 16pm^2 + 16p\,(n - b) - 4a^2 = 0$

$\Leftrightarrow 16pma + 16p^2m^2 + 16p\,(n - b) = 0$

-- : $16p$

$\Leftrightarrow ma + pm^2 + (n - b) = 0$

$\Leftrightarrow (n - b) = -ma - pm^2$

$\Leftrightarrow n = -ma - pm^2 + b$

Jadi persamaan garis singgung parabola $(x - a)^2 = 4p(y - b)$ diperoleh dengan cara mensubstitusikan nilai $n = -ma - pm^2 + b$ pada $y = mx + n$

$\Leftrightarrow y = mx + n$

$\Leftrightarrow y = mx + (-ma - pm^2 + b)$

$\Leftrightarrow y = mx - ma - pm^2 + b$

$\Leftrightarrow y - b = m(x - a) - pm^2$

Untuk p dengan bentuk umum $(y - b)^2 = 4p(x - a)$ dengan garis singgung $y = mx + n$ dapat kita peroleh garis singgungnya dengan mensubstitusikan garis $y = mx + n$ ke dalam persamaan parabola

$(y - b)^2 = 4p(x - a)$

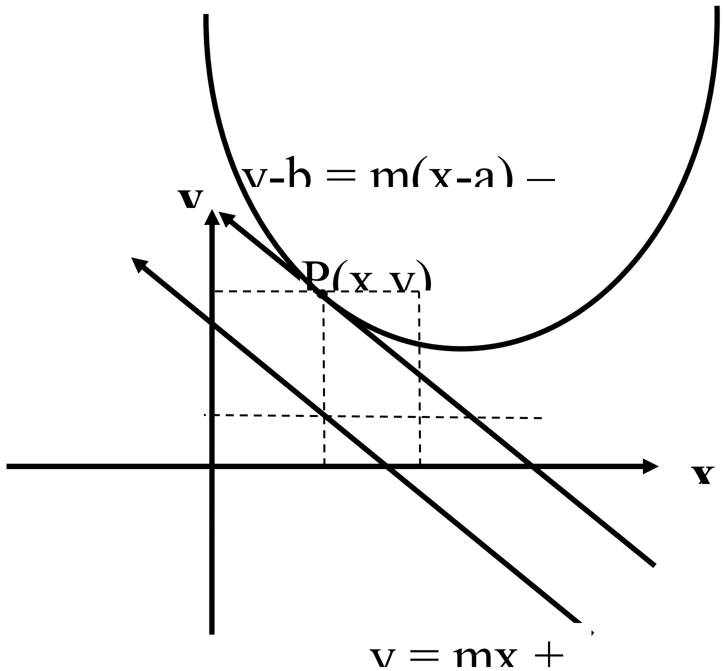
$\Leftrightarrow ((mx + n) - b)^2 = 4p(x - a)$

$\Leftrightarrow (mx - n)^2 - 2(mx + n)b + b^2 = 4p(x - a)$

$\Leftrightarrow m^2x^2 + 2mxn + n^2 - 2mbx - 2bn + b^2 = 4p(x - a)$

$\Leftrightarrow m^2x^2 + 2mnx - 2mbx - 4px + 4pa - 2bn + n^2 + b^2 = 0$

$\Leftrightarrow m^2x^2 + (2mn - 2mb - 4p)x + 4pa - 2bn + n^2 + b^2 = 0$



$dengan\ n = -ma + \rho m^2 + b$

Syarat garis yang menyinggung parabola adalah $D = 0$

$\Leftrightarrow((2mn - 2mb) - 4p)^2 - 4m^2(4pa - 2bn + n^2 + b^2) = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2n^2 - 8m^2nb - 4m^2b^2 - 16mnp + 16mbp + 16p^2 - 16m^2pa + 8m^2bn - 4m^2n^2 - 4m^2b^2 = 0$

$\Leftrightarrow -16mnp + 16mbp + 16p^2 - 16m^2pa = 0$

--- : $16p$

$\Leftrightarrow - mn + mb + p - m^2a = 0$

$\Leftrightarrow - mn = - mb + m^2a - p$

$\Leftrightarrow - mn = m(ma - b) - p - mn = -mb - m^2a - p$

$\Leftrightarrow n = -(ma - b) - \dfrac{p}{m}$

Subtitusi nilai n pd persamaan y = mx + n

$y = mx + n$

$y = mx + (-ma + b) - \frac{p}{m}$

$(y - b) = m(x - a) - \frac{p}{m}$

Dengan pendekatan yang sama, akan diperoleh persamaan garis singgung parabola dengan gradien m seperti tabel di bawah ini.

No	Persamaan parabola	Persamaan garis singgung
1	$(y - b)^2 = 4p(x - a)$	$(y - b) = m(x - a) - p/m$
2	$(y - b)^2 = -4p(x - a)$	$(y - b) = m(x - a) + p/m$
3	$(x - a)^2 = 4p(y - b)$	$(y - b) = m(x - a) - pm^2$
4	$(x - a)^2 = 4p(y - b)$	$(y - b) = m(x - a) + pm^2$

3. *Persamaan garis singgung melalui titik* (x_1, y_1)

Persamaan garis singgung parabola $(y - b)^2 = 4p(x - a)$ di titik $P(x_1, y_1)$

$(y_1 - b)^2 = 4p(x_1 - a)$

$y_1^2 - 2by_1 + b^2 = 4p(x_1 - a)$

$y_1^2 = 2by_1 - b^2 + 4px(x_1 - a)$ ....(4.2.1)

Persamaan garis singgung melalui $P(x_1, y_1)$ adalah

$(y - y_1) = m(x - x_1)$ ....(4.2.2)

Gradien m ditentukan dengan cara sebagai berikut:

$$(y-b)^2 = 4p(x-a)$$
$$(x-a) = \frac{1}{4p}(y-b)^2$$
$$\frac{d(x-a)}{dy} = \frac{1}{4p}.2(y-b)$$
$$\frac{d(x-a)}{dy} = \frac{(y-b)}{2p}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{(y-b)}$$

Jadi m di titik P (x_1, y_1) = $\frac{2p}{(y_1-b)}$ ……..(4.2.3)

Subtitusi (4.2.3) ke (4.2.2)

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$
$$y-y_1 = \frac{2p}{(y_1-b)}(x-x_1)$$
$$(y-y_1)(y_1-b = 2p(x-x_1)$$
$$yy_1 - by - y_1^{\ 2} + by_1 = 2p(x-x_1).$$ ……….(4.2.4)

Subtitusi persamaan (4.2.1) ke persamaan (4.2.4)

$$yy_1 - by - y_1^2 + by_1 = 2px - 2px_1$$
$$yy_1 - by - (2by_1 - b^2 + 4p(x_1 - a)) + by_1 = 2px - 2px_1$$
$$yy_1 - by - by_1 + b^2 = 4px_1 - 4pa + 2px - 2px_1$$
$$(y-b)(y_1-b) = 2px_1 - 4ap + 2px$$
$$(y-b)(y_1-b) = 2p(x + x_1 - 2a)$$

Persamaan garis singgung parabola $(x-a)^2 = 4p(y-b)$ di titik P (x_1, y_1)

$$(x_1 - a)^2 = 4p(y_1 - b)$$

$$x_1^2 - 2ax_1 + a^2 = 4p(y_1 - b)$$

$p\ (x_1, y_1)$

$$x_1^2 = 2ax_1 - a^2 + 4p(y_1 - b) \qquad \text{. . . . . (4.2.5)}$$

Persamaan garis singgung melalui $P\ (x_1, y_1)$ adalah

$(y - y_1) = m\ (x - x_1)$ ……………….(4.2.6)

Gradien m ditentukan dengan cara sebagai berikut:

$$(x_1 - a)^2 = 4p(y_1 - b)$$

$$(y_1 - b) = \frac{1}{4p}(x_1 - a)^2$$

$$\frac{(y_1 - b)}{dx} = \frac{1}{4p}.2(x_1 - a)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x_1 - a)}{2p}$$

jadi $m = \dfrac{x_1 - a}{2p}$. . . . . (4.2.7)

Subtitusi persamaan ini ke persamaan (4.2.5)

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$(y - y_1) = \frac{(x_1 - a)}{2p}(x - x_1)$$

$$2p(y - y_1) = (x_1 - a)(x - x_1)$$

$$2p(y - y_1) = x_1.x + x_1^2 - ax + ax_1.. \qquad \text{……….(4.2.8)}$$

Subtitusi persamaan (4.2.5) ke persamaan (4.2.8)

$$2py - 2py_1 = xx_1 - x_1^2 - ax + ax_1$$

$$2py - 2py_1 = xx_1 - (2ax_1 - a^2 + 4p(y_1 - b)) - ax + ax_1$$
$$2py - 2py_1 + 4py_1 - 4pb = xx_1 - ax - ax_1 + a^2$$
$$2py + 2py_1 - 4pb = xx_1 - ax_1 - ax + a^2$$
$$2p(y + y_1 - 2p) = (x - a)(x_1 - a)$$

Jadi persamaan garis singgung parabola $(x - a)^2 = 4p(y - b)$ di titik $P(x_1, y_1)$

$$(x - a)(x_1 - a) = 2p(y + y_1 - 2p)$$

Dengan pendekatan yang sama akan diperoleh persamaan garis singgung parabola seperti tabel dibawah ini:

No	Persamaan parabola	Persamaan garis singgung
1	$(y - b)^2 = 4p(x - a)$	$(y - b)(y_1 - b) = 2p(x + x_1 - 2a)$
2	$(y - b)^2 = -4p(x - a)$	$(y - b)(y_1 - b) = -2p(x + x_1 - 2a)$
3	$(x - a)^2 = 4p(y - b)$	$(x - a)(x_1 - a) = 2p(y + y_1 - 2b)$
4	$(x - a)^2 = -4p(y - b)$	$(x - a)(x_1 - a) = -2p(y + y_1 - 2b)$

Soal Latihat 7.

1. Tentukan koordinat titik fokus, persamaan sumbu simetri , persamaan direktriks, dan panjang latus rectum parabola berikut :

   a. $y^2 = 8x$ b. $y^2 = -8x$ c. $x^2 = 8y$ d. $x^2 = -8y$

2. Tentukan persamaan parabola yang berpuncak di O(0,0) dengan keterangan sebagai berikut :

a. titik fokus di $F(-3, 0)$ b. titik fokus di $F(0, 3)$

3. Tentukan persamaan parabola yang berpuncak di O(0,0) dengan fokus pada sumbu X dan melalui titik (1, 2), kemudian gambar parabola tersebut

4. Diketahui parabola dengan persamaan $(y + 2)^2 = 4(x - 1)$.

   Tentukan: a. koordinat titik puncak

   b. koordinat titik fokus

   c. peramaan direktriks

   d. persamaan sumbu simetri

5. Suatu parabola dengan persamaan $x^2 - 2x + 2y - 5 = 0$.

   Tentukan: a. koordinat titik puncak

   b. koordinat titik fokus

   c. peramaan direktriks

   d. persamaan sumbu simetri

6. Tentukan persamaan parabola jika titik puncak $A(2, 4)$ dan titik fokus di $F(8, 4)$
7. Tentukan titik puncak, titik fokus, persamaan direktriks dan persamaan sumbu simetri dari persamaan parabola berikut ini :

   a. $y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$ b. $4x^2 - 8x + 3y - 2 = 0$
8. Tentukanlah persamaan parabola yang koordinat ujung-ujung lotus rectumnya di titik (6,-3) & (-2,-3)
9. Tentukan persamaan parabola, jika diketahui hal-hal berikut ini
   a. Titik puncaknya (0,0) dan titik fokusnya (-4,0)
   b. Titik fokusnya (-3,0) dan direktriksnya x=3
   c. Titik puncaknya (0,0) dan melalui (-2,-4)

d. Titik fokusnya (4,3) dan persamaan direktriksnya $y + 1=0$
e. Titik puncak di (4,-1), sumbu simetri sejajar sumbu x, melalui titik (1,6)

10. Tentukan titik puncak, titik fokus, persamaan direktriks dan persamaan sumbu simetri dari persamaan parabola berikut ini :
    a. $x^2 + 4x + 3y - 2 = 0$
    b. $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$
    c. $(y+1)^2 = -12(x-1)$
    d. $(x-2)^2 = -8(y+2)$
11. Tentukan persamaan parabola , jika diketahui hal-hal berikut ini :
    a. Titik puncak (-4,2); sumbu simetri garis $y = 2$; dan melalui titik (0,6)
    b. Titik puncak (3,-2); sumbu simetri garis $x = 3$; dan panjang lactus rectum = 8
    c. Persamaan direktriks $x = 4$; sumbu simetri $y = 4$; melalui titik (9,7).
    d. Titik fokus di $(-\frac{3}{4},4)$; dan direktriks $x = -\frac{5}{4}$
12. Tentukan persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 4x$ di titik (1,-2)
13. Tentukan persamaan garis singgung pada parabolah $x^2 = 12(y - 1)$ di titik (6,4).
14. Tentukan persamaan garis singgung yang gradiennya ½ pada parabolah $y^2 = -6x$
15. Tentukan persamaan garis singgung yang gradiennya -2/3 pada parabola $(y - 3)^2 = 2(x+1)$.
16. Tentukan persamaan garis singgung pada parabola $x^2 + 4x - y + 6 = 0$ yang gradiennya sejajar dengan garis $x + 2y - 11 = 0$.
17. Tentukan persamaan garis singgung pada parabola $y^2 - 12y + 6x - 4 = 0$ yang tegak lurus dengan gradiennya garis singgung di titik (4,-2).
18. **). Tentukan dua buah persamaan garis singgung pada parabolah $x^2 = -4y$ yang mana kedua garis singgungnya membentuk sudut 45^0.
19. **). Tentukan persamaan kedua garis singgung dari parabolah $(y - 4)^2 = 2(x + 1)$ yang mana kedua garis singgung tersebut membentuk sudut 30^0.

20. **). Tentukan persamaan garis singgung pada parabolah $y^2 = x + 2$ yang mana garis singgungnya membentuk sudut 60^0 dengan sumbu Y.
21. Tentukan persamaan para bola pada soal no 8 jika digeser sejauh 4 satuan kekanan dan 3 satuan ke bawah.
22. Tentukan persamaan parabolah pada soal no 9 jika digeser sejauh ke kiri 5 satuan dan ke atas 2 satuan.
23. *) Tentukanlah persamaan parabola $y^2 = 8x$, jika diputar 30^0.
24. *). Tentulahlah persamaan parabolah $x^2 = - 2y$, jika diputar -30^0.
25. *) Tentukanlah persamaan parabola $(y – 4)^2 = 12(x + 1)$ jika diputar 45^0.
26. *) Tentukanlah persamaan parabola $(x – 2)^2 = 4(y – 1)$ jika diputar 60^0.
27. **). Tentukanlah persamaan parabola $4x^2 = y + 2$, jika diputar 90^0.
28. **) Tentukanlah persamaan parabola $4x^2 + 6x + y – 1 = 0$ jika diputar -60^0.
29. **). Tentukanlah persamaan parabola $4x – 8y^2 + 4y – 2 = 0$ jika diputas sejau 135^0.

Sama seperti parabola, bentuk Elips akan selalu ada juga dalam berbagai sisi kehidupan masyarakat maupun dalam berbagai disiplin ilmu yang ada, terutama dalam bidang sains, karena banyaknya Elips ini dapat dijumpai dalam berbagai kehidupan, maka jika kita ingin memahami penggunaan ellips dengan benar, maka kita mesti memahami konsep Elips dengan baik dan benar.

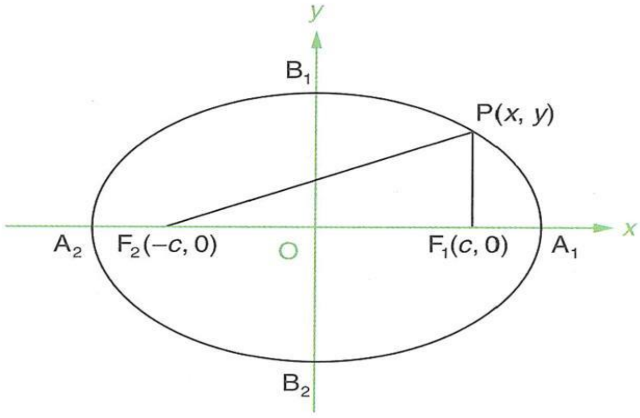
Ellips

The Halley's comet has an elliptic orbit with the major axis much longer than the minor axis. It comes near the Earth every 76 years.

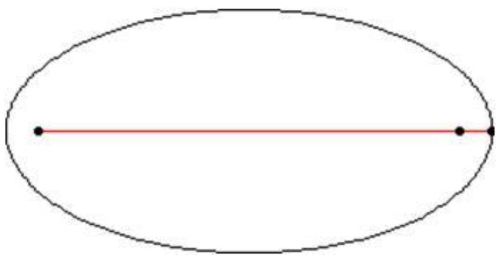
4.3. *Elips*

4.3.1. *Persamaan elips yang berpusat di P*(0,0)

Pada bagian awal dijelaskan bahwa ellip terbentuk bila perpotongan bidang Ω dengan kerucut membentuk sudah θ dengan $\alpha < \theta < \pi/2$. Untuk menentukan persamaan umum suatu elips yang berpusat di (0,0), perhatikan gambar 4.3.1b yang adalah diperoleh dari gambar 4.3.1a, yang merupakan kumpulan titik-titik yang jumlah jaraknya dari titik fokus adalah konstan.



Gambar 4.3.1a



Gambar 4.3.1b

Berdasarkan definisi, bahwa elips adalah kumpulan titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tetap adalah konstan, titik tetap tersebut dinamakan dengan fokus, misalkan koordinat masing-masing fokus adalah $F_1(c,0)$ dan $(-c,0)$, kemudian sebut ujung-ujung elips tersebut adalah verteknya, dengan koordinat vertek masing-masing adalah $A_1(a,0)$ dan $A_2(-a,0)$. Jadi senantiasa berlaku $PF_1 + PF_2 = k$. Untuk menentukkan nilai k, pikirkan jika titik $P(x,y)$ berada pada titik $A_1(a,0)$. Maka jarak $AF_1 + AF_2 = a - c + a + c = 2a$.

Jadi

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4cx + 4a^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4cx + 4a^2$$

$$a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4$$

$$a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Misalkan $b^2 = a^2 - c^2$,

Maka diperoleh

$$a^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

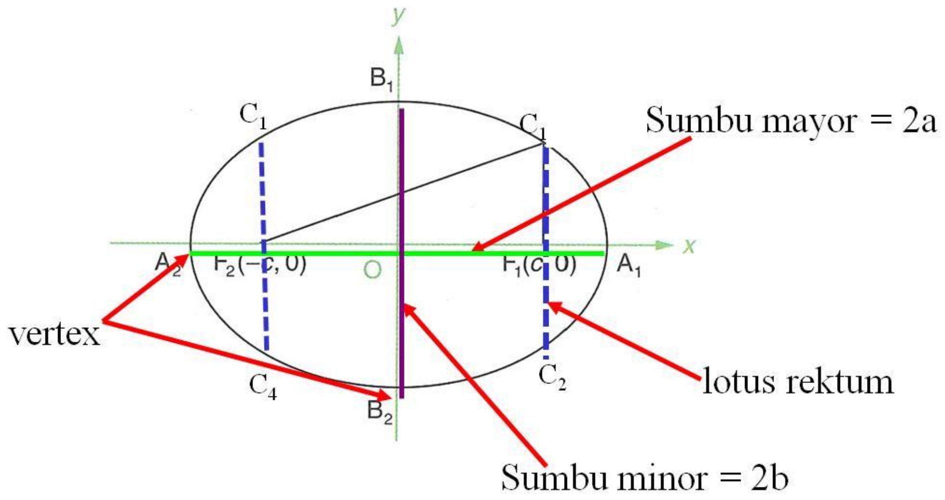
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{dengan } a \geq b. \qquad (4.3.1)$$

Jika pada persamaan di atas $a = b$, maka akan menjadi persamaan lingkaran berpusat di O(0,0). Jadi lingkaran merupakan bentuk khusus dari elips.

Persamaan di atas merupakan persamaan standart elips dengan titik center di (0,0) dan fokus $F_1(c,0)$ dan $F_2(-c,0)$ dan vertek di $A_1(a,0)$ dan $A^2(-a,0)$. Selain dari koordinat fokus, vertek, pada sebuah elips juga dengan mudah dapat ditentukan panjang lotus rektum, koordinat lutus rectum, panjang sumbu mayor dan panjang sumbu minor. Perhatikan gambar 4.3.2 di bawah ini

Koordinat B_1 adalah $(0,b)$ dan koordinat $B_2(0,-b)$, Panjang B_1B_2 disebut sumbu minor yang panjangnya $2b$. sedangkan panjang A_1A_2 disebut sumbu mayor yang panjangnya adalah 2a. Dengan mudah juga dapat ditentukkan koordinat dan panjang lotus rektum adalah sebagai berikut : perhatikan persamaan elips berikut

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



Gambar 4.3.2

.

Karena absis dari fokus adalah c, maka absis dari C_1 dan C_2 juga c, sehingga c disubsitusikan pada x dan diperoleh

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{c^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$y^2 = \left(\frac{b^2}{a}\right)^2$$

$$y = \pm\left(\frac{b^2}{a}\right)$$

Berdasarkan uraian di atas, maka koordinat lotus rektum adalah

$$C_1\left(c, \frac{b^2}{a}\right), \quad C_2\left(c, -\frac{b^2}{a}\right), \quad C_3\left(-c, \frac{b^2}{a}\right), \quad C_4\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

Sehingga panjang C_1C_2 = panjang C_3C_4 yang merupakan panjang lotus rektum = $\frac{2b^2}{a}$.

Jika gambar 4.3.2 diputas 90^0, maka akan diperoleh bentuk ellip seperti gambar 4.3.3, jadi x akan menjadi y dan y menjadi $-x$, maka persamaan (4.3.1) menjadi

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (4.3.2)$$

Dengan tetap $a \geq b$.

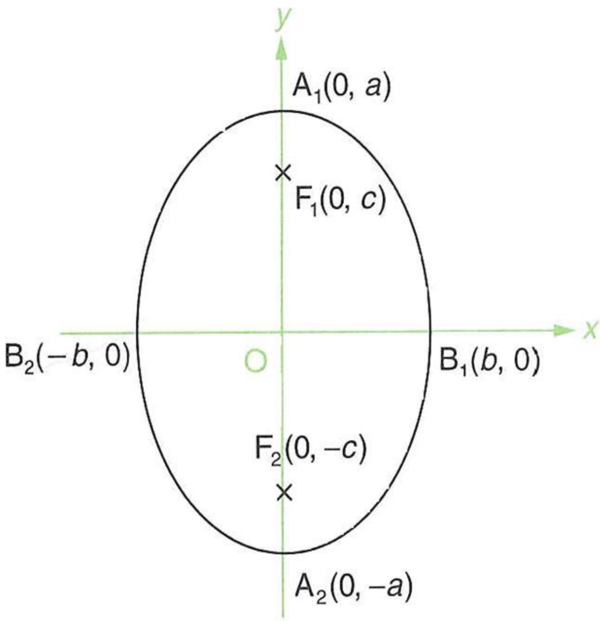
Sehingga koordinat fokusnya menjadi

$F_1(0,c)$ dan $F_2(0, -c)$

Sedangkan verteknya menjadi

$A_1(0,a)$ $A_2(0,-a)$

$B_1(b,0)$ $B_2(-b,0)$



Gambar 4.3.3

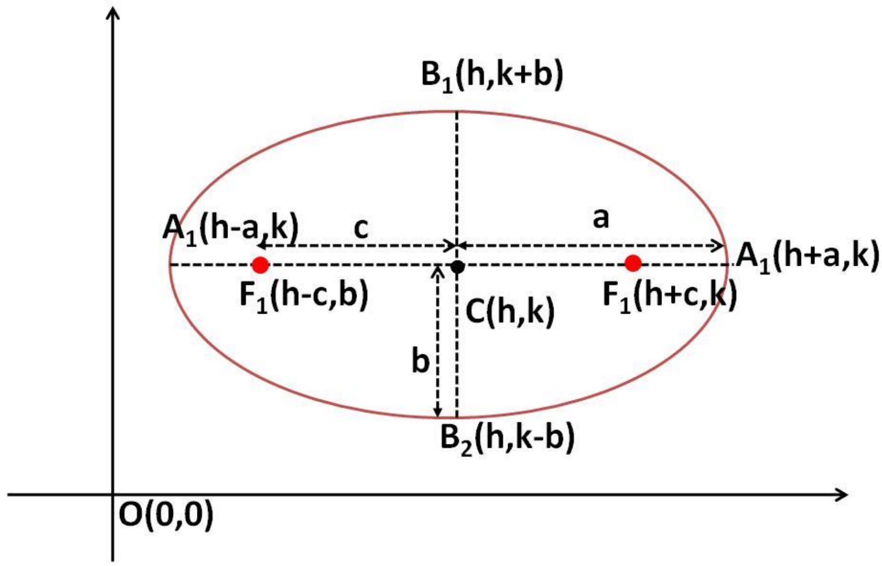
Dengan proses rotasi, maka tidak akan merobah panjang lutus rektum, jadi panjang lotus rectum tetap $\frac{2b^2}{a}$ dan dengan mudah juga dapat ditentukan koordinat lotus rectum yaitu

$$C_1\left(\frac{b^2}{a},c\right),\quad C_2\left(-\frac{b^2}{a},c\right),\quad C_3\left(\frac{b^2}{a},-c\right),\quad C_4\left(-\frac{b^2}{a},-c\right)$$

Jika gambar 4.3.1a digeser sejauh (h,k), maka secara lansung menghasilkan persamaan elips dengan center di (h,k) yaitu

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Koordinat masing-masing titiknya adalah seperti pada gambar 4.3.4. sedangkan panjang lotus rectum tetap $\frac{2b^2}{a}$ dan dengan mudah akan dapat ditentukan koordinat lotus rectum, persamaan direktrisnya (sebagai latihan)



Gambar 4.3.4

***Teladan* 4.3.1** Tentukan persamaan elips yang berpusat di O(0,0), fokus (-4,0) dan (4,0) dengan sumbu mayor 10 satuan.

Penyelesaian :Fokus di F_1 (-4,0) dan F_2 (4,0) maka c = 4 (fokus pada sumbu X).

Panjang sumbu mayor = 10, maka 2a = 10. Sehingga a = 5

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$

Persamaan elipsnya :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Jadi persamaan elipnya adalah $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

***Teladan* 4.3.2.** Diketahui persamaan elips $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, tentukan koordinat titik puncak, koordinat titik fokus, panjang sumbu mayor, sumbu minor, eksentrisitas, persamaan direktriks dan panjang lotus rectum .

Penyelesaian :Dari persamaan elips $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, diperoleh a^2 = 16, maka a = 4; b^2 = 9, maka b = 3. Dari $c^2 = a^2 - b^2$, sehingga c^2 = 16 – 9 =7, maka $c = \sqrt{7}$.

Dari data diatas diperoleh :

Titik puncak (a,0) = (4,0) dan (-a,0)=(-4,0)

Titik focus (-c,0) = (-$\sqrt{7}$,0) dan (c,0)=($\sqrt{7}$,0)

Panjang sumbu mayor = 2a = 2. 4 = 8

Panjang sumbu minor = 2b = 2. 3 = 6

Elektrisitas : $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

Persamaan direktriks : $x=\frac{a}{e}=\frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{16}{\sqrt{7}}=\frac{16}{7}\sqrt{7}$

Panjang lotus rectum = $\frac{2\,b^2}{a}=\frac{2.9}{4}=\frac{18}{4}=4\frac{1}{2}$

4.3.2. *Persamaan elips yang berpusat di P*(α,β)

Untuk elips yang berfokus pada sumbu utama yang terletak pada / sejajar sumbu X, persamaan elipsnya adalah

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

dengan :

- Pusat (α,β)
- Titik fokus di F_1 $(\alpha-c, \beta)$ & $F_2(\alpha+c, \beta)$
- Titik puncak $(\alpha-a, \beta)$ & $(\alpha+a, \beta)$
- Panjang sumbu mayor=$2a$
- Panjang sumbu minor=$2b$
- Persamaan direktriks $x = \alpha \pm \dfrac{a^2}{c}$

Untuk elips yang berfokus pada sumbu utama yang terletak pada / sejajar sumbu y, persamaan elipsnya adalah

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$$

dengan :

- Pusat (α,β)
- Titik fokus di F_1 $(\alpha,\beta-c)$ & $F_2(\alpha,\beta+c)$
- Titik puncak $(\alpha,\beta-a)$ & $(\alpha,\beta+a)$
- Panjang sumbu mayor=$2a$
- Panjang sumbu minor=$2b$
- Persamaan direktriks $y = \beta \pm \dfrac{a^2}{c}$

***Teladan* 4.3.3.** Tentukan titik pusat, titik fokus, titik puncak, panjang sumbu mayor dan sumbu minor dari persamaan elips $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$

***Penyelesaian* :** Nyatakan terlebih dahulu persamaan elips tersebut ke dalam bentuk baku

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

$$4x^2+9y^2+16x-18y-11=0$$

$$4x^2+16x+9y^2-18y=11$$

$$4\left(x^2+4x\right)+9\left(y^2-2y\right)=11$$

$$4\left\{(x-2)^2-2^2\right\}+9\left\{(y-1)^2-1^2\right\}=11$$

$$4\left\{(x-2)^2-4\right\}+9\left\{(y-1)^2-1\right\}=11$$

$$4(x-2)^2-16+9(y-1)^2-9=11$$

$$4(x-2)^2+9(y-1)^2=11+16+9$$

$$4(x-2)^2+9(y-1)^2=36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

Dari persamaan di atas diperoleh : α = 2, β = 1, a^2 = 9 maka a = 3, b^2 = 4 maka a = 2,

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

- Pusat (α,β)= (2,1)
- Titik fokus di F_1 (α-c, β) = (2 - $\sqrt{5}$,1) & F_2 (α+c, β) = (2+ $\sqrt{5}$,1)
- Titik puncak (α-a, β) = (2-3,1) = (-1,1) & (α+a, β) = (2+3,1) = (5,1)
- Panjang sumbu mayor = 2° = 2.3 = 6
- Panjang sumbu minor = 2b = 2.2 = 4

Soal Latihan 8.

1. Diketahui elips dengan persamaan $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

   Tentukan :

   a) Koordinat titik puncak

   b) Koordinat titik fokus

   c) Panjang sumbu mayor dan sumbu minor

   d) Persamaan direktriks

   e) Nilai eksentrisitas

2. Diketahui elips dengan persamaan $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$.

   Tentukan :

   a) Koordinat titik puncak

   b) Koordinat titik fokus

   c) Panjang sumbu mayor dan sumbu minor

   d) Persamaan direktriks

   e) Nilai eksentrisitas

3. Diketahui elips dengan persamaan $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$.

   Tentukan :

   a) Koordinat titik pusat

   b) Koordinat titik puncak

   c) Koordinat titik fokus

   d) Panjang sumbu mayor dan sumbu minor

   e) Persamaan direktriks

   f) Nilai eksentrisitas

4. Tentukan titik fokus, titik puncak, eksentrisitas, persamaan direktriks, panjang sumbu mayor & minor dan panjang lactus rectum dari persamaan elips berikut:

   a. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$

   b. $x^2+4y^2=4$

   c. $2x^2+4y^2=8$

   d. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

5. Tentukan koordinat titik pusat, titik puncak, titik fokus , eksentrisitas, panjang sumbu mayor dan panjang sumbu minor dari persamaan elips berikut :

a. $\frac{(x-2)^2}{81}+\frac{(y-3)^2}{36}=1$ **c.** $6x^2+9y^2-24x-54y+51=0$

b. $\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$ **d.** $x^2+9y^2-6x-18y+9=0$

6. Tentukan persamaan elips, jika diketahui :
   a. Titik pusat (4,-2), titik puncak (9,-2) dan titik fokus (0,-2)
   b. eksentrisitas $e=\frac{2}{3}$, titik fokus (-2,3) dan (-2,-7)
   c. Titik pusat (4,0), titik fokus (4,5), dan titik puncak (4,-13)

7. Tentukan koordinat Lotus rektum, direktris, sumbu mayor dan sumbu minor pada gambar 4.3.4.
8. Tentukan persamaan elips jika salah satu verteknya (0,0) dan kedua fokusnya adalah $F_1(4,0)$ dan $F_2(6,0)$
9. Tentukan persamaan elips jika salah satu fokusnya adalah (-3,0) dan kedua Verteknya adalah $V_1(0,0)$ dan $V_2(0,2)$.
10. Tentukan persamaan elips jika salah verteknya adalah (2,3) dan kedua fokusnya adalah $F_1(2,7)$ dan $F_2(2, 10)$.
11. Tentukan persamaan elips jika salah satu fokusnya adalah (-3,4) dan kedua Verteknya adalah $V_1(-3,-1)$ dan $V_2(-3, 11)$.
12. Tentukan persamaan garis singgung pada elips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ yang gradiennya m
13. Tentukan persamaan garis singgung pada elips $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ dari titik (10, 0)
14. *). Tentukan persamaan garis singgung pada elips $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ dari sebarang titik P(x,y) di luar elips

15. Tentukan persamaan garis singgung pada elips $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$, jika gradiennya ½ .

16. Tentukan persamaan garis singgung pada elips $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ yang gradiennya sejajar dengan garis 4x + 6y – 7 = 0.

17. *). Tentukan persamaan garis singgung pada elips $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ yang membentuk sudut 45^0 dengan sumbu Y.

18. **). Tentukan persamaan garis singgung pada elips $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{36} = 1$, yang membentuk sudut 120^0 dengan sumbu X.

19. *). Tentukan persamaan elips $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ jika diputar sejauh 30^0.

20. *). Tentukan persamaan elips $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ jika diputar sejauh 45^0.

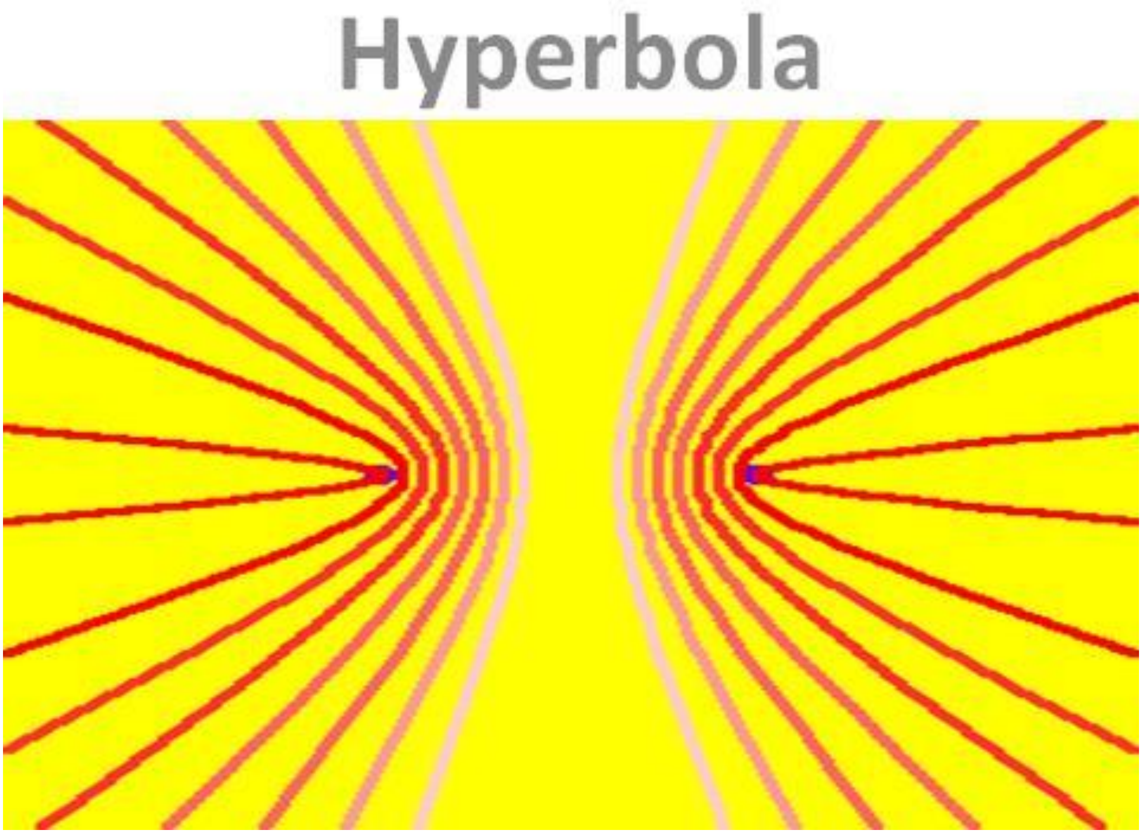
21. **). Tentukan persamaan elips $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$, jika diputar sejauh 60^0.

22. **). Tentukanlah persamaan elips $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$, jika diputar 135^0.

23. **). Tentukan persamaan elips $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$ jika diputar sejauh -45^0.

24. **). Tentukan persamaan $12x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 12 = 0$, jika diputar sejauh 210^0.

Dalam kehidupan sehari-hari, memang mungkin tidak terlalu banyak bentuk hyperbola kita jumpai, akan tetapi dalam bidang sains dan teknologi fungsi dalam bentuk hyperbola, grafik dari suatu kejadian atau banyak hal lainnya akan berupa hyperbola, maka untuk itu jugalah kita membahas konsep-dasar dari hyperbola ini.

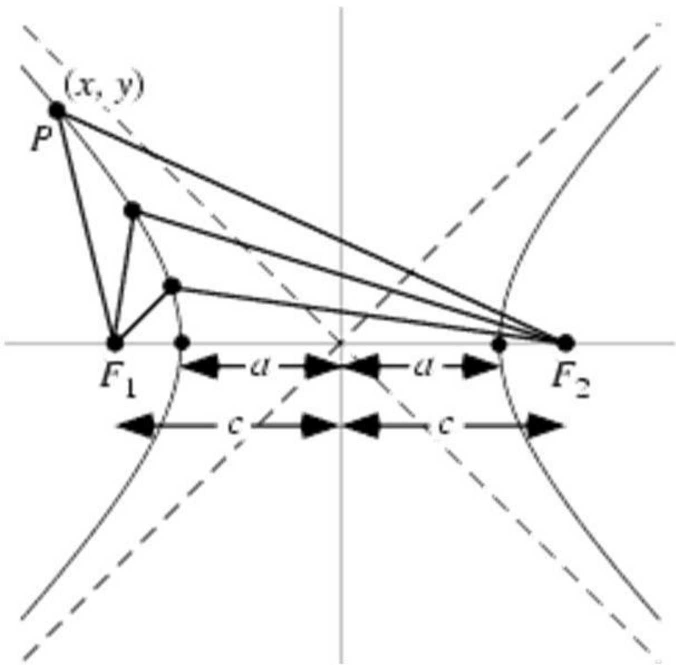


4.4. *Hyperbola*

4.4.1. *Persamaan Hyperbola yang berpusat di P*(0, 0)

Ingat kembali bahwa Hyperbola terbentuk bila perpotongan bidang Ω dengan kerucut membentuk sudut θ dengan $0 < \theta < \alpha$, yang secara umum Hyperbola dapat didefinisikan sebagai berikut

***Definisi* 4.4.1**. Hyperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu adalah tetap. Kedua titik tertentu itu disebut titik fokus.



Gambar 4.4.1

Perhatikan gambar 4.4.1, berdasarkan definisi, maka :

$PF_1 - PF_2 = k$

Selanjutnya untuk menentukan nilai k, pandang titik $P(x,y)$ berada pada salah satu verteknya, akan diperoleh $k = 2a$.

Jadi :

$PF_1 - PF_2 = 2a$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4cx + 4a^2$$

$$\pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4cx + 4a^2$$

$a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4$

$a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4$

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

Misalkan $b^2 = c^2 - a^2$,

Maka diperoleh

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

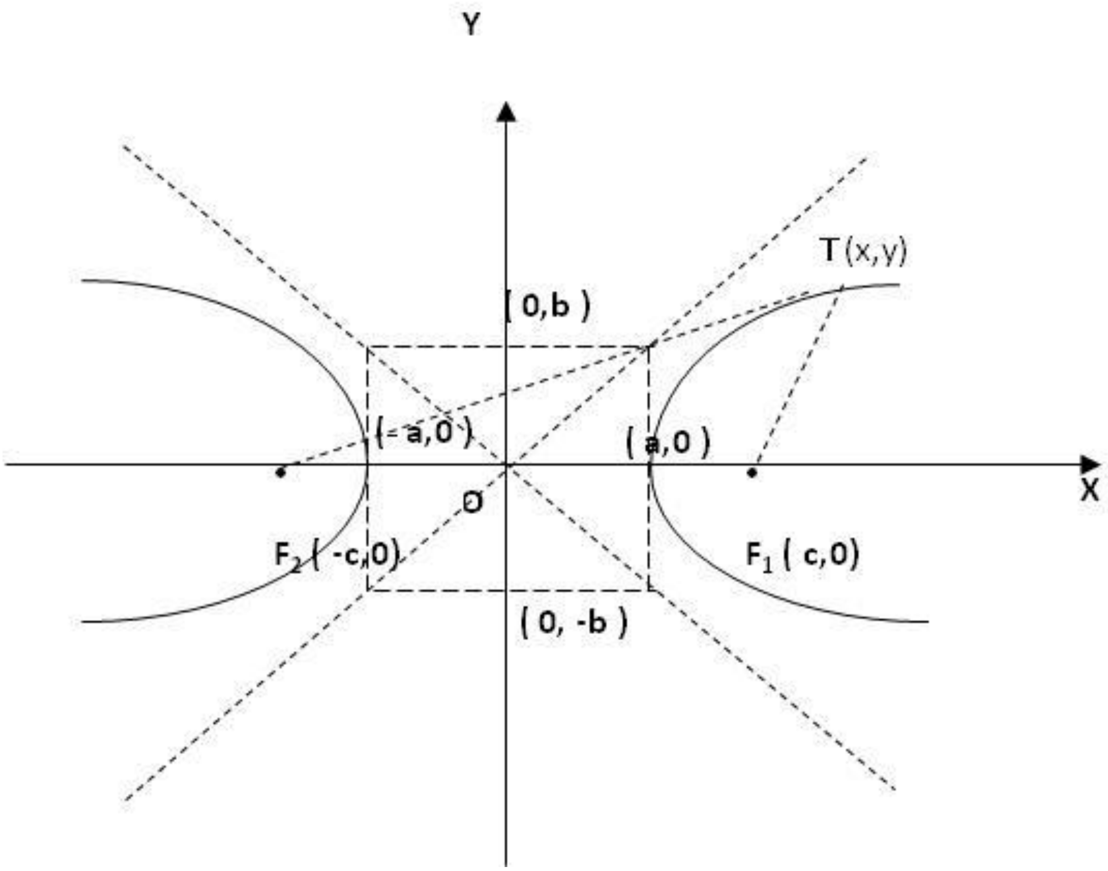
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \qquad (4.4.1)$$

Yang merupakan persamaan standart Hyperbola yang berpusat di titik $O(0,0)$.

Perhatikan bahwa tidak ada ketentuan yang mengatakan bahwa, titik fokus pertama (F_1) disebelah kiri dan sebaliknya, boleh saja titik fokus pertama F_1 dibuat disebelah kanan (perhatikan gambar 4.4.2). Selanjutnya perhatikan gambar 4.4.3, dengan cara yang sederhana dapat ditentukan berbagai koordinat yang terdapat pada sebuah Hyperbola, yaitu sebagai berikut :

Pusat (0,0)

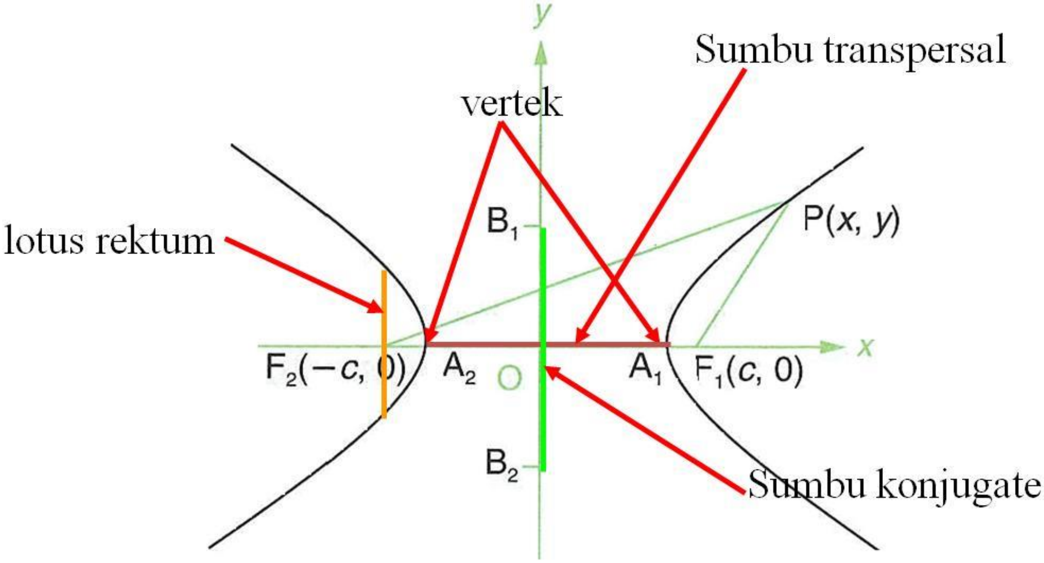
- Titik fokus $F_1(-c,0)$ & $F_2 (c,0)$
- Titik puncak $(-a,0)$ & $(a,0)$
- Panjang sumbu mayor = 2



Gambar 4.4.2

- Panjang sumbu minor = $2b$
- Persamaan asimptot : $y = \pm \frac{b}{a} x$
- Persamaan direktriks : $x = \pm \frac{a^2}{c}$
- Elektrisitas: $e = \frac{c}{a}$

- Panjang lotus rectum $= \dfrac{2b^2}{a}$
- $c^2 = a^2 + b^2$



Gambar 4.4.3

Jika gambar 4.4.3 di putar 90^0, maka akan diperoleh bentuk hyperbola yang lain yaitu seperti gambar 4.4.4 di bawah ini.

Pusat (0,0)

Titik fokus F_1(0,-c) & F_2 (0,c)

Titik puncak (0,-a) & (0,a)

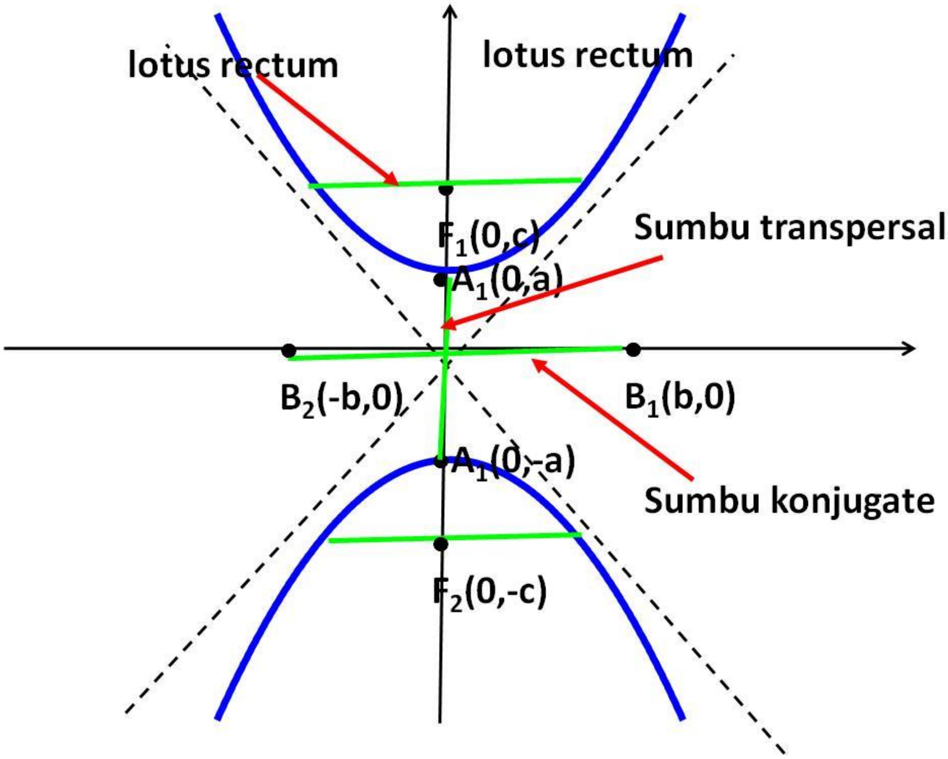
Panjang sumbu mayor = $2a$

Panjang sumbu minor = $2b$

Persamaan asimptot : $y = \pm \dfrac{a}{b} x$

Persamaan direktriks : $y = \pm \dfrac{a^2}{c}$

Sedangkan koordinat lotus rektum sebagai latihan.



Gambar 4.4.4

Dari gambar diatas, titik O merupakan pusat Hyperbola, titik F_1 & F_2 adalah focus Hyperbola, titik puncak (-a,0) & (a,0), panjang sumbu mayor = *2a* dan panjang sumbu minor = 2*b*.

Teladan* 4.4.1 *: Diketahui persamaan Hyperbola $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{25} = 1$, tentukan :

a. Koordinat titik puncak

b. Koordinat titik fokus

c. Persamaan asimptot

d. Persamaan direktriks

e. Eksentrisitas

f. Panjang lotus rectum

Penyelesaian : Dari persamaan Hyperbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, diperoleh a^2 = 16, maka a = 4 dan a^2 = 9, maka a = 3

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

a. koordinat titik puncak : (- a,0)=(- 4,0) & (a,0)=(4,0)

b. koordinat titik fokus : (- c, 0)=(-5,0) & (c,0)=(5,0)

c. persamaan asimptot : $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{4}x$

d. persamaan direktriks : $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4^2}{5}=\pm\frac{16}{5}=\pm3\frac{1}{5}$

e. eksentrisitas : $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$

f. panjang lotus rectum $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.3^2}{4}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$

Teladan 4.4.2 : Tentukan persamaan Hyperbola yang puncaknya (0,3) & (0,-3) dan fokusnya (0,5) & (0,-5).

Penyelesaian : Dari puncak (0,3) & (0,-3) diperoleh a = 3, dari fokus (0,5) & (0,-5) diperoleh c = 5.

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$$

Jadi persamaan Hyperbolanya adalah $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{4^2}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

Untuk memperoleh persamaan parabola dengan titik pusat (*h*,*k*), cukup gambar 4.4.3 kita geser sejauh *h* pada sumbu *X* dan sejauh *k* pada sumbu *Y*. Maka akan diperoleh persamaan parabola sebagai berikut :

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

4.4.2. *Persamaan Hyperbola yang berpusat di P(α, β)*

Untuk Hyperbola yang berfokus pada sumbu utama dan sejajar sumbu *X*, persamaan Hyperbolanya adalah :

$$\frac{\left(x-\alpha\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y-\beta\right)^2}{b^2} = 1$$

dengan :

- Pusat (α,β)
- Titik fokus F_1(α - *c*, β) & F_2 (α + *c*, β)
- Titik puncak (α - *a*, β) & (α + *a*, β)
- Panjang sumbu mayor = 2*a*
- Panjang sumbu minor = 2*b*
- Persamaan asimptot : $y-\beta = \pm\frac{b}{a}\left(x-\alpha\right)$
- Persamaan direktriks : $x = \alpha \pm \frac{a^2}{c}$

Untuk Hyperbola yang berfokus pada sumbu utama dan sejajar sumbu y, persamaan Hyperbolanya adalah :

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$$

Dengan :

- Pusat (α,β)
- Titik fokus $F_1(\alpha, \beta - c)$ & $F_2(\alpha, \beta + c)$
- Titik puncak $(\alpha, \beta - a)$ & $(\alpha, \beta + a)$
- Panjang sumbu mayor = $2a$
- Panjang sumbu minor = $2b$
- Persamaan asimptot : $y-\beta=\pm\frac{a}{b}(x-\alpha)$
- Persamaan direktriks : $y=\beta\pm\frac{a^2}{c}$

***Teladan* 4.4.3** :

Diketahui persamaan Hyperbola $-4x^2+3y^2-24x-18y+27=0$. Tentukan:

a. koordinat titik pusat
b. koordinat titik puncak
c. koordinat titik fokus
d. persamaan asimptot
e. persamaan direktriks

***Penyelesaian* :** Nyatakan terlebih dahulu persamaannya ke dalam bentuk baku

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

$$-4x^2+3y^2-24x-18y+27=0$$

$$-4x^2-24x+3y^2-18y=-27$$

$$-4(x^2+6x)+3(y^2-6y)=-27$$

$$-4\left\{(x+3)^2-3^2\right\}+3\left\{(y-3)^2-3^2\right\}=-27$$

$$-4\left\{(x+3)^2-9\right\}+3\left\{(y-3)^2-9\right\}=27$$

$$-4(x+3)^2+36+3(y-3)^2-27=-27$$

$$-4(x+3)^2+3(y-3)^2=-27+27-36$$

$$-4(x+3)^2+3(y-3)^2=-36$$

$$4(x+3)^2-3(y-3)^2=36$$

$$\frac{(x+3)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{12}=1$$

Dari persamaan di atas, diperoleh $\alpha=-3$ *dan* $\beta=3$, a^2 = 9, maka a = 3 dan b^2 = 12,

maka b= $2\sqrt{3}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+12}=\sqrt{21}$

a. Koordinat titik pusat (α,β)=(-3,3)

b. Koordinat titik puncak (α - a, β) = (-3-3, -3) = (-6,-3) & (α + a, β) = (-3+3,-3) = (0,-3)

c. Koordinat titik fokus : F_1(α - c, β) = (-3-$\sqrt{21}$,3) & F_2 (α + c, β) = -3+$\sqrt{21}$, 3)

d. Persamaan asimptot : $y-\beta=\pm\frac{b}{a}(x-\alpha) \Leftrightarrow y-3=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+3)$

e. Persamaan direktriks :

$$x=\alpha\pm\frac{a^2}{c} \Leftrightarrow x=-3\pm\frac{3^2}{\sqrt{21}} \Leftrightarrow x=-3\pm\frac{9}{\sqrt{21}} \Leftrightarrow x=-3\pm\frac{3}{7}\sqrt{21}$$

Soal Latihan 9.

1. Suatu Hyperbola dengan persamaan $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

   Tentukan :

   a) Koordinat puncak
   b) Koordinat titik fokus
   c) Nilai eksentrisitas
   d) Persamaan garis direktriks
   e) Persamaan garis asymtot

2. Diketahui Hyperbola : $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$

   a) Titik pusat
   b) Titik puncak
   c) Persamaan sumbu utama dan sekawan
   d) Persamaan asymtot
   e) Titik fokus
   f) Eksentrisitas
   g) Persamaan direktriks

3. Tentukan koordinat titik pusat, koordinat titik fokus, koordinat titik puncak dan persamaan asimptot dari persamaan Hyperbola berikut

   a. $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$

   b. $9x^2-4y^2=36$

   c. $\frac{(y-2)^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{4}=1$

   d. $4x^2-9y^2+8x-18y-41=0$

4. Tentukan persamaan Hyperbola yang memenuhi ketentuan berikut :

   a. Titik fokus : (8,0) dan (-8,0); titik puncak (6,0) dan (-6,0)

   b. Titik fokus : (3,0) dan (-3,0); persamaan asimptot $y=\pm 2x$.

   c. Titik puncak : (6,0) dan (-6,0); persamaan asimptot $y=\pm\frac{1}{2}x$

5. Tentukan koordinat lotus rektum gambar 4.4.4

6. Tentukan koordinat titik pusat, koordinat titik fokus, koordinat titik puncak dan persamaan asimptot dari persamaan Hyperbola berikut :

   d. $\frac{x^2}{4}-\frac{(y-6)^2}{8}=1$

   c. $4x^2-y^2+56x+2y+191=0$

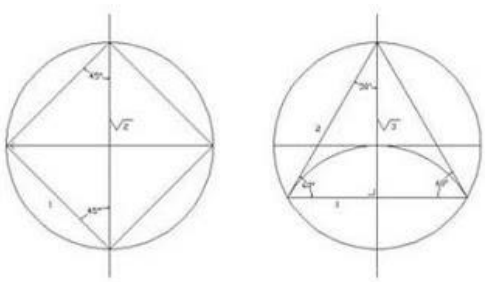
e. $\frac{(x-5)^2}{20}-\frac{(y+3)^2}{16}=-1$ d. $4y^2-9x^2+16y+18x-29=0$

7. Tentukan koordinat lotus rectum gambar 4.4.5 dan 4.4.6.
8. Tentukan persamaan hyperbola jika salah satu vertek adalah (2,3) dan kedua fokusnya adalah $F_1(0,3)$ dan $F_2(10,3)$.
9. Tentukanlah persamaan hyperbola jika salah satu fokusnya (0,0) dan kedua verteknya adalah $V_1(-8,0)$ dan $V_2(-2,0)$.
10. Tentukanlah persamaan hyperbolah jika salah satu verteknya adalah (0,1), dan kedua fokusnya adalah $F_1(0,-7)$ dan $F_2(0,4)$.
11. Tentukanlah persamaan hyperbola jika salah satu fokusnya (-2,2) dan kedua verteknya adalah $V_1(-2,-1)$ dan $V_2(-2,-3)$.
12. *). Tentukan persamaan hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ jika diputar sejauh 30^0.
13. *). Tentukan persamaan hyperbola $\frac{x^2}{25}-y^2=1$ jika diputar sejauh 120^0.
14. **). Tentukan persamaan hyperbola $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ jika diputar sejauh 120^0.
15. **). Tentukan persamaan hyperbola $\frac{(x-1)^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$ digeser sejauh 3 satuan ke kiri dan 6 satuan ke kanan, kemudian diputar sejauh 45^0.
16. **). Tentukan persamaan hyperbola $4y^2 - 4y + x^2 + 100 = 0$, jika diputar sejauh 45^0.

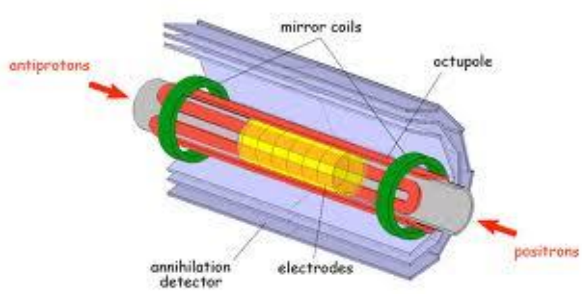
BAB
V

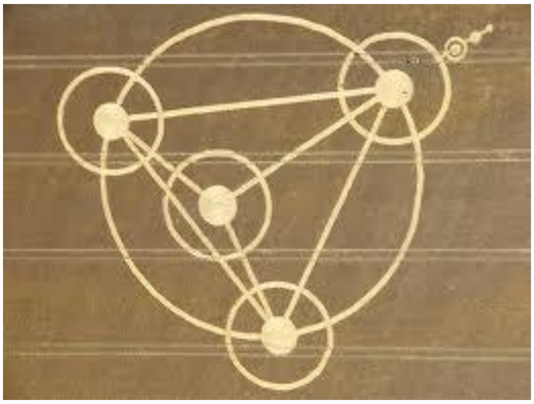
LINGKARAN I

Dalam kehidupan, kita akan banyak sekali menjumpai ataupun terlibat dalam masalah lingkaran, kalau dalam suatu pipa besar akan dimuat untuk mengalirkan minyak dari tempat pengeboran ke kilang produksi. Jika di dalam pipa tersebut juga mesti dibuat pipa kecil sedangkan diantara pipa kecil dan pipa bersar tersebut mesti dibuat wadah dalam bentuk segitiga yang digunakan untuk pemanasan agar minyak tadi tidak membeku, persoalannya adalah berapa ukuran pipa besar dan pipa kecil yang mesti kita buat supaya hasilnya maksimal.



Gambar 7. Sistem proporsi √2 dan √3




The Jakarta Herald

BAB V

LINGKARAN I

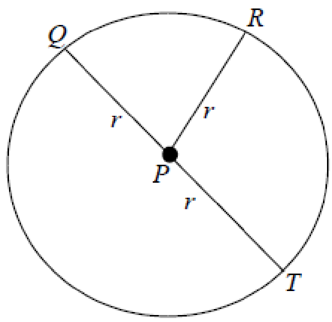
5.1. *Sifat Dasar*

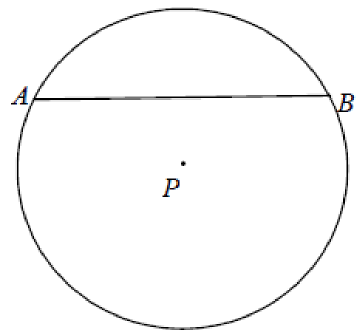
Kita mengetahui sangat banyak sekali konsep geometry yang ada pada lingkaran. Mulai dari lingkaran dalam, lingkaran luar serta berbagai ketaksamaan terdapat pada lingkaran, sehingga banyak sekali teorema yang terdapat pada lingkaran ini. Baik itu yang terkait dengan ukuran jari-jari lingkaran luar dan lingkaran dalam. Berikut ini akan dibahas beberapa sifat dasar dari suatu lingkaran.

Lingkaran.

Lingkaran adalah himpunan semua titik-titik yang membentuk lengkungan tertutup, dimana titik-titik pada lengkungan tersebut berjarak sama terhadap suatu titik tertentu, titik tertentu tersebut disebut titik pusat lingkaran. Untuk lebih jelasnya mengenai pengertian lingkaran, tali busur lingkaran, dan beberapa teorema pada lingkaran maka akan dijelaskan pada definisi dan teorema berikut.

***Definisi* 5.1.1.** Misalkan P adalah sebuah titik dari sebuah bidang yang diberikan, dan misalkan r adalah bilangan positif. Lingkaran dengan *pusat P dan jari-jari r* adalah himpunan semua titik dari bidang tersebut yang mempunyai jarak dari P adalah sama dengan r.





Gambar 5.1.1a

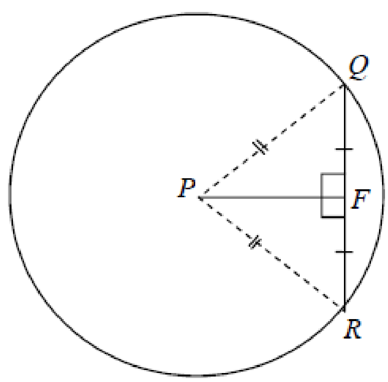
Gambar 5.1.1b

***Definisi* 5.1.2.** Sebuah *tali busur* adalah suatu segmen garis yang mempunyai titik akhir yang berada pada lingkaran.

. Pada lingkaran terdapat beberapa teorema yang sering dijumpai dalam geometri, seperti teorema *sudut pusat*, sudut keliling, dan sebagainya. Berikut diberikan beberapa teorema tersebut.

***Teorema* 5.1.1.** Garis yang tegak lurus dari pusat lingkaran ke suatu tali busur membagi dua sama besar tali busur tersebut.

***Bukti*:** Perhatikan gambar 5.1.3, misalkan PF adalah garis yang tegak lurus dengan tali busur QR yang ditarik dari pusat lingkaran P, maka $FQ = FR$. Akan dibuktikan $FQ = FR$. Dari pusat P ditarik pula garis yang menghubungkan titik-titik P, Q, dan R, sehingga diperoleh PQ dan PR yang merupakan jari-jari lingkaran sehingga diperoleh ΔPQR yang merupakan segitiga sama kaki, sehingga



Gambar 5.1.3

$m\angle PQF = m\angle PRF$ …(5.1.1)

Pada ΔPQF dan ΔPRF, PF adalah segmen garis yang sama sehingga PF kongruen diri sendiri yaitu

$PF \cong PF$ (S)

Karena $PF \perp QR$ maka $m\angle PFR = m\angle PFQ = 90^0$ sehingga

$\angle PFR \cong \angle PFQ$ (Sd)

Dan dari persamaan (5.1.1) diperoleh

$\angle PQF \cong \angle PRF$ (Sd)

Sehingga dari Postulat 3.3.1 Kongruensi S-Sd-Sd diperoleh bahwa

$\Delta PQF \cong \Delta PRF$,

Jadi terdapat sisi yang berkorespondensi kongruen, yaitu

$FQ \cong FR$ atau $FQ = FR$. ▼

Di dalam lingkaran terdapat sudut pusat dan sudut keliling. Sudut pusat lingkaran adalah sudut yang dibentuk oleh dua jari-jari lingkaran, sedangkan sudut keliling lingkaran adalah sudut yang dibentuk dari gabungan dua buah tali busur pada keliling lingkaran. Berikut ini akan dijelaskan mengenai Teorema sudut pusat dan Teorema sudut keliling.

Teorema 5.1.2 Misalkan AB adalah tali busur sebuah lingkaran yang berpusat di O yang mana AB bukan diameternya, dan misalkan C adalah sebarang titik pada lingkaran yang berbeda dari A dan B maka

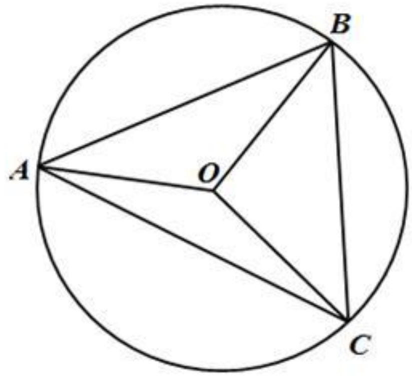
a) Jika C dan O berada pada sisi yang sama dari AB maka $\angle AOB = 2\angle ACB.$
b) Jika C dan O berada pada sisi-sisi berhadapan dari AB maka $\angle AOB = 360^0 - 2\angle ACB.$

Bukti. Misalkan *AB* adalah sebuah tali busur sebuah lingkaran yang berpusat di *O* yang mana *AB* bukan diameternya, dan *C* adalah sebarang titik pada lingkaran yang berbeda dari *A* dan *B*.

a) Misalkan C dan O berada pada sisi yang sama dari AB. Akan ditunjukkan bahwa $\angle AOB = 2\angle ACB$ dalam tiga kasus.

Kasus 1.

Lukis garis *AO*, *OB*, *AC* dan *BC*. Misalkan *AC* dan *BC* berturut-turut tidak memotong jari-jari *OB* dan *OA*. Lihat gambar 5.1.4.



gambar 5.1.4

Pada $\Delta AOB, \Delta AOC,$ dan ΔBOC berturut-turut diperoleh

$$\angle AOB = 180^0 - (\angle OAB + \angle OBA), \quad ...(5.1.1)$$

$$\angle AOC = 180^0 - (\angle OAC + \angle OCA) \quad ...(5.1.2)$$

dan

$$\angle BOC = 180^0 - (\angle OBC + \angle OCB) \quad ...(5.1.3)$$

Selain itu, juga diperoleh

$$\angle AOB = 360^0 - (\angle AOC + \angle BOC). \quad ...(5.1.4)$$

Jika persamaan (5.1.2) dan (5.1.3) disubtitusikan ke persamaan (5.1.4) maka diperoleh

$$\angle AOB = \angle OAC + \angle OCA + \angle OBC + \angle OCB. \quad ...(5.1.5)$$

Pada gambar 5.1.4, *OA*=*OC* dan *OB*=*OC*. Maka berturut-turut diperoleh

$$\angle OAC = \angle OCA \quad ...(5.1.6)$$

dan

$$\angle OBC = \angle OCB. \quad ...(5.1.7)$$

Dengan mensubtitusi persamaan (5.1.6) dan (5.1.7) ke persamaan (5.1.5) maka diperoleh

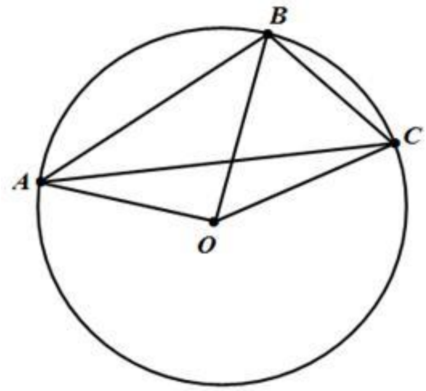
$$\angle AOB = 2(\angle OCA + \angle OCB) = 2\angle ACB.$$

Kasus 2.

Lukis garis *AO*, *OB*, *AC* dan *BC*. Misalkan *AC* memotong jari-jari *OB*. Lihat gambar 5.1.5. Pada $\Delta AOB,\ \Delta AOC,$ dan ΔBOC diperoleh persamaan (5.1.1), (5.1.2) dan (5.1.3). Jika persamaan (5.1.1) dikurangi dengan persamaan (5.1.2) maka diperoleh

$$\angle OAB - \angle OAC = \angle OCA + \angle AOC - \angle OBA - \angle AOB \qquad ...(5.1.8)$$

Jika persamaan (5.1.3) juga dikurangi dengan persamaan (5.1.2) maka diperoleh



gambar 5.1.5

$$\angle OCB - \angle OCA = \angle OAC + \angle AOC - \angle OBC - \angle BOC. \qquad ...(5.1.9)$$

Namun, jika persamaan (5.1.1) dijumlahkan dengan persamaan (5.1.3) maka diperoleh

$$\angle OBA + \angle OBC = 360^0 - \angle OAB - \angle AOB - \angle OCB - \angle BOC. \qquad ...(5.1.10)$$

Dengan menjumlah persamaan (5.1.8), (5.1.9) dan (5.1.10) maka diperoleh

$$(\angle OAB - \angle OAC) + (\angle OCB - \angle OCA) + (\angle OBA + \angle OBC) = 180^0. \qquad ..(5.1.11)$$

Dengan mensubtitusi persamaan (5.1.11) ke persamaan (5.1.1) maka diperoleh

$$\angle AOB = -\angle OAC + \angle OCB - \angle OCA + \angle OBC. \qquad ...(5.1.12)$$

Pada gambar 6, *OA*, *OB* dan *OC* adalah jari-jari lingkaran sehingga *OA*=*OC* dan *OB*=*OC*. Maka diperoleh persamaan (5..1.6) dan (5.1.7). Jika persamaan (5.1.6) dan (5.1.7) disubtitusikan ke persamaan (5.1.12) maka diperoleh

$$\angle AOB = 2(\angle OCB - \angle OCA)$$
$$= 2\angle ACB.$$

Kasus 3.

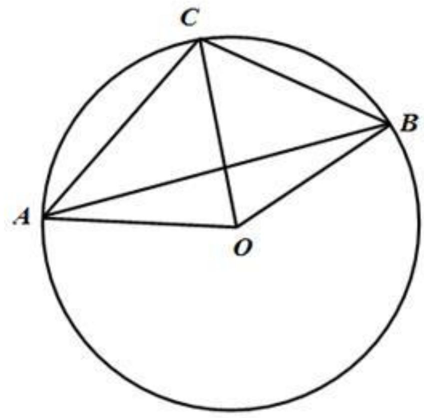
Lukis garis *AO*, *OB*, *AC* dan *BC*. Misalkan *BC* memotong *OA*. Dengan cara serupa dengan pembuktian pada kasus 2, maka diperoleh $\angle AOB = 2\angle ACB$.

b) Misalkan C dan O berada pada sisi-sisi berhadapan dari *AB*. Akan ditunjukkan bahwa $\angle AOB = 360^0 - 2\angle ACB$. Pertama, Lukis garis *AO, OB, AC, CB* dan *OC*. Lihat gambar 5.1.6.

Karena *C* dan *O* berada pada sisi-sisi berhadapan dari *AB*, maka diperoleh

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC \qquad ...(5.1.13)$$

Dengan mensubtitusi persamaan (5.1.2) dan (5.1.3) ke persamaan (5.1.13) maka diperoleh



gambar 5.1.6

$$\angle AOB = 360^0 - (\angle OAC + \angle OCA + \angle OCB + \angle OBC). \qquad ...(5.1.14)$$

Terakhir, dengan mensubtitusi persamaan (5.1.6) dan (5.1.7) ke persamaan (2.14) maka diperoleh

$$\angle AOB = 360^0 - 2(\angle OCA + \angle OCB)$$
$$= 360^0 - 2\angle ACB. \qquad \square$$

***Teorema* 5.1.3.** Sudut keliling yang menghadap busur yang sama mempunyai besar yang sama.

***Bukti*:** Gambar 5.1.7. Sudut keliling yang menghadap busur yang sama. Perhatikan gambar 5.1.7, $\angle APB$ dan $\angle AQB$ adalah sudut keliling yang menghadap busur yang sama yaitu busur *AB*. Dengan menarik garis *AO* dan *OB* sehingga membentuk $\angle AOB$ yang merupakan sudut pusat lingkaran yang juga menghadap busur *AB*. Akan dibuktikan $m\angle APB = m\angle AQB$. Dari teorema 5.1.2 diperoleh :

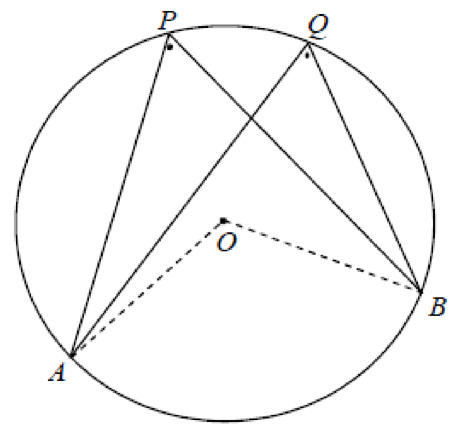
$$m\angle AOB = 2m\angle APB \qquad …(5.1.15)$$

$$m\angle AOB = 2m\angle AQB \qquad …(5.1.16)$$

Dari persamaan (5.1.15) dan (5.1.16) diperoleh

$$2m\angle APB = 2m\angle AQB$$

$$m\angle APB = m\angle AQB \qquad \heartsuit$$



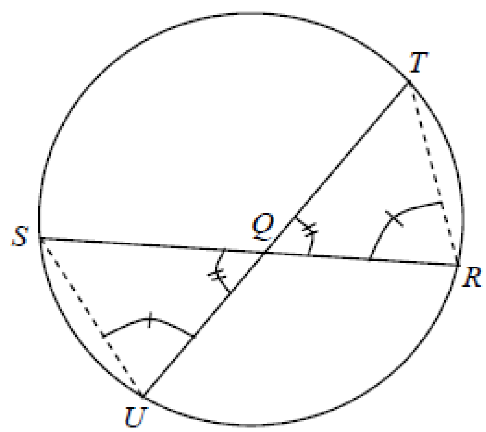
Gambar 5.1.7

Pada tali busur lingkaran, apabila terdapat dua buah tali busur yang berpotongan di satu titik, maka diperoleh perkalian yang senilai, seperti yang dijelaskan pada Teorema perpotongan dua tali busur berikut.

***Teorema* 5.1.4.** Misalkan RS dan TU adalah tali busur dari lingkaran yang sama yang berpotongan di Q, maka $QR\,.QS = QU\,.QT$

***Bukti*:** Gambar 5.1.8. Lingkaran dengan RS dan TU yang berpotongan di titik Q. Pada ΔQSU dan ΔQTR. Karena $\angle SUT$ dan $\angle TRS$ sama-sama menghadap busur ST, maka menurut Teorema 5.1.3 diperoleh

$$\angle QUS = \angle QRT \qquad \text{(Sd)}$$



Gambar 5.1.8

Dan juga $\angle SQU$ dan $\angle TQR$ adalah sudut yang bertolak belakang, sehingga diperoleh

$\angle SQU = \angle TQR$ (Sd)

Dari Akibat Teoremai 3.1.3 kesebangunan Sd-Sd diperoleh

$\Delta SQU \sim \Delta TQR$

Sehingga terdapat sisi-sisi yang proporsional antara ΔSQU dan ΔTQR, yaitu

$$\frac{QS}{QT} = \frac{QU}{QR}$$

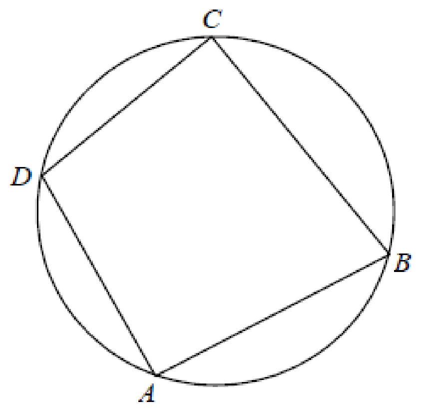
$$QR\,.QS = QU\,.QT \qquad \blacklozenge$$

Pada tali busur lingkaran juga dikenal istilah mengenai segiempat tali busur, yaitu segiempat yang dibentuk oleh perpotongan empat buah tali busur pada keliling lingkaran. Segiempat talibusur sering juga disebut *segiempat siklik*, yang dijelaskan pada definisi dan teorema berikut.

***Definisi* 5.1.3.** *Segiempat tali busur* adalah sebuah segiempat yang keempat titik sudutnya terletak pada keliling lingkaran.

Perhatikan □ *ABCD* pada gambar 5.1.9, *ABCD* disebut segiempat tali busur karena titik

A, *B*, *C*, dan *D* terletak pada keliling suatu lingkaran.



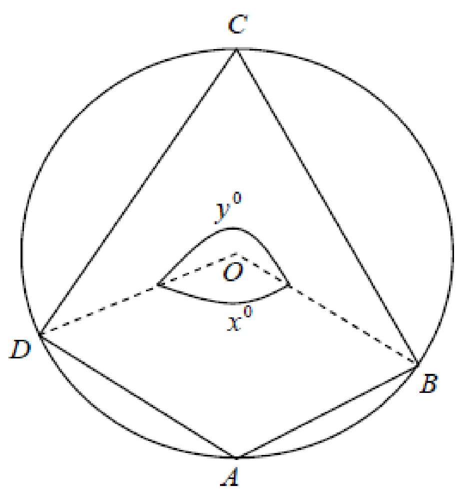
gambar 5.1.9

***Teorema* 5.1.5.** Dalam segiempat tali busur sudut-sudut yang berhadapan adalah sama dengan sudut pelurus.

***Bukti*:** Perhatikan □ *ABCD* pada gambar 5.1.10, *ABCD* adalah segiempat tali busur, dimana $\angle A$ berhadapan dengan $\angle C$ dan $\angle B$ berhadapan dengan $\angle D$ maka

$m\angle A + m\angle C = 180^0$ dan $m\angle B + m\angle D = 180^0$. Misalkan *O* adalah titik pusat lingkaran, dan dari titik pusat *O* ditarik garis ke titik *D* dan *B* pada *ABCD*.

sehingga $\angle BCD$ dan $\angle BOD$ sama-sama menghadapbusur *BAD*, dan $\angle BAD$ dan $\angle DOB$ sama-sama menghadap busur *BCD*



gambar 5.1.10

1. Perhatikan $\angle BCD$ dan $\angle BOD$ yang saling menghadap busur *BAD*. Misalkan $m\angle BOD = x^0$, maka dari Teorema 5.1. 2 diperoleh

$$X^0 = 2m\angle BCD \qquad \ldots(5.1.17)$$

2. Perhatikan $\angle BAD$ dan $\angle DOB$ yang saling menghadap busur *BCD*. Misalkan $m\angle DOB = y^0$, maka diperoleh

$$y0 = 2m\angle BAD \qquad \ldots(5.1.18)$$

Jumlah sudut yang terdapat pada pusat lingkaran adalah

$$x^0 + y^0 = 360^0 \qquad \ldots(5.1.19)$$

Dari persamaan (5.1.17), (5.1.18) dan (5.1.19) diperoleh

$$x^0 + y^0 = 2m\angle BCD + 2m\angle BAD$$

$$360^0 = 2(m\angle BCD + m\angle BAD)$$

$$180^0 = m\angle BCD + m\angle BAD$$

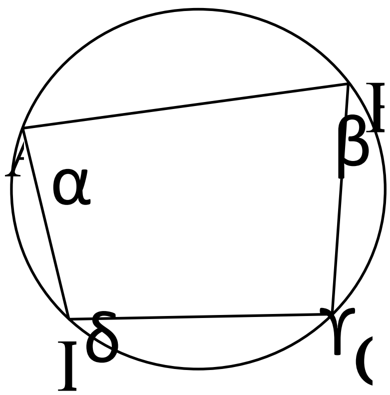
$$m\angle A + m\angle C = 180^0$$ ♥

Cara lain untuk membuktikan teorema di atas adalah, misalkan titik D berada dalam lingkaran, maka akan dapat ditunjukkan $\angle B + \angle C > 180^0$, kemudian kalau dimisalkan titik D berada diluar lingkaran maka akan diperoleh $\angle B + \angle C < 180^0$. Maka kalau begitu berlakulah $\angle B + \angle C = 180^0$. Pernyataan tersebut sering ditulis dalam bentuk teorema berikut ini :

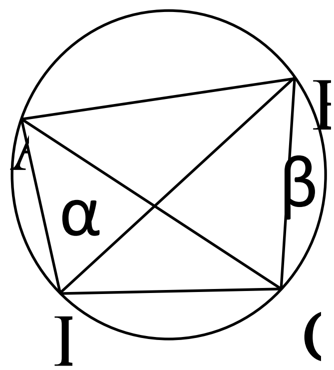
***Teorema* 5.1.6** : Segiempat $ABCD$ adalah siklik jika dan hanya jika $\angle DAC = \angle DBC$.

Bukti : Sebagai latihan,

Sebagai bantuan perhatikan gambar 5.1.11a dan gambar 5.1.11b di bawah. Untuk kasus khusus di ambil tali busur yang panjangnya sama (perhatikan gambar 5.1.12), dan memisalkan O titik pusat lingkaran serta dengan menggunakan konsep kesebangunan akan ditunjukkan bahwa panjang sisi OE = OF. Kemudian pada gambar 5.1.13 kita belakukan untuk panjang talibusur yang berbeda.

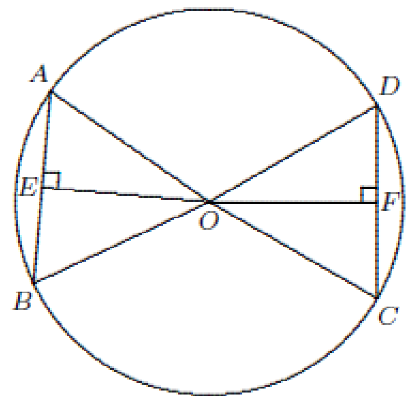


Gambar 5.1.11a



Gambar 5.1.11a

Perhatikan 5.1.12 misalkan AB dan *CD* adalah busur pada lingkaran yang panjang busurnya adalah sama dengan kata lain $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, maka akan berlaku panjang sisi AB sama dengan panjang sisi *CD* (*AB* = *CD*). Sehingga dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\angle AOB = \angle COD$, juga dapat ditunjukkan bahwa $\angle OAE = \angle OCF$ serta $\angle OBE = \angle ODF$. Yang ahirnya juga berlaku $OE = OF$.



Gambar 5.1.12

Kalau di atas adalah untuk dua buah busur yang panjangnya sama, berikut ini kita bahas hubungan yang berlaku untuk panjang dua buah busur yang tidak sama. Perhatikan 5.1.13. Misalkan

$$\widehat{AB} > \widehat{CD},$$

maka pastilah akan berlaku

$$AB > CD.$$

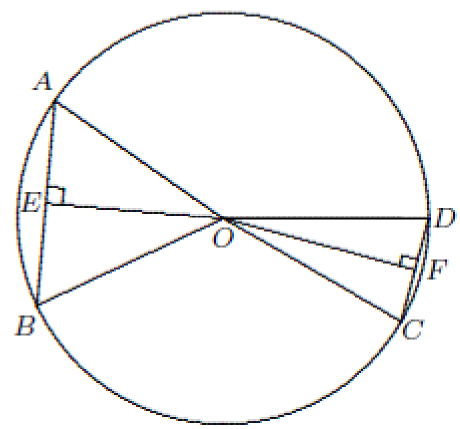
Serta

$$\angle AOB > \angle COD,$$

akan tetapi

$$OE < OF$$

dalam artian *OE* lebih pendek dari *OF*. Pembaca juga dapat menunjukkan bahwa :



Gambar (5.1.13)

$$\angle AOE = \angle BOE > \angle DOF = \angle COF,$$

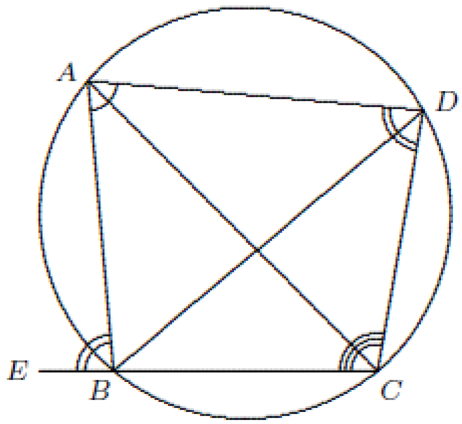
yang mengakibatkan bahwa

$$\angle FDO = \angle FCO > \angle EAO = \angle EBO.$$

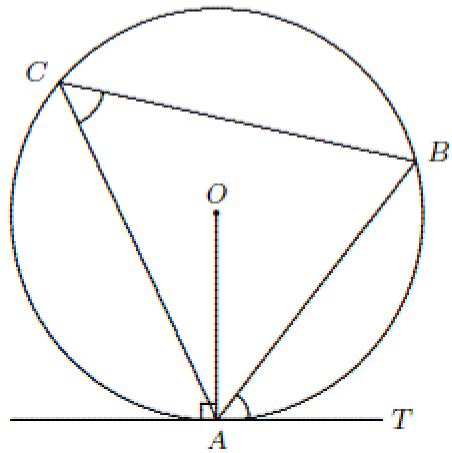
Perhatikan 5.1.14a di bawah. Maka bila *ABCD* adalah segiempat konvek, maka bila *ABCD* juga merupakan segiempat siklik dan $\angle BAC = \angle BDC$ (harap dibuktikan bagi yang belum memahaminya).

$$\angle A + \angle C = 180^0 = \angle B + \angle D.$$

Hal ini mengakibatkan bahwa $\angle ABE = \angle D$. sedangkan pada 5.1.14b, pandang bahwa *A*, *B* dan *C* berada pada lingkaran atau lingkaran tersebut merupakan lingkaran luar dari segitiga *ABC*. Bila *TA* merupakan garis singgung pada lingkaran di titik *A*, dengan *O* adalah titik pusat lingkaran luar, maka haruslah berlaku $OA \perp AT$ dan di dalam berbagai buku geometri tingkat sekolah menengah sudah ditunjukkan bahwa $\angle BAT = \angle BCA$.



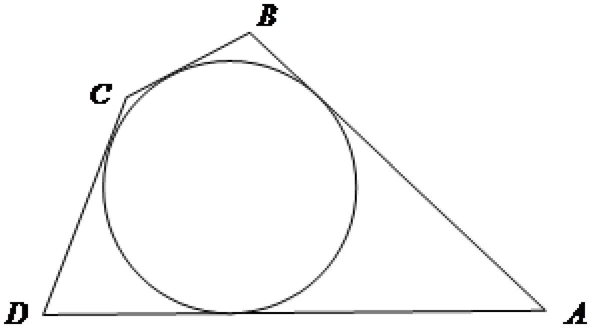
5.1.14a



5.1.14b

Berikut ini akan dibahas tentang segiempat yang memuat sebuah lingkaran dalam (disebut juga segiempat *Circumscriptible*) dan segiempat yang memuat sebuah lingkaran luar (disebut juga segiempat Siklik). Berikut diberikan definisi segiempat *Circumscriptible*.

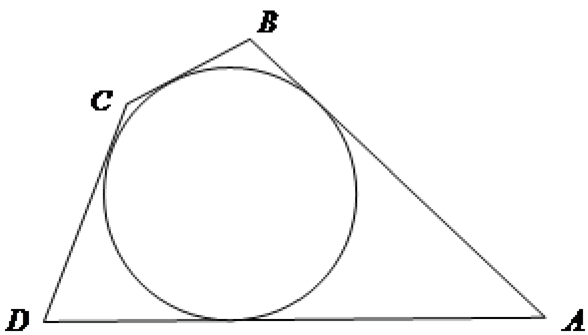
Definisi 5.1.3 Segiempat *Circumscriptible* adalah segiempat yang memuat sebuah lingkaran dalam (*Incircle of the Quadrilateral*) sehingga menyinggung keempat sisi segiempat. Lihat gambar 5.1.15



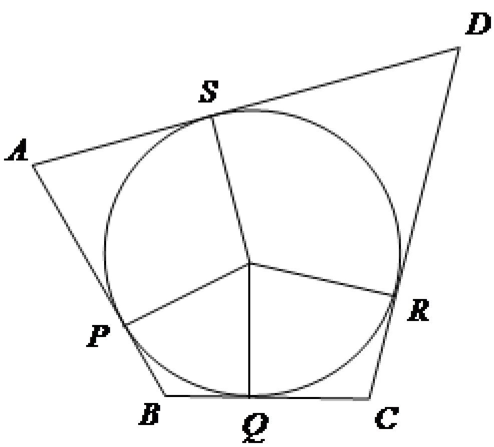
Gambar 5.1.15.

Sebagaimana yang telah disebutkan sebelumnya bahwa tidak semua segiempat adalah *Circumscriptible*. Oleh karena itu, agar suatu segiempat menjadi *Circumscriptible* maka tentulah memerlukan syarat tertentu. Berikut ini diberikan teorema yang menunjukkan syarat untuk suatu segiempat agar menjadi *Circumscriptible*.

Teorema 5.1.7 Suatu segiempat adalah *Circumscriptible* jika dan hanya jika dua pasang sisi-sisi yang berhadapan mempunyai jumlah panjang yang sama.



gambar 5.1.16.



Gambar 5.1.17.

Bukti. Misalkan segiempat *ABCD* adalah *Circumscriptible.* Akan ditunjukkan bahwa $AB + CD = BC + DA$. Karena segiempat *ABCD* adalah *Circumscriptible* maka

AB, BC, CD dan AD masing-masing menyinggung lingkaran di titik P, Q, R dan S. Lihat gambar 5.1.17.

Perhatikan ΔAPO dan ΔASO. OP dan OS adalah jari-jari lingkaran sehingga masing-masing tegak lurus ke sisi AB dan AD. Karena $OP=OS$ dan $OA=OA$. Menggunakan prinsip Pythagoras, maka diperoleh $AP = AS$. Dengan cara yang sama untuk ΔBQO dan ΔBPO, ΔCRO dan ΔCQO, dan ΔDSO dan ΔDRO, maka diperoleh $BP = BQ, CQ = CR$ dan $DR = DS$. Sehingga (Lihat gambar 5.1.18)

$$\begin{aligned} AB + CD &= AP + PB + CR + RD \\ &= AS + BQ + CQ + DS \\ &= BQ + QC + DS + SA \\ &= BC + DA. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$. Sebaliknya, misalkan $AB + CD = BC + DA$. Akan ditunjukkan bahwa segiempat $ABCD$ adalah *Circumscriptible*. Misalkan $AB < AD$. Maka

$$\begin{aligned} AB+CD &< AD+CD \\ BC+DA &< AD+CD \\ BC &< CD. \end{aligned}$$

Karena $AB < AD$ dan $BC < CD$,

Maka dapat dipilih titik X di AD

dan Y di CD sehingga $AX = AB$

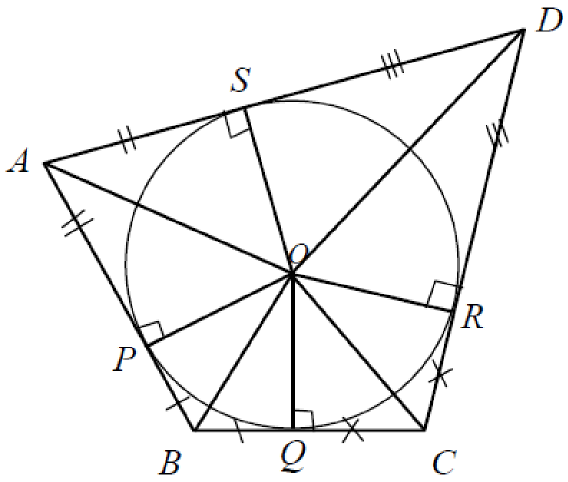
dan $CY = BC$

kemudian karena

$$AB + CD = BC + DA$$

maka

$$AB + CY + YD = BC +$$



Gambar 5.1.18.

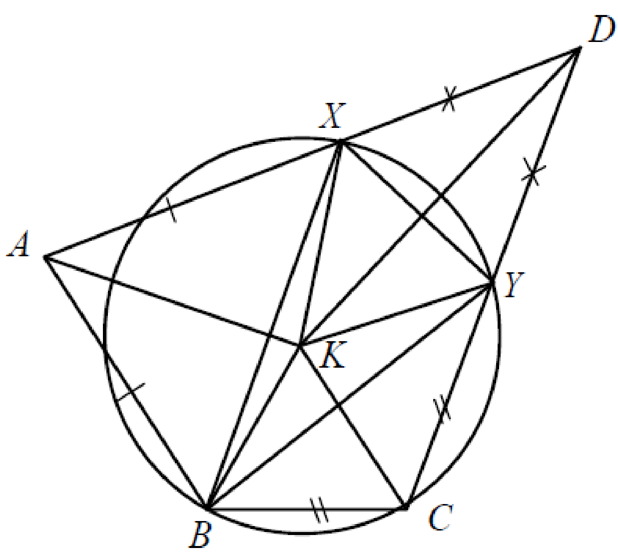
$AX + XD$

$AB + BC + YD = BC +$
$AB + XD$

$$YD = XD.$$

Misalkan K adalah titik pusat lingkaran luar ΔBXY. Lihat gambar 5.1.19

Karena $AX = AB$, $KX = KB$ dan $AK = AK$ maka ΔAKX dan ΔAKB berkorespondensi SSS sehingga $\Delta AKX \cong \Delta AKB$. Dengan cara yang sama diperoleh $\Delta DKX \cong \Delta DKY$ dan $\Delta CKY \cong \Delta CKB$.



gambar 5.1.19

Karena $\Delta AKX \cong \Delta AKB$, $\Delta DKX \cong \Delta DKY$ dan $\Delta CKY \cong \Delta CKB$ maka AK, DK dan CK adalah bisektor sudut A, D dan C.

Sehingga

$$\angle KAX = \angle KAB, \angle KDX = \angle KDY$$

dan

$$\angle KCY = \angle KCB.$$

Apabila ditarik garis tegak lurus dari titik K ke sisi-sisi AB, AD, CD dan BC sehingga berpotongan di titik E, F, G dan H, maka diperoleh $AE=AF$, $DF=DG$ dan $CG=CH$. Lihat gambar 5.1.20.

Karena AK, DK dan CK masing-masing adalah bisektor sudut A, D dan C, maka diperoleh

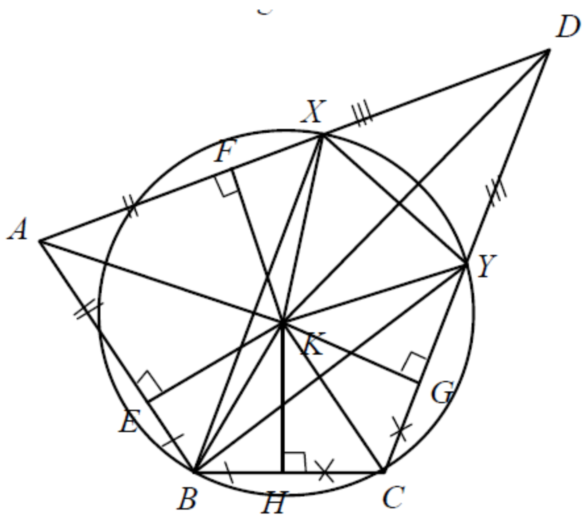
$\angle KAE = \angle KAF,\ \angle KDF = \angle KDG$ dan $\angle KCG = \angle KCH$.

Selain itu, karena

$AE=AF$, $\angle KAE = \angle KAF$ dan $AK = AK$

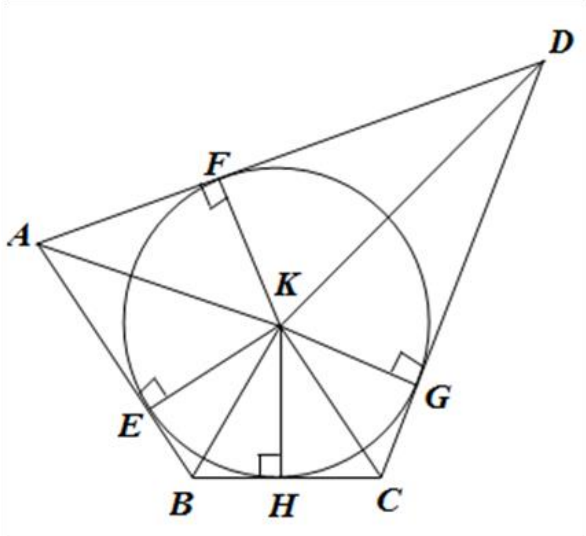
maka ΔKAE dan ΔAKB berkorespondensi *SAS* sehingga

$\Delta KAE \cong \Delta KAF$. Akibatnya $KE=KF$.



gambar 5.1.20

Dengan cara serupa, diperoleh $\Delta KDF \cong \Delta KDG$ dan $\Delta KCG \cong \Delta KCH$ sehingga $KF=KG$ dan $KG=KH$. Karena $KE=KF=KG=KH$, Maka K mempunyai jarak yang sama terhadap keempat sisi segiempat sehingga dapat dilukis sebuah lingkaran yang menyinggung sisi AB, AD, CD dan AB. Jadi, segiempat $ABCD$ memuat sebuah lingkaran dalam dengan pusat K.



gambar 5.1.20

Kalau pada teoema 5.1.5 sudah dibuktikan bahwa jumlah jumlah sudut yang berhadapat pada segiempat siklik (tali busur) adalah 180^0, berikut ini diberikan syarat perlu dan cukup untuk segiempat siklik tersebut.

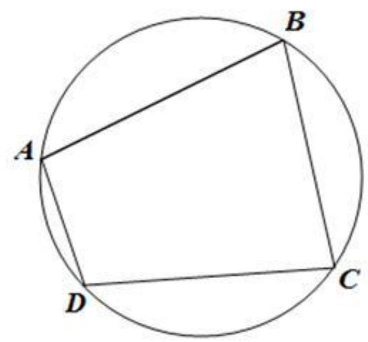
***Teorema* 5.1.8** Segiempat *ABCD* adalah Siklik jika dan hanya jika jumlah sudut yang berhadapan adalah 180^0.

Bukti. Misalkan segiempat *ABCD* adalah Siklik.

Akan ditunjukkan bahwa

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^0.$$

Misalkan *O* titik pusat lingkaran dan misalkan pula *B* dan *O* berada pada sisi yang sama dari *AC*.



Gambar 5.1.22

maka,

$$\angle AOC = 2\angle ABC \qquad \ldots(5.1.20)$$

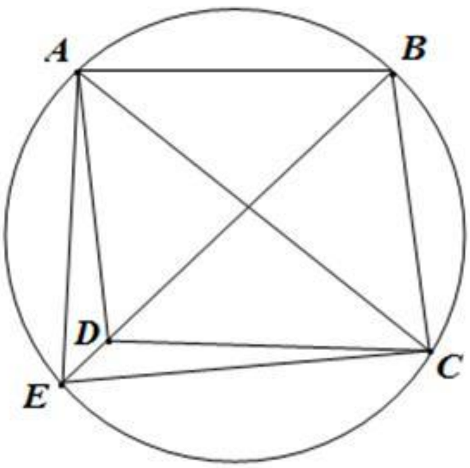
dan

$\angle AOC = 360^0 - 2\angle ADC.$ …(5.1.21)

Dari persamaan (5.1.20) dan (5.1.21) maka diperoleh

$$2\angle ABC = 360^0 - 2\angle ADC$$
$$\angle ABC = 180^0 - \angle ADC$$
$$\angle ABC + \angle ADC = 180^0.$$

Sebaliknya, misalkan $\angle ABC + \angle ADC = 180^0$. Akan ditunjukkan bahwa segiempat *ABCD* adalah Siklik dengan menunjukkan kontradiksinya. Misalkan segiempat *ABCD* adalah Konveks . Lukis sebuah lingkaran yang melalui titik *A*, *B*, dan *C*. dan misalkan *E* adalah titik potong kedua antara lingkaran dengan perpanjangan garis *BD*. Hubungkan garis *AE* dan *CE*. Lihat gambar 5.1.22.



Gambar 5.1.22

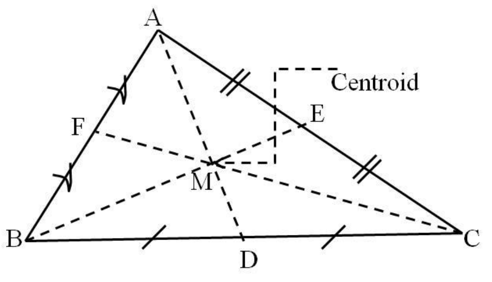
Andaikan $D \neq E$. maka jelas, $\angle ADB > \angle AEB$ dan $\angle CDB > \angle CEB$. Akibatnya $\angle ADC > \angle AEC$. Tetapi, karena titik *A*, *B*, *C* dan *E* berada pada lingkaran maka segiempat *ABCE* adalah Siklik sehingga $\angle ABC + \angle AEC = 180^0$. Karena $\angle ABC + \angle ADC = 180^0$ maka berlaku $\angle ADC = \angle AEC$. Hal ini kontradiksi. Dengan demikian, pangandaian salah. Jadi, haruslah *D* = *E*. Sehingga dapat disimpulkan bahwa segiempat *ABCD* adalah Siklik. Dengan cara yang serupa untuk kasus $\angle BAD + \angle BCD = 180^0$, juga diperoleh kesimpulan segiempat *ABCD* adalah Siklik. ♥

5.2. *Lingkaran Luar Segi Tiga*

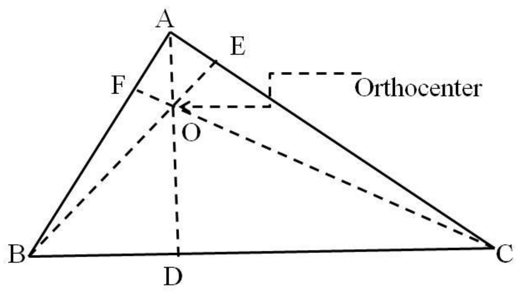
Pada sebarang segitiga *ABC*, banyak kesamaan dan ketaksamaan yang dapat dibentuk, juga dari masing-masing titik sudut segitiga *ABC* dapat dibentuk garis tinggi, garis bagi, dan garis berat. Selain itu dari titik tengah masing-masing sisi juga dapat dibentuk garis yang tegak dengan masing-masing sisi tersebut. Analislah konsep di bawah ini dan perhatikan hubungan antara satu dengan lainnya.

***Definisi* 5.2.1.** Pada sebarang segitiga *ABC* didefinisikan

a. ***Centroid*** adalah titik potong ketiga garis berat yang berpotongan pada suatu titik.
b. ***Orthocenter*** adalah titik potong ketiga garis tinggi yang berpotongan pada satu titik.
c. ***Incenter*** (titik pusat lingkaran dalam) adalah titik potong ketiga garis bagi ketiga sudut yang berpotongan pada satu titik.
d. ***Circumcenter*** (titik pusat lingkaran luar) adalah titik potong ketiga garis yang melalui median dan tegak lurus dengan masing-masing sisi.

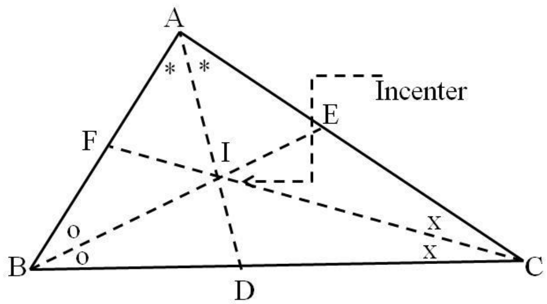


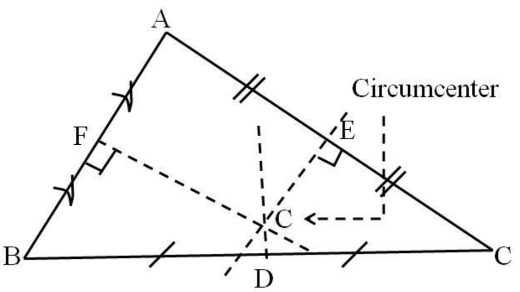
Gambar 5.2.1.a



Gambar 5.2.11.b

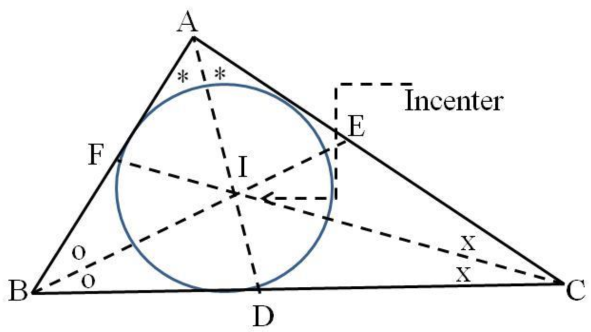
Segitiga *DEF* disebut dengan segitiga Medial dari segitiga *ABC*.



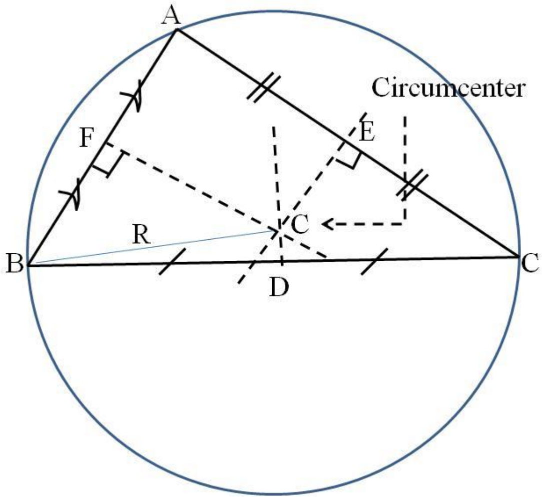


Gambar 5.2.1.c. gambar 5.2.1.d.

Dari Incenter dan Circumcenter, dapat dibentuk lingkaran dalam dan lingkaran luar yang mana Incenter merupakan titik pusat lingkaran dalam dan Circumcenter merupakan titik pusat lingkaran luar (perhatikan gambar 5.2.2.a dan 5.2.2.b)



Gambar 5.2.2.a



Gambar 5.2.2b

Misalkan jari-jari lingkaran dalam adalah r dan jari-jari lingkaran luar adalah R. Selanjutnya misalkan panjang sisi di depan sudut A, B dan C masing-masing adalah a, b dan c. Selanjutnya akan ditentukan hubungan antara r dengan panjang sisi tersebut dan juga dengan luar daerah yang dibentuknya. Begitu juga dengan R.

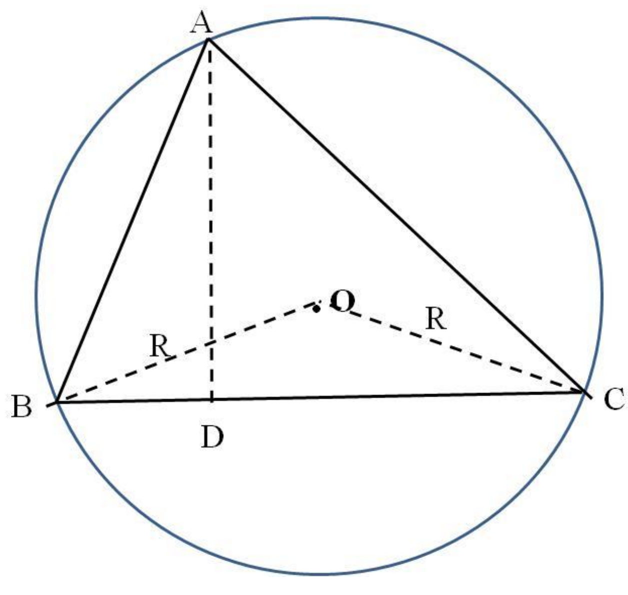
Perlu diperhatikan bentuk kesamaan dan ketaksamaan lain yang berlaku terhadap segitita tersebut.

***Definisi* 5.2.2**. *Lingkaran luar* suatu segitiga *ABC* adalah lingkaran yang melalui ketiga titik sudut segitiga tersebut dan titik pusat dari lingkaran luar tersebut adalah circumcenter.

Pada lingkaran luar tersebut berlaku beberapa bentuk kesamaan, misalnya hubungan Jari-jari lingkaran luar dengan aturan sinus, Hubungan antara jari-jari lingkaran luar dengan perbadingan perkalian panjang sisi-sisi dengan Keliling Segitiga. Bentuk hubungan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk teorema-teorema berikut :

***Teorema* 5.2.1**. Misalkan *a*, *b* dan *c* adalah panjang sisi pada Segitiga *ABC*, maka berlaku

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R \qquad (5.2.1)$$



Gambar 5.2.3

Bukti : Perhatikan gambar 5.2.3. Dari titik *A*, buat garis tinggi, yaitu garis dari *A* yang tegak lurus dengan *BC*, maka diperoleh

$AD = AB \sin B = c \sin B$,

sehingga diperoleh

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} ac \sin B$.

Dengan cara yang sama akan diperoleh

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} bc \sin A$

Pada tingkat Sekolah Menengah Pertama sudah ditentukan bahwa besar $\angle A = \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$. Selanjutnya jika dibuat garis yang tegak lurus dari titik pusat ke *BC* (lihat gambar 5.2.4), maka akan diperoleh.

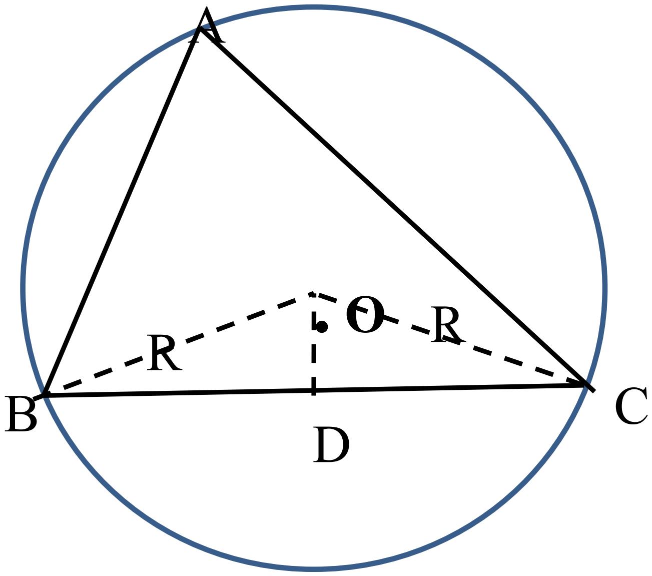
Besar $\angle BOD = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle A$ dan panjang BD = ½ BC.

Jadi $\sin \angle BOD = \dfrac{BD}{R}$ atau

$BD = R\times \sin \angle BOD$. Karena $\angle BOD = \angle A$,

maka $BD = R\times \sin \angle A$. Karena $BC = 2\ BD$,

sehingga $BC = R\times \sin \angle A$. Sebut $BC = a$,



Gambar 5.2.4

maka

$$\frac{a}{\sin \angle A} = 2R$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh $\dfrac{b}{\sin \angle B} = 2R$ dan $\dfrac{c}{\sin \angle C} = 2R$, dengan aturan sinus diperolehlah

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R$$

▼

Berikut ini dijelaskan hubungan antara jari-jari lingkaran luar dengan perkalian panjang ketiga sisi-sisinya dibagi dengan kelipatan dari keliling lingkaran tersebut.

***Teorema* 5.2.2**. Misalkan a, b dan c adalah panjang sisi pada Segitiga ABC, maka berlaku

$$R = \frac{abc}{4L} \qquad (5.2.2)$$

Bukti **:** Tulis rumus luas ΔABC = ½ bc $sin\angle A$ atau dapat ditulis dalam bentuk $sin\angle A = \dfrac{2L}{bc}$ dengan L menyatakan luas ΔABC. Jika nilai sin $\angle$A disubsitusikan pada persamaan $\dfrac{a}{\sin\ \angle A} = 2R$, maka akan diperoleh

$$R = \frac{abc}{4L}$$ ▼

Teorema **5.2.3**. Misalkan a, b dan c adalah panjang sisi pada Segitiga ABC, maka berlaku

$$L = \sqrt{s\,(s - a)(s - b)(s - c)}$$

Bukti **:** Misalkan panjang sisi pada suatu Δ ABC masing-masing dinamakan a, b dan c dan luasnya dilambangkan dengan L serta s menyatakan setengah dari keliling segitiga yaitu atau s = ½(a+b+c). Dengan menggunakan aturan cosinus dalam bentuk

$$\cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

dan dengan menggunakan

$$\sin^2\angle A = 1 - \cos^2\angle A,$$

maka diperoleh

$$sin^2\angle A = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2$$

$$= \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)\left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

$$= \left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)\left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}\right)$$

$$= \left(\frac{(b + c)\ \ - a^2}{2bc}\right)\left(\frac{a^2 - (b + c)^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{(2bc)^2}$$

Perhatikan bahwa $s = ½ (a+b+c)$, maka

- $a + b + c = 2s$
- $b + c - a = (a + b + c) - 2a = 2s - 2a = 2(s - a)$
- $a + b - c = 2(s - c)$
- $a - b + c = 2(s - b)$

sehingga diperoleh

$$sin^2 \angle A = \frac{2s \times 2(s - a) \times 2(s-c) \times 2(s-b)}{(2bc)^2}$$

$$= \frac{4s\,(s - a)(s-c)(s-b)}{(bc)^2}$$

atau

$$sin \angle A = \sqrt{\frac{4s\,(s - a)(s-c)(s-b)}{(bc)^2}} \;\; = \frac{2}{bc}\sqrt{s\,(s - a)(s-b)(s-c)} \qquad (5.2.3)$$

Sehingga sekali lagi dengan menggunakan rumus luas segitiga

$L = ½\ bc \sin\angle A$

$$= \frac{1}{2}bc\,\frac{2}{bc}\sqrt{\mathrm{s}\,(\mathrm{s} - \mathrm{a})(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{s\,(s - a)(s-b)(s-c)} \qquad (5.2.4)$$

Yang merupakan rumus menghitung luas segitiga jika ketiga panjang sisinya diketahui. Dengan menggunakan persamaan (5.2.4), maka jari-jari lingkaran luar segitiga *ABC* juga dapat dinyatakan dalam bentuk

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s\,(s - a)(s-b)(s-c)}} \qquad \blacktriangledown$$

Sebenarnya pola menentukan luas segitiga dengan menggunakan rumus L = ½ *bc* $sin\angle A$ = ½ ac $sin\angle B$ = ½ ab $sin\angle C$ memaksa pembaca untuk menyelesaikan persoalan dengan mengingat rumus dan begitu juga dengan rumus-rumus lainnya seperti yang di uraikan di atas. Justru yang lebih menarik adalah apakah memungkinkan menyelesaikan persoalan tersebut tanpa harus menghapal rumus-rumus tapi hanya menggunakan aturan atau rumusan yang sangat sederhana yang sudah begitu bersebati dengan para mahasiswa. Misalnya bagaimana menentukan luas segitiga tanpa menggunakan rumusan di atas jika panjang ketiga sisinya diketahui. Untuk menyelesaikan persoalan tersebut pembaca dapat hanya dengan menggunakan aturan Pythagoras saja (aturan Pythagoras sudah bersebati dengan semua pembaca yang sudah tamat SMP).

***Teladan* 5.2.1.** Suatu segitiga dengan panjang sisi *AB* = 14 cm, *BC* = 15 cm dan *AC* = 13 cm. Hitunglah luas segitiga tersebut

Penyelesaian :

***Cara* I**. Dengan menggunakan s = ½ (a+b+c) diperoleh s = 21. Kemudian dengan menggunakan rumus (5.4.1) diperoleh

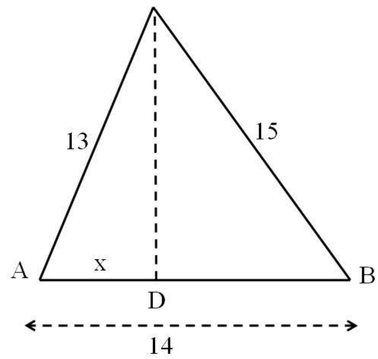
$$L = \sqrt{\mathrm{s}\left(\mathrm{s}-\mathrm{a}\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}$$

$$= \sqrt{21\left(21-15\right)\left(21-14\right)\left(21-13\right)}$$

$$= \sqrt{7056} \quad = 84 \text{ cm}^2$$

Catatan : sekali lagi cara I ini memaksa pembaca mengingat rumus, justru persoalan utamanya adalah bagaimana menyelesaikannya jika rumusnya lupa atau tidak mau menggunakan rumus. Untuk itu perhatikan penyelesaian cara II berikut.

Cara II.



Gambar 5.2.5.

Perhatikan gambar 5.2.5 di atas dan tarik garis tinggi dari titik C ke sisi AB. Sebut panjang sisi $AD = x$ yang mana segitia ADC dan segitiga BDC siku-siku di D dan masing-masing berlaku

$$\mathrm{CD}^2 = AC^2 - AD^2$$

$$= 13^3 - x^2$$

dan

$$CD^2 = BC^2 - BD^2$$

$$= 15^2 - (14\ x)^2$$

Dari kedua persamaan di atas diperoleh

$$13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$$

$$13^2 - x^2 = 15^2 - 14^2 + 28x - x^2$$

$$28x = 13^2 - 15^2 + 14^2$$

$$= (13 - 15)(13 + 15) + 14^2$$

$$= -2.\ 28 + (7\ .\ 2)^2$$

$$28\ x = -2.\ 28 + 7^2\ .\ 2^2$$

Dengan membagi kedua ruas dengan 28 diperoleh

$$x = -2 + 7 = 5$$

Sehingga panjang CD dapat ditentukan yaitu

$$CD = \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$= \sqrt{(13-5)(13+8)}$$

$$= \sqrt{8.18} = \sqrt{2^3.2.3^2} = 12$$

Sehingga luas segitiga *ABC* adalah

$$L = ½\ AB.CD$$

$$= ½.\ 14.\ 12 = 84\ cm^2$$

Catatan : Proses perhitungan seperti di atas, sengaja dilakukan, karena itu juga suatu proses pembelajaran melakukan operasi perhitungan tanpa menggunakan alat hitung, tapi cukup dengan menyederhanakan bentuknya.

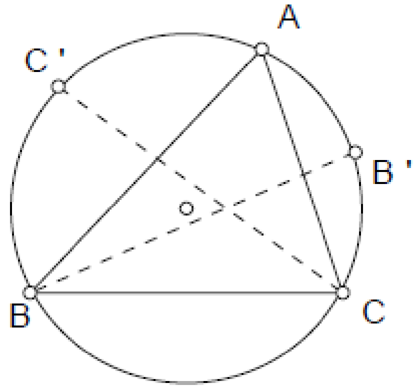
Soal Latihan **10.**

1. Sebuah segitiga panjang sisi-sisinya 40 cm, 45 cm dan 67 cm. Tentukanlah Centroit, Orthocenter, Incenter, dan circum centernya.
2. Seperti penyelesaian teladan I cara II, hitunglah luas segitiga *ABC* yang panjang sisinya *AB* = cm, *BC* = 14 cm dan *AC* = 20 cm.
3. Diketahui ΔABC dengan *AB* = 21 cm, *BC* = 20 cm dan *CA* = 13 cm. Dari titik *C* ditarik garis *CD* sehingga *AD* = 14 cm. Hitunglah panjang *CD*
4. Tunjukkan untuk sebarang ΔABC yang panjang sisi-sisinya dinyatakan *a*, *b* dan *c*,. dan bila *r* menyatakan panjang jari-jari lingkaran dalam,. Maka luasnya juga dapat dinyatakan dalam bentuk

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = sr$$

5. Lihat gambar 5.2.10 dan tunjukkan bahwa $K\Delta PQR = PA + PB + 2QR$

6. Perhatikan gambar disebelah, BB' dan CC' adalah garis bagi $\angle B$ dan $\angle C$, Tunjukka



   i. jika $\angle B = \angle C$, maka $BB' = CC'$
   ii. Jika $BB' = CC'$ apakah $\angle B = \angle C$. kalau benar buktikan dan kalau tidak benar berikan contoh penyangkal.

7. Misalkan m_b dan m_c masing-masing menyatakan panjang garis berat dari titik B dan C ke sisi AC dan AB pada ΔABC. Jika panjang sisi $AC = b$ dan sisi $AB = c$. Tunjukkan bahwa jika $m_b = m_c$ jika dan hanya jika $b = c$.
8. Tunjukkan bahwa segiempat *Circumscriptible* adalah konveks.
9. Dengan penjelasan yang sama dengan soal no 5 di atas, tunjukkan bahwa ΔABC adalah sama sisi jika dan hanya jika $m_b : m_b : m_b = a : b : c$
10. *). Dengan penjelasan yang sama dengan soal no 5 di atas, tunjukkan bahwa

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

11. Jika panjang sisi-sisi suatu segitiga adalah 136, 170 dan 174, hitunglah panjang garis beratnya.
12. Jika panjang sisi-sisi suatu segitiga adalah 136, 170 dan 174, hitunglah panjang garis bagi dan garis tingginya
13. Bentuklah sebuah segitiga yang unik, yang mana panjang sisi-sisinya adalah b -1, b dan b + 1, kemudian hitunglah luasnya
14. *) Jika garis AC merupakan diameter lingkaran dan melalui titik B pada lingkaran ditarik garis yang memotong lingkaran untuk kedua kalinya di D dan perpanjangan diameter AC di P. melalui A dan C masing-masing ditarik garis AE dan CF yang tegak lurus PD.
    a. Jika EB = 2 cm dan BD = 6 cm, carilah panjang DF

b. Apakah $DF = EF$ (jika benar buktikan).

15. *). Titik A berada di luar lingkaran dan dari titik A dibuat garis singgung ke lingkaran dengan pusat O masing-masing menyinggung lingkaran dititik B dan C. jika BD merupakan diameter lingkaran dan dibuat garis $CE \perp BD$,
    a. Hitunglah panjang sisi AB
    b. Buktikan bahwa

$$\frac{AB}{\sqrt{BE}} = ED$$

16. Tunjukkan bahwa dalam suatu $\Delta\ ABC$ berlaku
    a. $sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$
    b. $cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

17. *) Diketahui ΔABC dengan AB = 96 cm, BC = 91 cm dan AC = 37 cm. Hitunglah panjang garis berat dari titik C dan titik B.

18. *). Diberikan suatu ΔABC, Kontruksilah sebuah segitiga yang panjang sisinya sama dengan panjang garis berat ΔABC.

19. Diberikan segiempat ABCD, bentuklah ΔAPQ dengan titik P pada sisi BC, Q pada sisi CD sehingga ΔAPQ samasisi

20. *)Diketahui ΔABC dengan $\angle A = 45^0$ dan $\angle B = 30^0$, jika AC = 5 cm, hitunglah luas segitiga tersebut, dengan catatan menghitung panjang sisinyanya tidak boleh menggunakan aturan cosinus dan menghitung luasnya juga tidak boleh lansung dengan menggunakan rumus.

21. Misalkan $\Delta\ ABC$ dengan jari-jari lingkaran luar adalah R. jika panjang sisinya masing-masing adalah a, b dan c. tunjukkan bahwa berlaku :

$$L\Delta ABC = \frac{R(a\cos A + b\cos B + c\cos B)}{2}$$

22. *). Bisakah anda bentuk segitiga yang panjang sisinya 1 – *x*, 1 + *x* dan 1 + 2*x*, berapakah panjang x sehingga panjang garis tingginya adalah 1 satuan. Kemudian tunjukkan bahwa :

$$L\Delta ABC = \sqrt{\frac{3}{16}(1+2x)^2(1+4x)}$$

23. **) Diketahui ΔABC dengan panjang sisi *AB* = *c* cm, *AC* = *b* cm dan $\angle A = \alpha$.
    a. Hitunglah panjang garis tinggi dari titik *C*
    b. Hitunglah Luas Segitiga (LΔABC = ½ *bc sin* α)
    c. Hitunglah panjang garis berat dari titik *C*
    d. Tuliskanlah panjang sisi *BC* dinyatakan dalam *b*, *c* dan α (rumus kosinus).

24. **). Pada Δ*ABC*, misalkan m_a adalah panjang median (garis berat) dari titik titik *A* ke garis *BC*, tunjukkan bahwa :
    a. $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$
    b. $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$
    c. $m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

Catatan : soal di atas dikenal dengan nama ***Teorema Appollonius.***

21. **)Diketahui Δ*ABC* dengan panjang dua buah sisinya adalah 20 cm dan 30 cm, Jika sudut yang diapitnya 120^0. Hitunglah panjang sisi ke 3 dan luas segitiga tersebut.

5.3. *Lingkaran Dalam Suatu Segitiga*

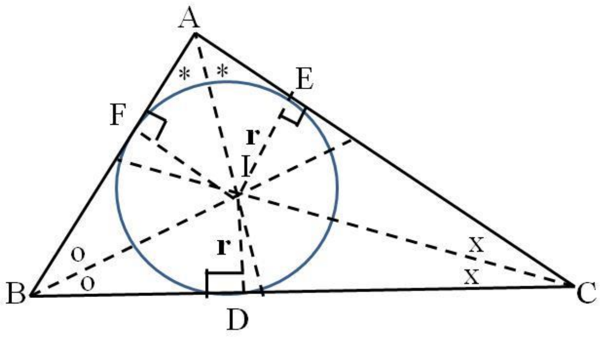
Pada dasarnya konsep lingkaran dalam dan lingkaran luar serta lingkaran singgung luar sudah di bahas ti tingkat sekolah menengah. Akan tetapi di sini diberikan pengulangan konsep lingkaran dalam dan lingkaran luar tersebut, dengan sedikit pendalaman, akan tetapi nanti pendalamannya untuk tingkat yang lebih tinggi dapat penulis ikuti dengan menyelesaikan soal-soal latihan yang diberikan.

***Definisi* 5.3.1**. *Lingkaran dalam* suatu segitiga adalah lingkaran yang menyinggung ketiga sisi lingkaran tersebut dan titik pusat dari lingkaran dalam tersebut adalah incenter.

Sama seperti pada lingkaran luar, jika diberikan sebarang segitiga *ABC*, maka rumus untuk menentukan luas segitiga *ABC* tetap berlaku aturan Luas Δ *AB*C = ½ *bc sin A*= ½ *ac sin B* = ½ *ab sin C*, sedangkan persoalan yang menarik adalah bagaimana menentukan jari-jari dari lingkaran dalamnya. Untuk itu perhatikan teorema berikut ini

***Teorema* 5.3.1**. Pada suatu segitiga *ABC* berlaku

$$r = (s - a)\tan\frac{1}{2}A$$



Gambar 5.3.1

Bukti : Misalkan Jari-jari lingkaran dalam pada segitiga *ABC* adalah *r*, dan panjang *BC*, *AC* dan *AB* berturut-turut adalah *a*, *b* dan *c*. *ID* tegak lurus dengan *BC* dan *ID* = *r* merupakan jari-jari lingkaran dalam. Misalkan panjang *AF* = *k*, maka panjang *BF* = *c* – *k*. Kemudian panjang *BD* = Panjang *BF* = *c*- *k*.

Karena panjang *AF* = panjang *AE* = *k*,

maka

panjang *CE* = *b* – *k*.

Selanjutnya panjang *CD* = Panjang *CE* = *b* – *k*. Dari itu dapat ditentukan bahwa

panjang *AF* + panjang *FB* + panjang BD + panjang DC + panjang CE + panjang EA =

panjang AB + panjang BC + panjang CA,

yang menghasilkan

$k + (c - k) + (c - k) + (b - k) + (b - k) + k = c + a + b.$

$2b + 2c - 2k = a + b + c$

$2b + 2c - a - b - c = 2k$

$b + c - a = 2k$ atau $2k = b + c - a.$

$$k = \frac{1}{2}(b + c - a)$$

$$k = \frac{1}{2}(a + b + c) - a$$

$$k = s - a \tag{5.3.1}$$

Jadi

$$\text{Panjang } AF = \text{panjang } AE = s - a, \tag{5.3.2}$$

dengan $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

Dengan cara yang sama dengan penurunan di atas diperoleh :

Panjang BF = panjang $BD = s - b$

Panjang CD = panjang $CE = s - c$

Untuk memudahkan penglihatan gambar pada penurunan rumus berikutnya, gambar 5.3.1 akan buat sisi A terletak pada sisi bagian bawah untuk itu perhatikan gambar 5.3.2.

pada segitiga AIF,

panjang $AF = s - a$ dan $\angle AFI = 90^0$,

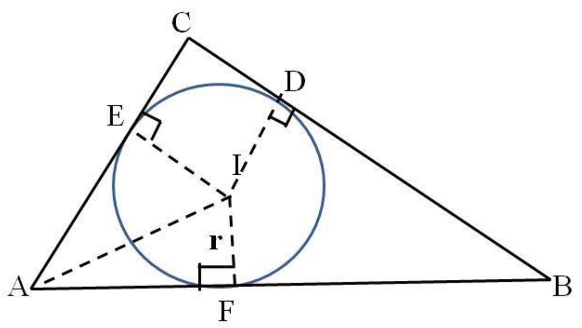
panjang $IF = r$,

tinjaulah bahwa

$$\angle IAF = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle A$$

dan,

$$\tan \angle IAF = \frac{Panjang\ \ IF}{Panjang\ \ AF}$$



Gambar 5.3.2

maka

$$\tan\frac{1}{2}A = \frac{r}{s-a}$$

atau

$$r = (s-a)\tan\frac{1}{2}A \quad (5.3.3)$$

***Remaks* 5.3.1**. Dengan cara yang sama dengan teorema 5.4.1 diperoleh

$$r = (s-b)\tan\frac{1}{2}B \quad (5.3.4)$$

$$r = (s-c)\tan\frac{1}{2}C \quad (5.3.5)$$

Selain menggunakan kesamaan di atas, rumusan untuk mencari panjang jari-jari lingkaran dalam juga dapat diungkapkan dalam bentuk konklusi berikut ini

***Remaks* 5.3.2**. Jari-jari lingkaran dalam pada segitiga ABC dapat ditentukan dengan rumus berikut

$$r = \frac{L}{s} = \frac{1}{s}\sqrt{s(s-a)(s-b)s-c} \quad (5.3.6)$$

Bukti : Pandang

Luas ΔABC = Luas ΔAIB + Luas ΔBIC + Luas ΔCIA

$$L = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br$$

$$= \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$= rs$$

atau

$$r = \frac{L}{s} = \frac{1}{s}\sqrt{s\left(s - a\right)\left(s - b\right)s - c}$$

***Teladan* 5.3.1** . Suatu segitiga dengan panjang sisi *AB* = *c* = 14 cm, *BC* = *a* = 15 cm dan *AC* = *b* = 13 cm. Berapakah panjang jari-jari lingkaran dalamnya

***Penyelesaian* :** Penyelesaiannya akan ditentukan dengan menggunakan rumus yaitu sebagai berikut :

$$s = \frac{1}{2}\ \left(a + b + c\right) = \frac{1}{2}\left(15 + 13 + 14\right) = 21$$

Berdasarkan rumus luas maka diperoleh *L* = 84.

Jadi

$$r = \frac{L}{s} = \frac{84}{21} = 4\,cm$$

Ingat bahwa jika nilai *L* belum diketahui (pada contoh di atas karena sudah dihitung pada teladan 5.1..1) maka perlu terlebih dahulu ditentukan nilai L, yang dapat ditentukan dengan L = ½ *bc sin∠A* atau rumus lain yang serupa. Jika ingin menggunakan rumus (5.3.6) tapi tidak ingin menghitung nilai *L*, juga dapat dilakukan dengan terlebih dahulu menghitung nilai *s*. Cara lain yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan rumus (5.3.3), (5.3.4) atau (5.3.5), akan tetapi cara ini kurang efisien karena kita terlebih dahulu mesti menentukan nilai $tan\frac{1}{2}A$ atau $tan\frac{1}{2}B$ atau $tan\frac{1}{2}C$ yang nilai sudut *A* atau sudut *B* atau sudut *C* dapat ditentukan dengan menggunakan aturan cosinus, (untuk itu silakan coba cara ini sebagai latihan).

5.4. *Lingkaran Singgung Suatu Segitiga*

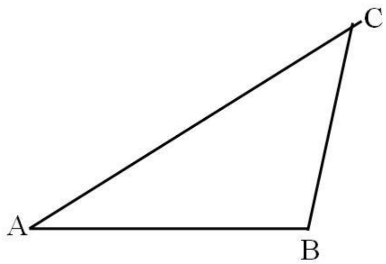
Dalam berbagai buku teks, lingkaran singgung luar disebut dengan istilah lingkaran luar (excircles), karena kita sudah menggunakan istilah lingkaran luar untuk lingkaran yang titik pusatnya di circumcirle. Maka dalam buku ini akan digunakan istilah lingkaran singgung luar dari suatu segitiga *ABC*. Adapun yang dimaksud dengan lingkaran singgung luar tersebut adalah seperti definisi 5.4.1.

Sangat perlu untuk pembaca cermati adalah konsep penentuan jari-jari luas dari lingkaran singgung luar. Juga perlu di analisa hubungan antara jari-jari lingkaran singgung luar dengan jari-jari lingkaran dalam dan lingkaran luar serta keterkaitannya dengan panjang dari sisi-sisi segitiga tersebut. Kalau jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luar hanya terkait dengan panjang sisi, sedangkan jari-jari lingkaran singgung luar sekaligus dengan panjang sisi dan besar sudut. Perhatikan gambar 5.4.1b, disitu R_a menyatakan jari-jari lingkaran luar yang menyinggung perpanjangan sisi *AC*, *AB* serta sisi *BC* (sisi $a = BC$), jadi untuk R_a pijakannya adalah titik *A*. Dibagian akhir juga akan diberikan penurunan rumus menentukan panjang jari-jari lingkaran singgung luar dengan keterkaitannya dengan luas dan tanpa menggunakan konsep sudut dari segitiga tersebut.

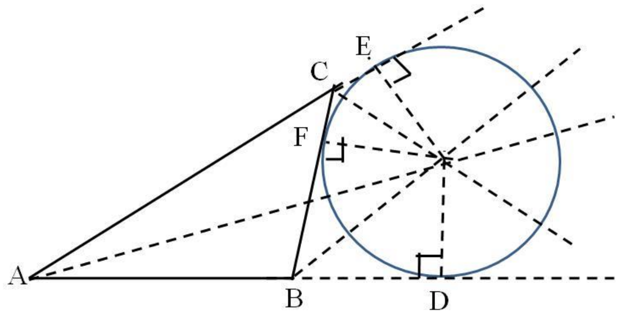
D*efinisi* 5.4.1. *Lingkaran singgung* pada suatu segitiga *ABC* adalah lingkaran yang menyinggung sebuat sisi segitiga dan perpanjangan dua sisi lainnya.

Ilustrasi dari definisi 5.4.1 dapat dilihat pada gambar di bawah ini, yang mana gambar 5.4.1.a merupakan segi tiga asal dan gambar 5.4.1b merupakan segitiga pada gambar 5.4.1.a yang telah dilengkapi dengan lingkaran singgungnya.

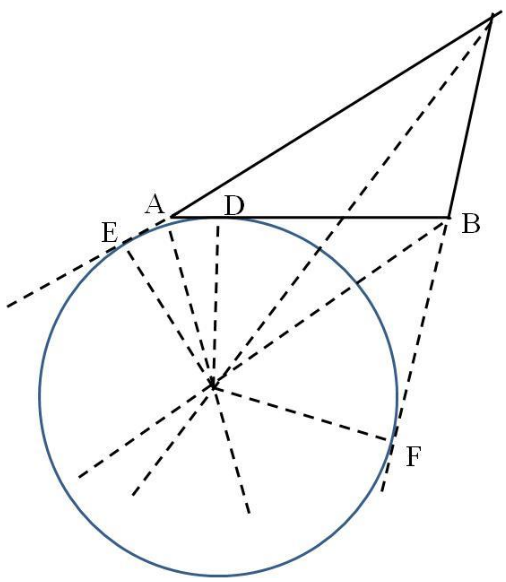
Lingkaran singgung yang menyinggung sisi *BC* pada segitiga *ABC* disebut lingkaran singgung pada sisi *BC*. Jadi lingkaran singgung pada suatu segitiga *ABC* sebenarnya ada 3 buah, yaitu lingkaran singgung yang menyinggung sisi *AB* (gambar 5.4.2), lingkaran singgung yang menyinggung sisi *BC* (gambar 5.4.1.b) dan lingkaran singgung pada sisi *AC* (tidak dibuat gambarnya, karena kalau digambarkan gambarnya lingkarannya akan cukup besar).



Gambar 5.4.1.a



gambar 5.4.1.b



Gambar 5.4.2

Persoalan berikutnya adalah sama seperti lingkaran dalam dan lingkaran luar, yaitu bagaimana menentukan panjang jari-jari dari lingkaran singgung tersebut. Disini akan diberikan perhitungan untuk menentukan panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi *BC*.

***Teorema* 5.4.1**. Misalkan *ABC* suatu segitiga sembarang, maka panjang jari-jari lingkarang singgung pada sisi *BC* adalah

$$R_a = s \tan \frac{1}{2} A \qquad (5.4.1)$$

***Bukti* :** Misalkan R_a menyatakan panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi *BC* pada gambar 5.4.3, perhatikan bahwa ΔAOD kongruen dengan ΔAOE. Sehingga ΔBOD kongruen dengan ΔBOF dan ΔCOE kongruen dengan ΔCOF. Kondisi ini menyebabkan

Panjang *AD* = panjang *AE.*

dan

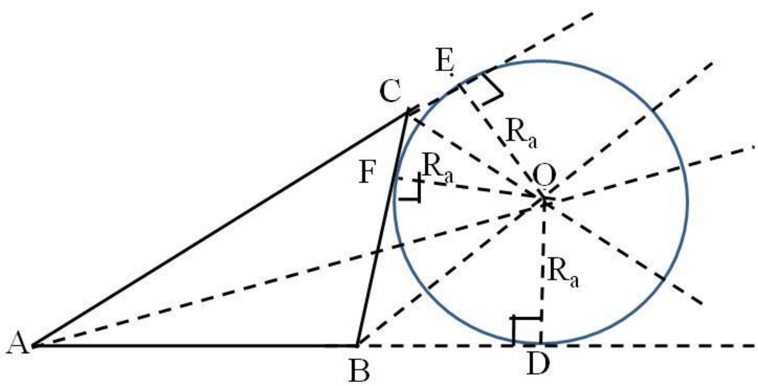
Panjang BD = panjang BF, Serta panjang CE = Panjang CF.

Misalkan, panjang BC, panjanang AC dan panjang AB berturut-turut adalah *a*,b dan *c* kemudian

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c),$$

serta

panjang *BF* = panjang *BD* = *x*.



Gambar 5.4.3

Oleh karena itu

panjang *CF* = panjang *BC* – Panjang *BF* = *a* – *x*.

dengan demikian juga

panjang *CF* = panjang *CE* = *a* – *x*.

Karena

panjang AD = panjang AE,

maka

panjang AB + panjang BD = panjang AC + panjang CE

jadi

$c + x = b + a - x$

$2x = b + a - c$

$$x = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

Dengan demikian

Panjang AD = panjang AB + panjang BD

$$= c + \frac{1}{2}(a + b - c)$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c) = s$$

Selanjutnya pada $\Delta\, AOD$,

panjang $AD = s$ dan $\angle ADO = 90^0$ dan $\angle OAD = \frac{1}{2}\angle BAC$

sehingga

$$\tan \angle OAD = \tan \frac{1}{2}\angle BAC = \tan \frac{1}{2} A$$

Jika jari-jari lingkaran singgung pada sisi BC tersebut dinotasikan dengan R_a maka diperoleh

$$\tan \angle OAD = \frac{panjang\ \ OD}{panjang\ \ AD}$$

$$\tan \frac{1}{2} A = \frac{R_a}{s}$$

Jadi

$$R_a = s \tan \frac{1}{2} A$$ ▼

***Remaks* 5.4.1.** Dengan cara yang sama dengan penurunan bukti pada teorema 5.4.1 di atas akan dapat ditunjukkan bahwa

1. Panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi *AC* adalah $R_b = s\,tan\frac{1}{2}B$
2. Panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi *AB* adalah $R_c = s\,tan\frac{1}{2}C$

Berikut ini diberikan alternatif untuk menghitung panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi BC yang dihubungkaitkan dengan luas segitiga ABC.

***Teorema* 5.4.2**. Misalkan *ABC* suatu segitiga sembarang, maka panjang jari-jari lingkarang singgung pada sisi *BC* adalah

$$R_c = \frac{L}{s - a} \qquad (5.4.2)$$

Bukti : Perhatikan kembali gambar 5.4.3,

Luas □ *ABOC* = Luas Δ *ABO* + luas Δ *ACO*

$$= \frac{1}{2} \times AB \times OD + \frac{1}{2} \times AC \times OC$$

$$= \frac{1}{2} c\, R_a + \frac{1}{2} b\, R_a \qquad (5.4.3)$$

maka

Luas □ *ABOC* = Luas Δ *ABC* + luas Δ *BCO*

$$= L + \frac{1}{2} \times BC \times OF$$

$$= L + \frac{1}{2} a\, R_a \qquad (5.4.4)$$

Dari persamaan (5.4.3) dan (5.4.4) diperoleh

$$\frac{1}{2} c\, R_a + \frac{1}{2} b\, R_a = L + \frac{1}{2} a\, R_a$$

$$\frac{1}{2} c\, R_a + \frac{1}{2} b\, R_a - \frac{1}{2} a\, R_a = L$$

$$R_a\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a\right)=L$$

$$R_a\left(\frac{1}{2}(c+b-a)\right)=L$$

$$R_a\left(\frac{1}{2}(a+b+c)-a\right)=L$$

$$R_a(s-a)=L$$

$$R_a=\frac{L}{s-a} \qquad ▼$$

***Remaks* 5.4.2**. Dengan cara yang sama akan diperoleh :

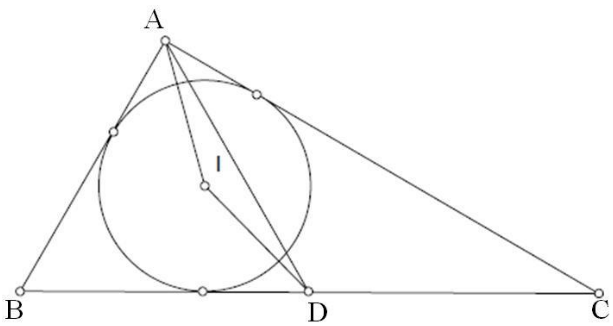
a. Panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi *AC* adalah $R_b=\dfrac{L}{s-b}$

b. Panjang jari-jari lingkaran singgung pada sisi *AB* adalah $R_c=\dfrac{L}{s-c}$

Soal Latihan 11.

1. Sebuah segitiga panjang sisi-sisinya 40 cm, 45 cm dan 67 cm. Tentukanlah
   a. Panjang jari-jari lingkaran dalamnya
   b. Panjang jari-jari lingkaran luarnya
2. Bilakah Jari-jari lingkaran luar suatu segitiga adalah 2 kali jari-jari lingkaran dalam.
3. Berikan contoh kasus bahwa jari-jari lingkaran luar dari suatu segitiga berada di luar segitiga tersebut.
4. Sebuah segitiga dengan ukuran yang sama seperti soal no 1, Hitunglah panjang ketiga jari-jari lingkaran singgung luarnya.
5. Untuk segitiga samakaki, berapakah berbandingan R_a : R_b : R_c
6. Sebuah segitiga dengan ukuran seperti soal no 1 tentukanlah perbandingan luas lingkaran dalam dan luas lingkaran singgung pada sisi *AC*.

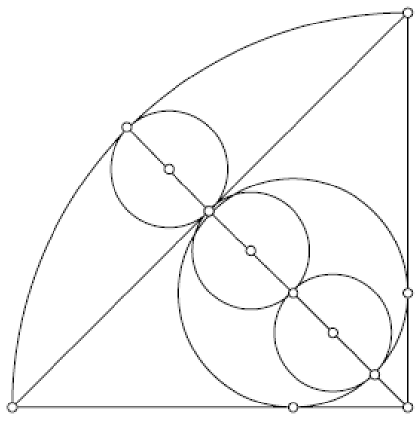
7. Pada ΔABC, dibuat titik P pada sisi BC, sebut I adalah titik pusat lingkaran dalamnya, dan tentukan posisi titik Q pada AB sehingga $BQ = BP$. Tunjukkan bahwa $IP = IQ$.
8. Jika I titik pusat lingkaran dalam pada ΔABC, jika $\angle A = 60^0$ kemudian garis garis bagi dari sudut B dan C masing-masing memotong AC dan AB di titik E dan F. Tunjukkan bahwa $IE = IF$.
9. Tunjukkan pula bahwa $r_a, r_b . r_c = r^2 s$. denan $s = ½ (a + b + c)$
10. Perhatikan ΔABC pada gambar disebelah dengan lingkaran dalamnya. Jika D titik tengah dari BC dan $AI = ID$ dan ΔABC siku-siku di A, tunjukkan bahwa salah satu dari $\angle B$ atau $\angle C$ adalah 30^0.



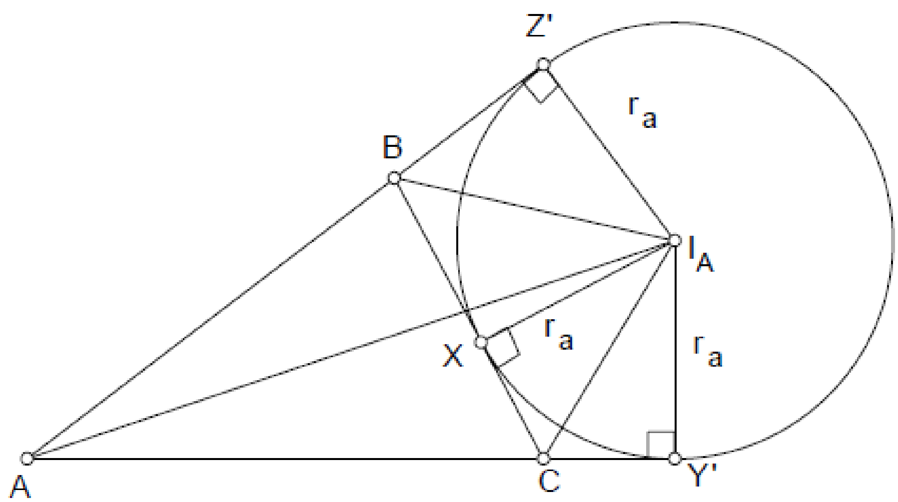
11. Jika pada Δ ABC, jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luar adalah r dan R. Tunjukkan bahwa

$$r = 4R \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

12. Perhatikan gambar disebelah kemudian tunjukkan bahwa ketiga lingkaran kecil mempunyai jari-jari yang sama.



13. Jika P sebarang titik pada lingkaran luar segitiga ABC, tunjukkan bahwa garis simsonnya merupakan bisektor dari sisi PH dengan H adalah Orthocenter dari segitiga ABC.
14. Jika I_A. I_B dan I_C masing-masing menyatakan titik pusat lingkaran singgung luar dari titik A, B dan C (untuk untuk titik pusat lingkaran singgung luar dari titik A seperti pada Gambar di bawah). Tunjukkan bahwa jari-jari lingkaran luar $\Delta I_AI_BI_C$ adalah $2R$ dengan R jari-jari lingkaran luar ΔABC.
15. Tunjukkanlah bahwa luas $\Delta I_AI_BI_C$ adalah $\frac{abc}{3r}$ dengan r jari-jari lingkaran dalam ΔABC yang sisi-sisinya adalah a, b dan c.



16. *). Jika r jari-jari lingkaran dalam ΔABC, tunjukkan bawah

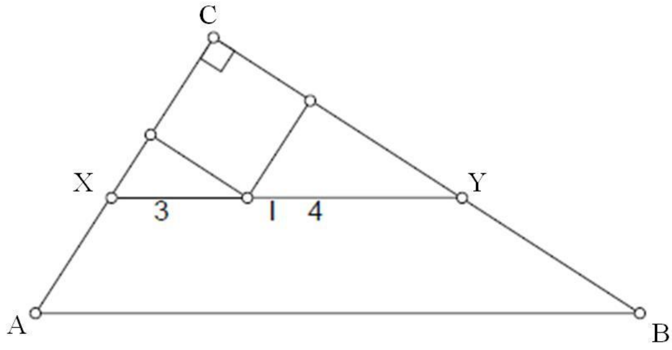
$$\frac{r}{r_a} = tg\left(\frac{1}{2}B\right) = \ tg\,\frac{1}{2}C.$$

17. *). Untuk sebarang segitiga, tunjukkan bahwah

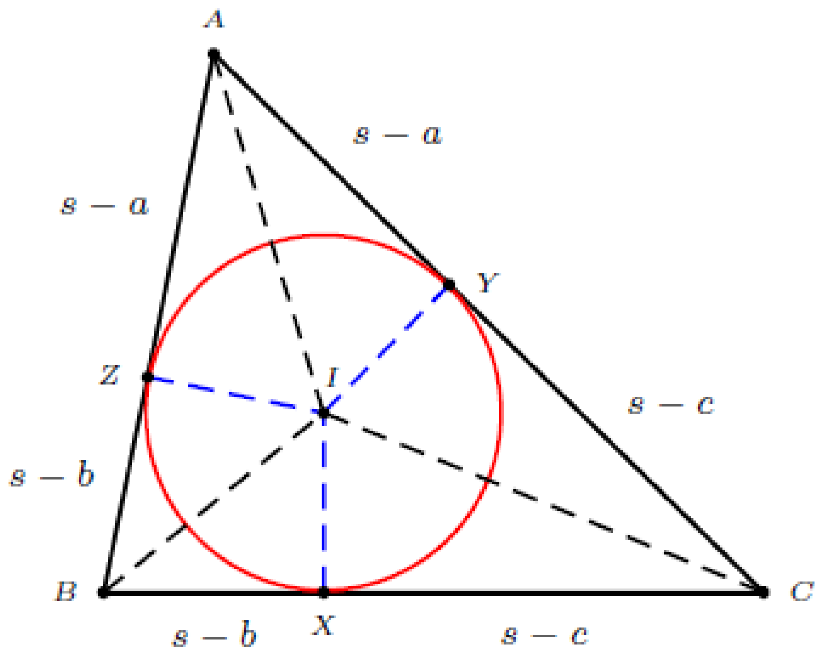
$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \ \frac{1}{r_c} = \ \frac{1}{r}$$

18. Jika panjang garis tinggi suatu segitiga masing-masing adalah 12, 15 dan 20, berapakah luas segitiga tersebut.

19. ΔABC di sebelah, siku-siku di C, jika I adalah titik pusat lingkaran dalam, buat garis melalui I sejajar dengan AB yang memotong AC di X dan memotong BC di Y, berapakah perbandingan AC dengan BC.



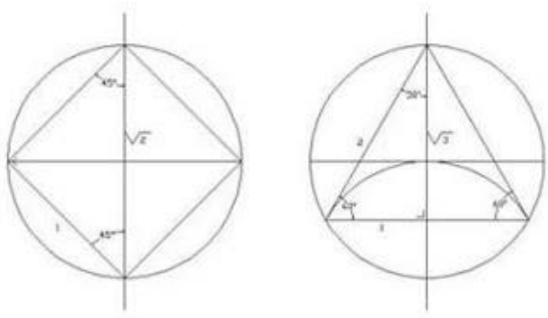
20. Sebuah segitiga ABC dengan ukuran seperti soal no 2 tentukanlah
    a. Luas lingkaran singgung terkecil
    b. Luas lingkaran singgung terbesar
21. *). Misalkan D, E dan F adalah tiga buah titik yang berada pada sisi BC. CA dan AB pada segitiga ABC. Tunjukkan bahwa lingkaran luar dari segitiga AEF, BDF dan CDE berpotongan di suatu titik (titik tersebut dinamakan dengan *titik Miquel*)
22. *). Buktikan secara lansung Remark 5.3.2 yaitu dengan memisalkan $AY = AZ = s - a$, $BX = BZ = s - b$ dan $CX = CY = s - cm$ dengan $s = ½ (a + b + c)$, tunjukkan bahwa $r = \frac{L\Delta ABC}{s}$.


A
$s-a$
$s-a$
Y
Z
I
$s-c$
$s-b$
B
X
C
$s-b$
$s-c$

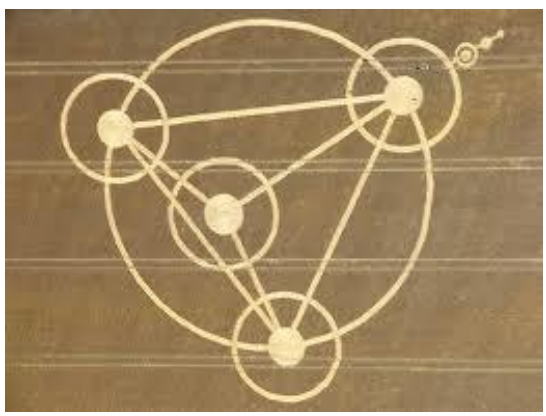
BAB VI

LINGKARAN II

Dalam kehidupan, kita akan banyak sekali menjumpai ataupun terlibat dalam masalah lingkaran, kalau dalam suatu pipa besar akan dimuat untuk mengalirkan minyak dari tempat pengeboran ke kilang produksi. Jika didalam pipa tersebut juga mesti dibuat pipa kecil sedangkan diantara pipa kecil dan pipa bersar tersebut mesti dibuat wadah dalam bentuk segitiga yang digunakan untuk pemanasan agar minyak tadi tidak membeku, persoalannya adalah berapa ukuran pipa besar dan pipa kecil yang mesti kita buat supaya hasilnya maksimal.



Gambar 7. Sistem proporsi √2 dan √3



BAB

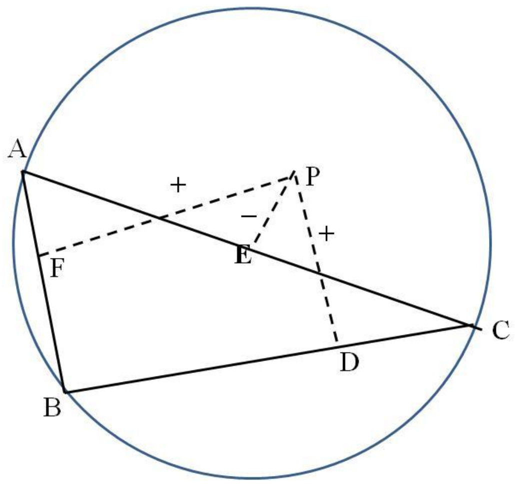
VI

LINGKARAN II

6.1. *Teorema Carnot's*

Sebelum memuktikan teorema Carnot's terlebih dahulu diperkenalkan jarak bertanda dari suatu titik ke suatu sisi. Jika diberikan suatu segitiga *ABC* sebarang, maka setiap sisi dari segitiga tersebut akan membagi bidang tersebut menjadi 2 bahagian. Maka jarak suatu titik ke suatu garis jika titik dan garis tersebut berada pada bidang yang berda. Perlu diperhatikan bahwa garis yang membagi daerah menjadi dua bidang tersebut dimungkinkan oleh masing-masing sisi dari segitiga tersebut. Untuk itu perhatikan gambar 6.1.1 berikut :

Perhatikan gambar 6.1.1, maka jarak *P* ke garis *AB* dan *B*C diberi nilai Positip (karena titik *P* dan garis *AB* maupun garis *BC* tidak berada pada bidang yang sama) yaitu dipisahkan oleh garis *AC*. Jarak dari titik *P* ke garis *AC* diberi nilai negatip karena berada pada bidang yang sama. Secara khusus jarak bertanda ini akan digunakan pada ketaksamaan Erdos-Mordell, namun juga dapat digunakan untuk pembeuktian teorema Carnot's 1 jika titik *P* berada di luar segitiga.



Gambar 6.1.1

Teorema carnot's merupakan applikasi dari teorema Pythagoras, ada dua bentuk dari teorema Carnot's. Misalkan ABC sebarang segitiga dan ambil titik P sebarang di dalam segitiga ABC, kemudian dari titik P buat garis yang tegak lurus ke ketiga sisi segitiga ABC, Misalkan titik potongnya adalah masing masing, D, E dan F, maka teorema Carnot's yang pertama merupakan jumlah kuadrat sisi-sisi $AD^2 - BD^2 + BE^2 - CE^2 + CF^2 - AF^2$.

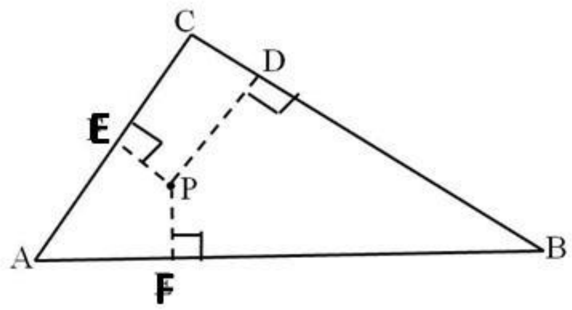
Bentuk kedua merupakan kesamaan jumlah jari lingkaran luar ditambah jari-jari lingkaran dalam terhadap panjang dari titik pusat lingkaran luar ke ketiga sisi segitiga ABC, yang mana garis dari titik pusat ke masing-masing sisi adalah tegakluru. Bentuk pertama dari teorema Carnot,s adalah sebagai berikut

***Teorema* 6.1.1. (*Teorema Carnot* I)**.

Misalkan ABC adalah sebarang segitiga, Jika dari titik P dibuat garis yang tegak lurus terhadap ketiga sisi segitiga, katakan titik potongnya masing-masing terhadap sumbu BC, AC dan AB adalah D, E dan F, maka garis AD, BE dan CF adalah kongkuren jika dan hanya jika

$$AF^2 - \mathrm{FB}^2 + BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 = 0. \qquad (6.1.1)$$

Bukti : $\Rightarrow$ Buat sebarang segitiga dan ambil sebarang titik P dalam segitiga tersebut, Kemudian dari Titik P buat garis yang tegak lurus ke sisi BC, CA dan AB, katakana masing-masing titik potongnya masing-masing adalah D, E dan F (perhatikan gambar 6.1.2a). Dengan menggunakan Teorema Pythagoras diperoleh :



$AE^2 + EP^2 = AP^2$
$-BF^2 - FP^2 = -BP^2$
$BD^2 + DP^2 = BP^2$
$-CD^2 - DP^2 = -CP^2$
$CE^2 + PE^2 = CP^2$
$-AF^2 - PF^2 = -AP^2$

Gambar 6.1.2a

Dengan menjumlahkan ke enam persamaan di atas diperoleh

$$AF^2 - FB^2 + BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 = 0.$$

$\Leftarrow$. Untuk membuktikan sebaliknya misalkan persamaan (6.1.1) , misalkan P titik potong dari AD dan BE, kemudian buat garis dari titik P yang tegak lurus ke sisi AB, tapi katakan titik potongnya di AB adalah Q, maka berlaku

$$AQ^2 - BQ^2 + BD^2 - CD^2 + CF^2 - AF^2 = 0$$

Sehingga

$$AQ^2 - BQ^2 = AF^2 - FB^2$$

Dan ini hanya mungkin berlaku jika $F = Q$.

Keberlakuan $F = Q$ juga dapat ditunjukkan dengan memisalkan $BQ = x$, $AB = c$, sehingga $AQ = c - x$, dan

$$AQ^2 - BQ^2 = (c - x)^2 - x^2 = c^2 - 2cx$$

Jika disebut $f(x) = c^2 - 2cx$, yaitu suatu fungsi linear dari x, maka $f(x)$ jelas merupakan fungsi yang injektif, artinya $f(x)$ akan memberikan nilai yang sama untuk dua nilai $f(x)$ yang sama. Jadi mestilah $F = Q$.

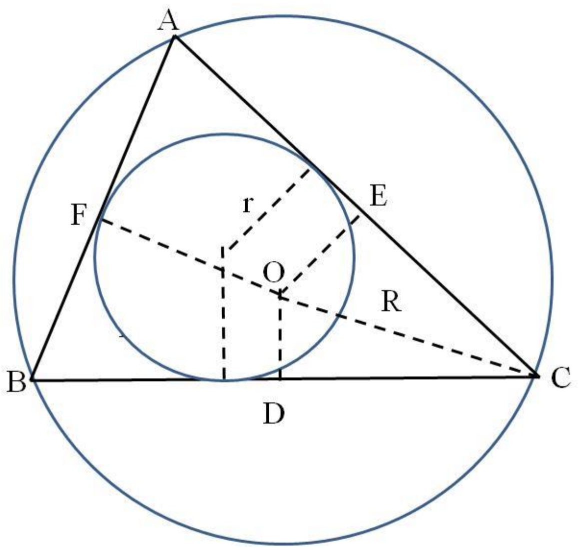
Teorema Carnot's II, merupakan hubungan jari-jari lingkaran luar ditambah jari-jari lingkaran dalam dibandingkan dengan panjang bertanda sisi-sisi dari titik pusat ke sisi AB ditambah jarak titik pusat ke sisi BC ditambah panjang sisi dari titik pusat ke sisi AC. Untuk menambah wawasan cara pembuktian, teorema carnot's II ini akan dibuktikan dengan menggunakan konsep luas daerah.

***Teorema* 6.1.2. (*Teorema Carnot* II)**.

Pada sebarang segitiga *ABC* misalkan *P* adalah titik pusat lingkaran luar, dan *P* adalah sebarang titik dalam segitiga *ABC*, Jika dari titik *P* dibuat garis yang tegak lurus terhadap ketiga sisi segitiga, katakan titik potongnya masing-masing terhadap sumbu *BC*, *AC* dan *AB* adalah *D*, *E* dan *F*, maka berlaku. Jika *R* dan *r*, masing-masing menyatakan jari-jari lingkaran luar dan lngkaran dalam, maka berlaku :

$$OD + OE + OF = R + r. \tag{6.1.2}$$

Bukti : Perhatikan gambar berikut



Gambar 6.1.3a

Misalkan *L* menyatakan luas segitiga *ABC*, maka berdasarkan Remaks 6.1.2 diperoleh

$$rs = L$$

$$r(a + b + c) = 2\,L$$

Misalkan *O* titik pusat lingkaran luar, maka berlaku

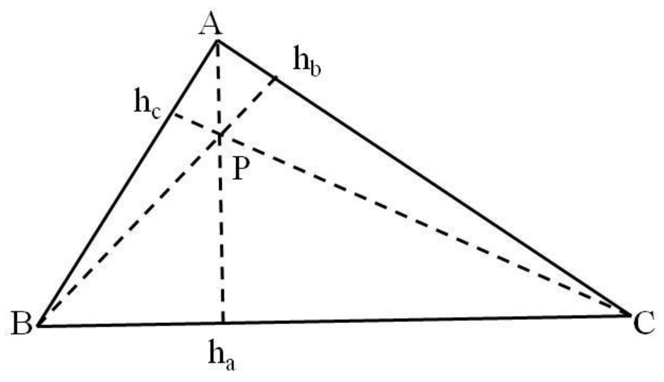
Luas ΔOAB + Luas ΔOBC + Luas ΔOAC = Luas ΔABC

Maka

$$r(a + b + c) = 2\left(\frac{1}{2}AB \times OF + \frac{1}{2}BC \times OD + \frac{1}{2}CA \times OE\right)$$

$$= AB \times OF + BC \times OD + CA \times OE \tag{6.1.3}$$

Karena O adalah titik pusat lingkaran luar, maka segitiga AOB, BOC dan COA merupakan segitiga samakaki serta $\angle AOB = 2\angle C$, $\angle BOC = 2\angle A$ dan $\angle AOC = 2\angle B$.



Gambar 6.1.3b

Dari gambar 6.1.3a diperoleh

$$\frac{R}{\sin 90} = \frac{OD}{\sin OCD}$$

Berdasarkan uraian di atas mengakibatkan

$$\frac{R}{1} = \frac{OD}{\sin(90 - A)}$$

$$\frac{R}{1} = \frac{OD}{\sin ABh_b}$$

yang ekivalen dengan

$$\sin ABh_b = \frac{OD}{R}$$

Dengan memperhatikan $\Delta\, ABh_b$ juga akan diperoleh

$$\sin ABh_b = \frac{Ah_b}{c}$$

Jadi

$$\frac{OD}{R} = \frac{Ah_b}{c} \qquad (6.1.3a)$$

Dilain pihak pada gambar 6.1.3b dengan memperhatikan kesebangunan dari ΔABh_b dengan ΔACh_c diperoleh

$$\frac{Ah_b}{c} = \frac{Ah_c}{b} \qquad (6.1.3b)$$

Dari persamaan (6.1.3a) dan persamaan (6.1.3b) diperoleh

$$\frac{Ah_b}{c} = \frac{Ah_c}{b} = \frac{OD}{R}$$

yang mengakibatkan

$$OD(b + c) = R(Ah_b + Ah_c).$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$OE(a + c) = R(Bh_a + B_{hc})$$

$$OF(a + b) = R(Ch_a + Ch_b)$$

Jumlahkan ketiga persamaan maka akan diperoleh

$$OD(b + c) + OE(a + c) + OF(a + b) = R(Ah_b + Ah_c) + R(Bh_a + B_{hc}) + R(Ch_a + Ch_b)$$

$$OD(b + c) + OE(a + c) + OF(a + b) = R(a + b + c) \qquad (6.1.3c)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (6.1.3) dengan persamaan (6.1.3c) kemudian dengan membagi dengan (a+ b + c), maka akan diperoleh

$$OD + OE + OF = R + r.$$ ▼

6.2. *Teorema Centroid dan Teorema Euler*

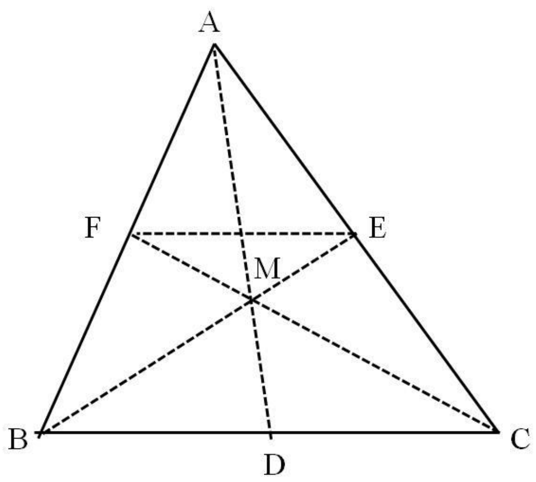
Pada bagian ini akan diperkenalkan tentang teorema *Centroid*, akan tetapi bukti dari teorema tersebut akan diberikan pada bab selanjutnya. Teorema tersebut dimasukkan disini hanya untuk kegunaan pada pembahasan berikutnya. Berikutnya akan dibahas teorema *Euler* yaitu tentang jarang dari titik pusat lingkaran dalam dan lingkaran luar dari suatu segitiga. Yang mana jaraknya dibandingkan dengan nilai dari jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luarnya.

Kebanyakan buku membuktikan teorema Centroid dengan menggunakan teorema Ceva, akan tetapi karena teorema ceva bari akan dibahas pada bab 6, maka untuk membuktikan teorema centroid ini, maka proses pembuktiannya akan digunakan konsep luas dan kesebangunan, sedangkan pada bab 7 juga akan dibahas teorema centroid ini akan tetapi buktinya juga akan digunakan konsep luas dengan cara lain dan sebagai latihan diminta untuk mengerjakannya dengan menggunakan teorema ceva.

***Teorema* 6.2.1 (*Teorema Centroid*)**

Jika *D*, *E* dan *F* masing-masing adalah titik tengah dari sisi *BC*, *CA* dan AB pada suatu setigita *ABC*, maka *AD*, *BE* dan *CF* congcurent di titik *G* serta

$$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = 2 \qquad (6.2.1)$$



Gambar 6.2.1.

Bukti : Perhatikan gambar 6.2.1, Hubungka titik F dan E, jelas *BC* // *FE*, karena *E* dan *F* adalah titik tengah *AC* dan *AB*, maka *BC* : *FE* = 2 : 1. Selanjutnya dari Δ*BMC* ~ Δ*EMF*, diperoleh

$$\frac{BM}{ME} = \frac{CM}{MF} = \frac{BC}{FE} = \frac{2}{1}$$

dengan cara yang sama juga dapat ditunjukkan bahwa

$$\frac{AM}{MD} = \frac{2}{1}$$

Misalkan koordinat titik *A*, *B* dan *C* masing-masing adalah (x_1,y_1), (x_2,y_2) dan (x_3,y_3), jika *G* merupakan centroid dari Δ *ABC*, maka dapat ditentukan koordinat titik centroid tersebut yaitu

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

Koordinat centroid tersebut sebenarnya merupakan akibat lansung dari teorema centroit, yang secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut.

***Corollalry* 6.2.1**. Jika *G* centroid dari segitiga *ABC*, maka berlaku :

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

Bukti : Perhatikan kembali gambar 6.1.4 di atas, jika *D*, *E* dan *F* masing-masing merupakan titik tengah dari *BC*, *AC* dan *AB*, maka berlaku $D=\frac{1}{2}(B+C)$, $E=\frac{1}{2}(A+C)$ dan $F=\frac{1}{2}(A+B)$ juga $G=\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}D=\frac{1}{3}B+\frac{2}{3}E=\frac{1}{3}C+\frac{2}{3}F$, sehingga

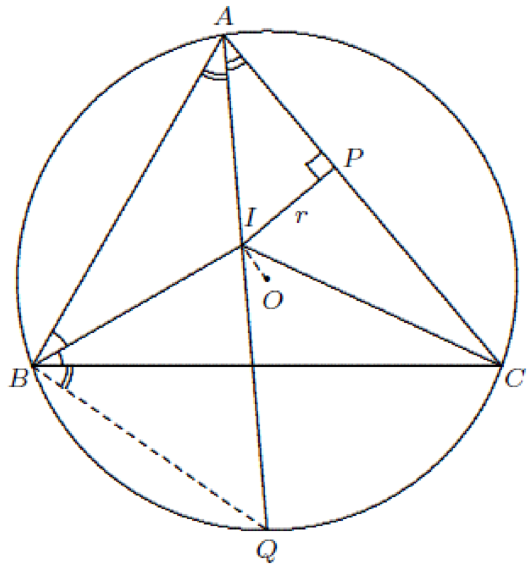
$$G=\frac{1}{3}(A+B+C)$$ ♥

Teorema* 6.2.2**. (Teorema Euler- Formula Euler Untuk OI***)

Misalkan *O* dan *I* masing-masing titik pusat lingkaran luar dan lingkaran dalam dari segitiga *ABC*, dengan *R* Jari-jari lingkaran dalam dan *r* jari-jari lingkaran luar maka berlaku

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Bukti : Perhatikan gambar 6.2.2, buat garis dari titik A melalui I dan memotong lingkaran dititik Q juga melalui titik I buat garis yang tegak lurus ke sisi AC dan katakana titik P. jadi IP $= r$ dan $OA = OB = OC = R$. maka berlaku



Gambar 6.2.2

$$\angle CBQ = ½ \angle A$$

Selanjutnya akan diperoleh

$$\angle QBI = \angle QIB \text{ dan } QB = IQ.$$

Karena nilai mutlak dari nilai kuasa dari titik I terhadap lingkaran luar segitiga ABC adalah

$$R^2 - (\mathrm{OI})^2 = IA.QI = IA.QB$$

$$= \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}.2R\sin\frac{A}{2} = 2Rr$$

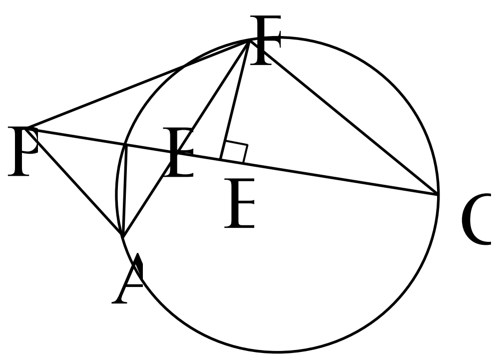
Jadi $OI^2 = R^2 - 2\mathrm{Rr}$.

***Akibat* 6.2.3**. Misalkan R dan r adalah jari-jari lingkaran luar dan lingkaran dalam dari sgitiga ABC, maka $R \geq 2r$. dan tanda kesamaan berlaku bila ABC merupakan segitiga samasisi.

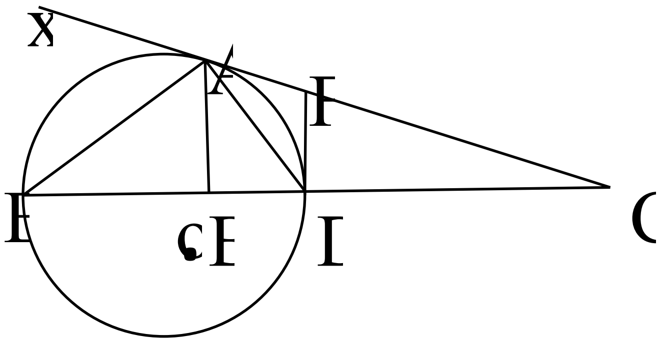
Bukti : karena $OI^2 \geq 0$, maka dari teoema 6.2.2 diperoleh $R \geq 2r$.

***Soal Latihan* 12.**

1. Jika titik P berada di luar ΔABC, Periksalah apakah teorema Carnot I berlaku
2. Buatlah gambar segitiga tumpul, kemudian periksalah apakah teorema Carnot II berlaku.
3. Apakah yang terjadi untuk teorema centroid, jika G segitiga sama kaki atau segitiga samasisi.
4. Misalkan PP' menyatakan diameter dari lingkaran luar segitiga ABC. Tunjukkan bahwa garis simson pada P dan P' berpotongan dengan lingkaran dengan Sembilan titik dari segitiga ABC dan membentuk sudut siku.
5. Jika titik P terletak diluar lingkaran kemudian dibuat garis PA dan PB yang menyinggung lingkaran masing-masing di A dan B. Dari titi Q dibusur besar (atau busur kecil) AB, ditarik garis yang tegak lurus AB, PA dan PB. Buktikan bahwa panjang garis yang tegak lurus ke AB adalah rata-rata geometri panjang dua garis tegak lurus lainnya.
6. Diketahui ΔABC dengan AB = 8 cm, BC = 7 cm dan CA = 6 cm. Titik D terletah pada perpanjangan AC sehingga CD = 12. Hitunglah panjang sisi BD.
7. Tentukanlah luas segi-empat terluas yang termuat dalam lingkaran luar segitga ABC sama sisi yang panjang sisinya 12
8. Misalkan H orthocenter dari ΔABC, tunjukkan bahwa garis euler dari ΔABC, ΔHBC, ΔHCA dan ΔHAB adalah segaris.
9. Pada gambar disebelah, $AF = FC$ dan $PE = EC$,
   a. Tunjukkan bahwa ΔFPA samakaki
   b. Tunjukkan bahwa $AB + BE = EC$.



10. Sebuah lingkaran dengan titik pusat O, titik E, O, B, D adalah segaris dan juga titik X, A, F, C (seperti gambar disebelah), Garis XC dan FD masing-masing menyinggung lingkaran di titik A dan D, tunjukkan bahwa



   a. AD bisector $\angle BAC$
   b. AE bisector $\angle BAX$

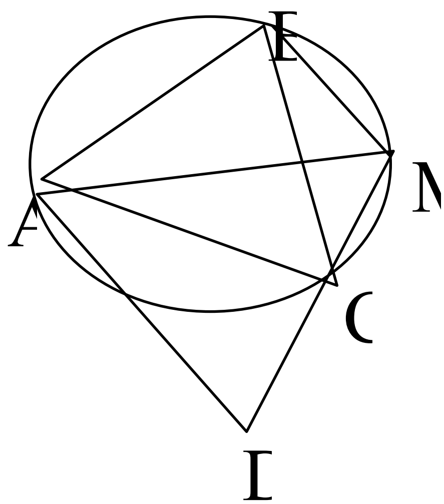
11. Misalkan G centroid dari $\Delta\ ABC$, buatlah sebuah garis melalui G yang memotong AB dan AC masing-masing di titik M dan N, buktikan bahwa

$$\frac{BM}{MA}+\frac{CN}{NA}=1$$

12. *) Sisi-sisi sejajar suatu trapesium panjangnya adalah 40 cm dan 16 cm. jika panjang kaki-kakinya adalah 24 cm dan 30 cm. Hitunglah panjang diagonalnya.
13. **) diketahui ΔABC siku-siku di A. Buktikan bahwa
   a. $BC > AB$ atau $BC > AC$
   b. $(BC)^3 > (AB)^3 + (AC)^3$
   c. $(BC)^4 > (AB)^4 + (AC)^4$ atau $(BC)^4 < (AB)^4 + (AC)^4$, (hanya salah satu yang benar).
14. Misalkan O adalah titik pusat lingkaran luar ΔABC, sedangkan D, E dan F masing-masing adalah proyeksi titik Tunjukkan bahwa orthocenter dari ΔDEF adalah juga circumcenter O dari ΔABC.
15. Dengan kasus yang sama seperti soal nomor 14 di atas, tunjukkan juga bahwa centroid dari ΔDEF juga centroid dari ΔABC.

16. Berikut ini sebenarnya sebuah teorema yang sering disebut dengan teorema Van Schooten's. yaitu misalkan ΔABC sama sisi. Misalkan pula M suatu titik pada busur BC dari lingkaran luarnya. Tunjukkan bawha

$$AM = BM + CM$$

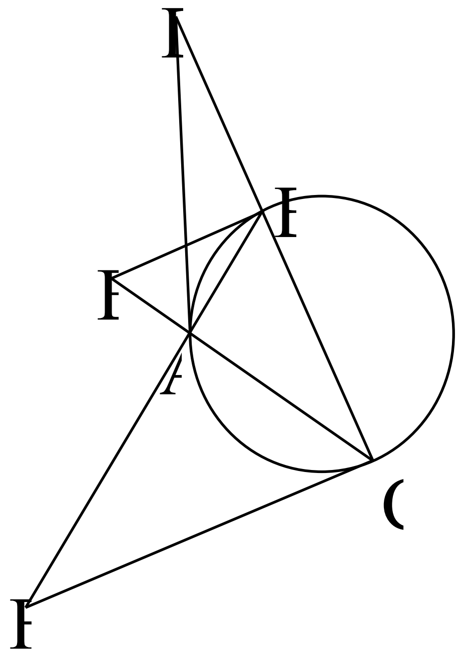


Pentunjuk : kontruksi titik D sehingga $AM = DM$ dan kemudian tunjukkan $\Delta ABM \sim \Delta ACD$.

17. **). Pada gambar disebelah titik A, B dan C berada pada lingkaran, garis singgung yang melalui titik A berpotongan dengan CB di titik D. Garis singgung dari titik B berpotongan dengan CA di titik E dan garis singgung dari titik C berpotongan dengan BA di titik F. Tunjukkan bahwa D, E dan F adalah segaris

Pentunjuk : tunjukkan $\Delta ACD \sim \Delta BAD$ dan

tunjukkan juga $\frac{DB}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$



6.3. ***Segi-empat Siklik***

Pada bagian ini akan diperkenalkan tentang segi-empat siklik, yang dalam berbagai buku teks sering disebut dengan segi-empat tali busur. Pada sub bab sebelumnya telah diperkenalkan segiempat siklik tersebut, namum pada bagian ini pembahasan segi-empat siklik tidak begitu mendalam, karena akan dibahas juga pada bagian lain. Pada bagian sebelumnya telah disebutkan bahwa empat buah titik dikatakan *siklik* jika keempat titiknya berada pada sebuah lingkaran.

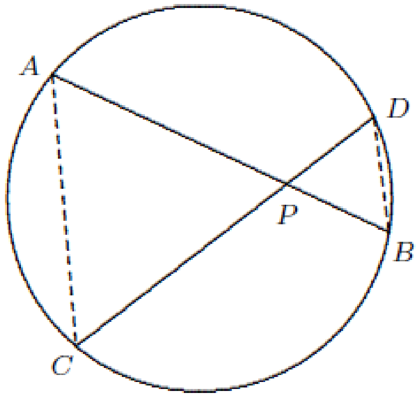
Salahsatu teorema yang paling terkenal tentang segi-empat siklik ini adalah apa yang dikenal dengan teorema Euclide's yang bercerita tentang eksistensi atau syarat perlu dan cukup untuk empat buah titik yang siklik

***Teorema* 6.3.1**. Misalkan A, B, C dan D empat buah titik pada suatu bidang sehingga AB dan CD berpotongan dititik P. maka A, B, C dan D adalah konsiklik jika dan hanya jika

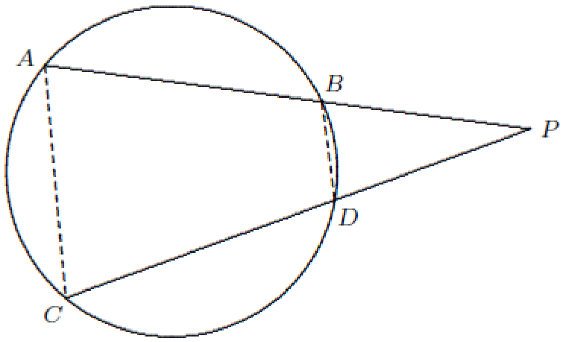
$$PA\,.PB = PC\,.\,PD.$$

Bukti : Perhatikan gambar di bawah ini, maka dengan menunjukkan kesebangunan dari ΔAPC dengan ΔDBC, maka akan diperoleh

$$PA\,..PB = PC\,.\,PD.$$

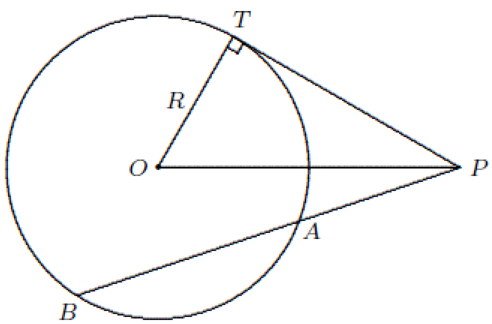


Gambar 6.3.1a

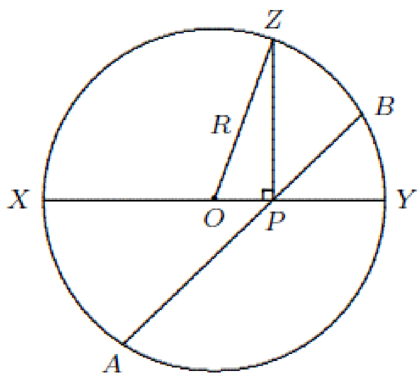


gambar 6.3.1b

Definisi 6.3.1. Misalkan O titik pusat suatu lingkaran dan R adalah jari-jari dari lingkaran tersebut, maka kuasa titik P terhadap lingkaran tersebut didefinisikan $OP^2 - R^2$.



Gambar 6.3.2a



gambar 6.3.2b

Posisi dari titik P terhadap lingkaran tersebut dapat terjadi dalam tiga kondisi yaitu, P berada pada lingkaran, maka jelas kuasanya sama dengan nol. Akan tetapi bila titik P berada diluar lingkaran, maka kuasa titik P terhadap lingkaran tersebut tidak lain adalah panjang garis singgung dari P ke lingkaran. Jika kita buat garis dari P yang memotong lingkaran dititik A dan B (seperti gambar 6.3.2a), jika kita misalkan $K(P)^2$ adalah kuasa dari titik P terhadap lingkaran, maka untuk titik P yang berada diluar lingkaran akan berlaku

$$K(P)^2 = PT^2 = OP^2 - \mathrm{R}^2$$
$$= PA.PB.$$

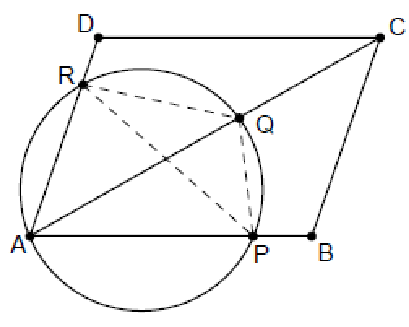
Sedangkan bila titik P berada dalam lingkaran, misalkan XY adalah diameter lingkaran yang melalui O dan P (senantiasa bisa dibuat), kemudian dibuat garis melalui titik P yang memotong lingkaran dititik A dan B (perhatikan gambar 6.3.1b) selanjutnya melalui titik P juga buat garis yang tegak lurus dengan diameter tersebut dan memotong lingkaran dititik Z maka berlaku :

$$K(P)^2 = OP^2 - R^2 = -(PZ)^2$$
$$= -PX.\ PY = -PA.\ PB$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa bila titik P berada diluar lingkaran, maka nilai dari $K(P)^2$ adalah positip dan bila berada pada lingkaran maka $K(P)^2 = 0$ serta bila P berada didalam lingkaran maka nilai $K(P)^2$ adalah negatip.

***Teladan* 6.3.1** : *ABCD* adalah suatu jajaran genjang, dibuat sebuah lingkaran yang melalui titik A dan memotong sisi AB, AD dan AC seperti gambar disebelah, tunjukkan bahwa berlaku

$$AP\times AB + AR\times AD = AQ\times AC$$



gambar 6.3.3

Penyelesaian : Gunakan teorema Ptolemy untu segi-empat APQR, maka diperoleh

$$AP\times RQ + AR\times PQ = AQ\times RP$$

Kalikan persamaan di atas dengan AB/RQ, maka diperoleh

$$AP \times AB + AR \times CB = AQ \times AC$$

Kemudian ganti CB dengan AD, maka diperoleh

$$AP \times AB + AR \times AD = AQ \times AC$$

***Teladan* 6.3.2** : Diketahui garis AB dan AC menyinggung lingkaran dengan berpusat di O masing-masing di B dan C. Garis CE tegak lurus diameter BD. Buktikan bahwa

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{BO}$$

Penyelesaian : Perhadikan ΔBCE dan ΔABO (gambar 6.3.3a) , kemudian tarik garis AO dan BC (gambar 6.3.3b). yang mana dengan OA dan BC berpotongan di titik P.

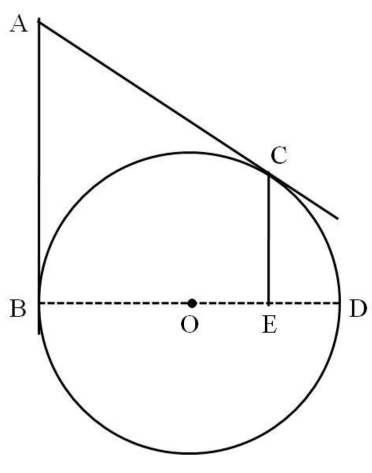
Perhatikan bahwa

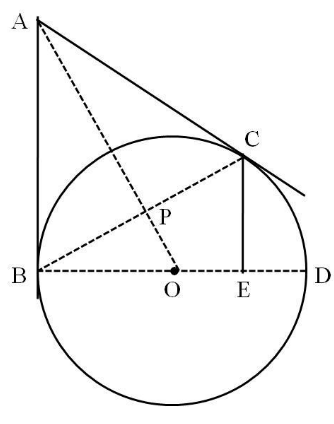
$$AB = OC$$
$$AO = AO$$
$$\angle ABO = \angle ACO = 90^2.$$

Maka $\Delta AOB = \Delta AOC$, akibatnya $AB = AC$ dan $\angle BAO = \angle OAC$, karena $AP = AP$, maka ΔAPB kongruen dengan segitiga ΔAPC. Jadi $\angle P = 90^0$.

Dalam ΔAOB, garis BP adalah garis tinggi, maka $\angle BAO = \angle CBE$ dan $\angle OAB = \angle BEC$, yang mengakibatkan $\Delta AOB \sim \Delta BCE$.. Jadi

$$\frac{AB}{BO} = tg\angle AOB = tg\,\angle BCE = \frac{BE}{CE}$$





Gambar 6.3.3a gambar 6.3.3b

***Teladan* 6.3.3** : Diketahui sebuah lingkaran dan titik P diluar lingkaran dan titik T pada lingkaran. Dua buah garis singgung dari titik P menyinggung lingkaran, masing-masing di titik A dan B. Kemudian dibuat garis singgung melalui T yang memotong garis PA dan PB masing-masing di titik Q dan R. Hitunglah luas ΔPQR.

Penyelesaian : Dari premis yang diberikan maka ada beberapa kemungkinan untuk posisi titik T dan P. Untuk kasus pertama misalkan posisi titik T dan P adalah seperti gambar 6.3.4 di bawh

karena

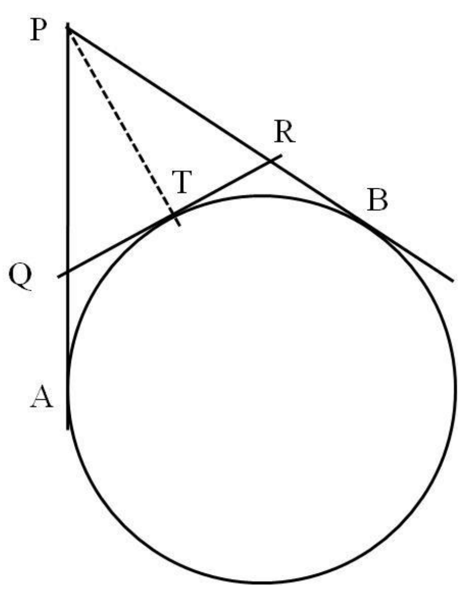
$AQ = QT$ dam $BR = RT$,

selanjutnya keLeling ΔPQR adalah

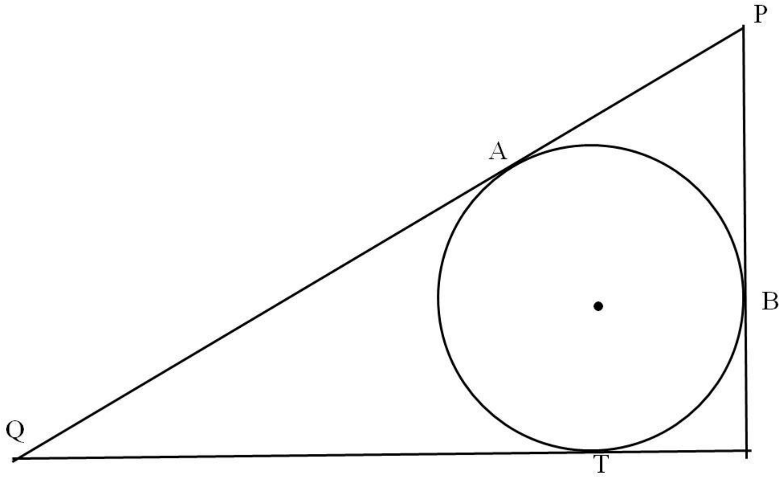
$$\begin{aligned} K &= PQ + QR + RP \\ &= PQ + QT + TR + RP \\ &= PQ + QA + RB + RP \\ &= PA + PB \end{aligned}$$

kasus lain yaitu titik T dan P seperti pada gambar 6.3.5. dengan cara yang tidak jauh bebeda dengan cara di atas, sebagai latihan silakan ditunjukkan bahwa

$$K = PA + PB + 2QR$$



gambar 6.3.4



Gambar 6.3.5

.

Dalam buku pelajaran tingkat sekolah menengah, segi-empat siklik ini sering dikenal juga dengan nama *segi-empat tali busur*. Dalam tulisan selanjutnya kadang-kadang kita sebut dengan segi-empat siklik. Berikut ini akan diberikan karakteristik dari segi-empat siklik,

***Teorema* 6.3.2** : Jika *ABCD* adalah segi-empat konvek. Maka pernyataan berikut adalah ekivalen.

a. *ABCD* adalah segi-empat siklik
b. $\angle BAC = \angle BDC$
c. $\angle A + \angle C = 180^0$
d. $\angle ABE = \angle D$
e. ***Bukti*** : a $\Rightarrow$ b. (jelas)

b $\Rightarrow$ c. perhatikan gambar 6.3.6. disebelah dan pembaca dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa ΔAPB sebangun dengan ΔDPC, dan ini menyebabkan bahwa ΔAPD sebangun dengan ΔBPC, maka $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle CAD = \angle CBD$ dan $\angle ADB = \angle ACB$.

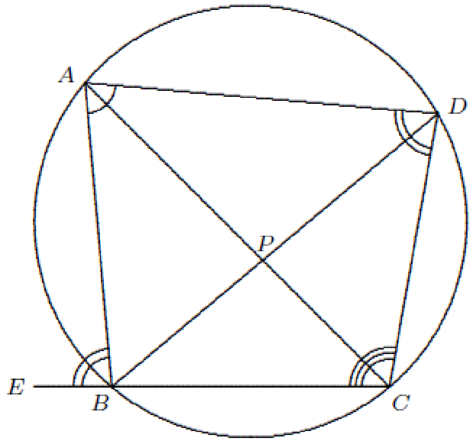
Ini mengakibatkan, $\angle A+\angle C =$

$\angle BAC+\angle CAD+\angle ACB+\angle ACD$

$= ½(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) =$

180^0.

c $\Rightarrow$ d dan d $\Rightarrow$ a. Sebagai latihan.



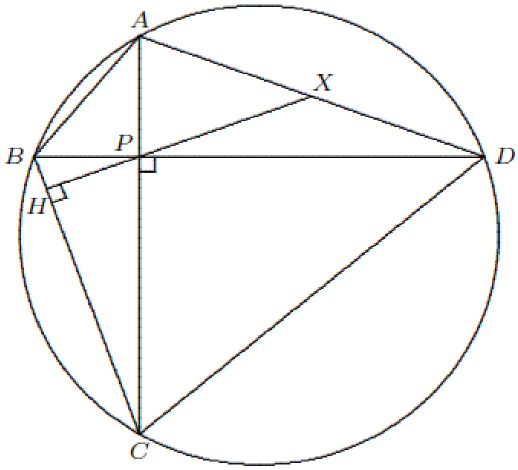
gambar 6.3.6

Berikut ini dibahas kasus khusus yang mana pada segi-empat siklik tersebut berlaku bahwa perptongaan diagonalnya adalah tegaklurus. Akan dianalisa apa akibat yang ditimbulkan dari kasus tersebut

***Teorema* 6.3.3.** : Jika *P* adalah titik potong diagonal pada segi-empat siklik yang mana perpotongan diagonal tersebut adalah tegaklurus. Maka garis bagi sisi yang melalui titik *P* adalah tegak lurus dengan sisi yang bersebelahan.

Bukti : Misalkan X adalah titik biseKtor dari sisi *AD*, garis dari *X* melalui *P* memotong sisi *BC* di titik *H*. akan ditunjukkan bahwa $XH \perp BC$. Untuk itu perhatikan gambar di bawah ini. Dapat ditunjukkan bahwa $\angle DPX = \angle BPH = \angle PCH = \angle ACB = \angle ADB = \angle XDP$. Ini menyatakan bahwa ΔXPD adalah samasisi. Yang juga akan mengakibatkan ΔXAP juga samasisi. Konsekuensinya $XA = XP = XD$. Yang dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa

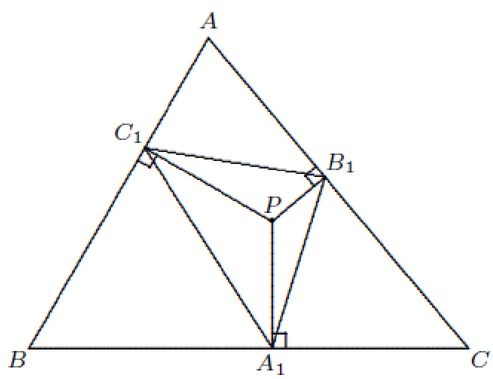
$\angle PHC = \angle DPC = 90^0$.



gambar 6.3.7

Definisi **6.3.3**: Misalkan P sebarang titik dalam ΔABC, jika A_1, B_1 dan C_1 adalah titik proyeksi dari titik P terhadap ketiga sisi segitiga ABC, maka $A_1B_1C_1$ disebut segitiga pedal (pedal triangle) dari titik P terhadap segitiga ABC.

Ilustrasi dari definisi di atas dapat dilihat seperti pada gambar disebelah. Ambil sebarang titik P dalam segitiga ABC kemudian secara berturut-turut misalkan A_1 proyeksi P pada sisi BC, B_1 proyeksi P pada sisi AC dan C_1 proyeksi P pada sisi AB, maka segitiga $A_1B_1C_1$ itulah yang disebut dengan segitiga pedal dari titik P terhadap segitiga ABC.

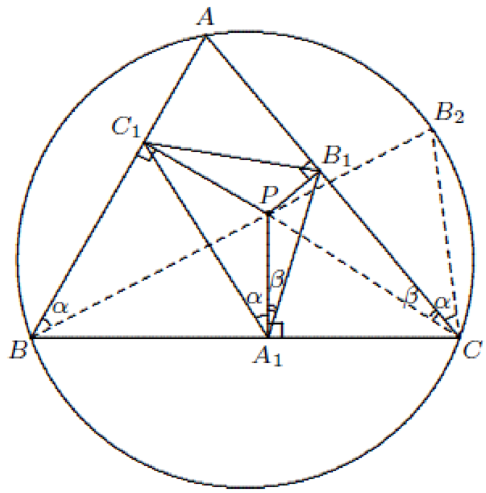


Gambar 6.3.8

***Teorema* 6.3.4.**: Misalkan $A_1B_1C_1$ segitiga pedal dari sebarang titik P terhadap segitiga ABC. Jika O adalah titik pusat lingkaran luar dan R adalah jari-jari lingkaran luar segitiga ABC, maka berlaku

$$L\Delta A_1B_1C_1 = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2}.L\Delta ABC$$

Bukti : Perhatikan gambar 6.3.9 disebelah, misalkan B_2 titik potong garis dari titik B melalui P pada lingkaran luarΔ ABC. Kemudian hubungkan titik B_2 dengan C, maka akan diperoleh $\angle A_1 = \alpha + \beta = \angle B_2CP$.



gambar 6.3.9

Maka

Dan juga

$$L\Delta A_1B_1C_1 = \frac{1}{2}A_1B_1.A_1C_1.\sin A_1$$
$$= \frac{1}{2}(PC\sin C).(PB\sin B).\sin B_2CP$$

$$\frac{\sin B_2CP}{\sin A} = \frac{\sin B_2CP}{\sin BB_2C} = \frac{PB_2}{PC}$$

Maka

$$L\Delta A_1B_1C_1 = \frac{1}{2}PB_1.PB\sin A\sin B\sin C$$
$$= \frac{1}{2}(R^2 - OP^2).\sin A\sin B\sin C$$
$$= \frac{R^2 - OP^2}{\mathbf{4R^2}}.L\Delta ABC$$

Apabila P berada pada lingkaran luar maka jelas akan berlaku luas segitiga pedal adalah nol (sebagai soal latihan bagi pembaca), juga berlaku apabila A_1, B_1 dan C_1 segaris, maka pasti juga luas segitiga pedal tersebut adalah nol.

Kalau untuk sebarang segitiga kita dapat menurutkan rumus untuk menghitung luasnya (walaupun lebih menarik menghitung luas segitiga tanpa menggunakan rumus). Berikut ini akan diberikan rumus untuk menghitung luas sebarang segi-empat siklik (segi-empat tali busur). Sedangkan untuk sebarang segi-empat akan diberikan pada bagian berikutnya. Dalam bentuk khusus kalau segi-empat siklik yang panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat maka segi-empat tersebut dinamakan segi-empat Brahmagupta (segi-empat heron siklik).

Teorema 6.3.4. Teorema Brahmagupta.

Misalkan segi-empat siklik mempunyai panjang sisi a, b, c dan d. misalkan s adalah perimeternya. Maka luas segi-empat siklik tersebut adalah

$$L^2 = (s-a).(s-b).(s-c).(s-d)$$

Bukti : Perhatikan gambar 6.3.10 disebelah dan misalkan n merupakan panjang sisi BD.

Karena $\angle A + \angle C = 180^0$,

$$\cos A = -\cos C$$

$$\sin A = \sin C$$

maka berdasarkan hukum cosinus diperoleh

$n^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A$ dan juga

$n^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos C$;

ini memberikan

$$2(ab + cd) \cos A = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \quad (6.3.1)$$

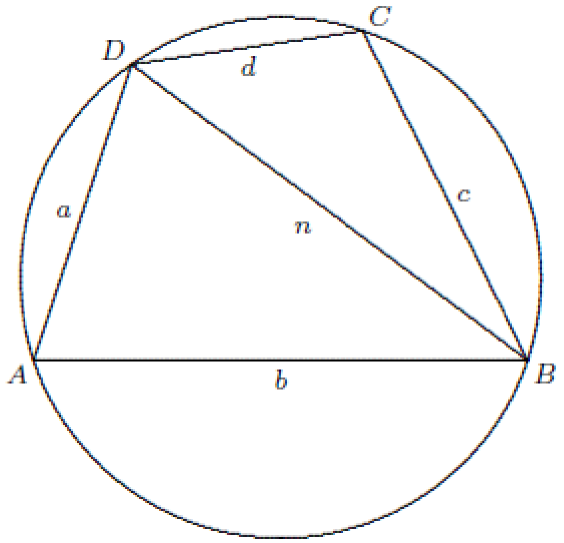
Selanjutnya dari

$L = \frac{1}{2}ab\sin A + \frac{1}{2}cd\sin C =$

$\frac{1}{2}(ab + cd)\sin A$

Jadi

$$4L = (ab + cd)\sin A \qquad (6.3.2)$$



gambar 6.3.10

Dari persamaan (6.3.1) dan (6.3.2) diperoleh

$$4(ab + cd)^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16L^2.$$

$$16L^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

$$= (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)$$

$$= ((a + b)^2 - (c - d)^2).((c + d)^2 - (a - b)^2)$$

$$= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b)$$

$$= (2s - 2d)(2s - 2c)(2s - 2b)(2s - 2a)$$

Jadi

$$L^2 = (s - a).(s - b).(s - c).(s - d) \qquad (6.3.3)$$

Jika pada teorema Brahmagupta di atas $d = 0$. Maka ia akan menjadi ΔABC dan kalau luas ΔABC dilambangkan dengan $L\Delta ABC$, maka diperoleh

$$L\Delta ABC = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

Kalau pada teorema di atas rumus keliling segi-empatnya adalah untuk segi-empat siklik, maka berikut ini akan diberikan teorema untuk menghitung luas dari sebarang segi-empat. Dan kalau kita ambil kasus khususnya untuk segi-empat yang siklik,

***Teorema* 6.3.5**: Pada sebarang segi-empat *ABCD* dengan $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ dan $DA = d$. Buktikan bahwa luas segi-empat

$$L^2 = (s-a).(s-b).(s-c).(s-d) - abcd\cos^2\alpha$$

Dengan s setengah keliling dan 2α adalah jumlah sudut yang saling berhadapan

Bukti : Perhatikan gambar 6.3.11 dan tarik garis *BD*. Maka pada ΔABD berlaku rumus cosinus yaitu

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle A$$

Dan pada ΔBDC berlaku hal serupa yaitu

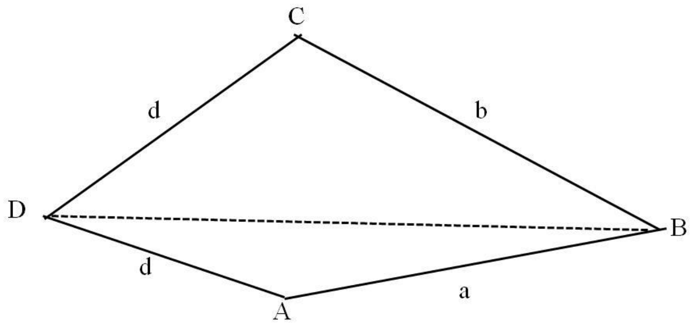
$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle C$$

Maka berdasarkan kedua persamaan tersebut diperoleh

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle A = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle \mathrm{C}$$

atau

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad\cos\angle A - 2bc\cos\angle \mathrm{C} \qquad (6.3.4)$$



Gambar 6.3.11

Tetapi luas segi-empat *ABCD* dapat ditulis sebagai

$$L \square ABCD = L\Delta ABD + \mathrm{L}\Delta BDC$$
$$= \tfrac{1}{2}\, ad\sin\angle A + \tfrac{1}{2}\, bc\sin\angle C \qquad (6.3.5)$$

Atau

$4L = 2ad\ sin\ \angle A + 2\ bc\ sin\ \angle C$

Jumlah kuadrat ruas kiri dari masing-masing persamaan (6.3.4) dan (6.3.5) diperoleh

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 16\ L^2$$

$$= 4(ad \cos \angle \mathrm{A} - bc \cos \angle \mathrm{C})^2 + 4(ad \sin \angle \mathrm{A} - bc \sin \angle \mathrm{C})^2$$

$$= 4(a^2d^2 + b^2c^2) - 8abcd\ cos(\mathrm{A} + \mathrm{C})$$

$$= 4(a^2d^2 + b^2c^2) - 8abcd\ cos\ 2\alpha$$

$$= 4(a^2d^2 + b^2c^2) - 16abcdcos^2\alpha + 8abcd$$

$$= 4(ad + bc)^2 - 16abcdcos^2\alpha + 8abcd$$

Dengan demikian

$$16L^2 = 4\ (ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcdcos^2\alpha$$

$$= (2ad + 2bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcdcos^2\alpha \qquad (6.3.6)$$

Dengan mengurangkan selisih kuadrat dua suku pertama, diperoleh

$$[(2ad + 2bc) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)].[(2ad + 2bc) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)]$$

$$= [(b + c)^2 - (a - d)^2][(a + d)^2 - (b - c)^2]$$

$$= [(b + c) - (a - d)].[b + c) +)a - d)] \times [(a + d) - (b - c)]\ [(a + d)]$$

$$+ (b - c)$$

$$= (+b + c - a)(a + b + c - d)(a + c + d - b)(a + d + b - c)$$

$$= 2(s - a)2(s - d)\ 2(s - b)\ 2(s - c)$$

Gantikan persamaan ini pada persamaan (3) untuk memperolah

$$16L^2 = 16(s - a)\ (s - b)\ (s - c)\ (\ s - d) - 16\ abcd\ cos^2\alpha$$

Jadi

$$L^2 = (s - a)\ (s - b)\ (s - c)\ (\ s - d) - abcd\ cos^2\alpha$$

Kalau di atas adalah tentang luas dari segi-empat Brahmagupta dan luas dari sebarang segi-empat, maka berikut ini akan dibahas tentang panjang diagonal dari segi-empat Brahmagupta. Pada bagian lain juga akan dibahas hal-hal yang terkait dengan perbandingan diagonal dari suatu segi-empat siklik.

***Teorema* 6.3.6** Jika $\overline{AC} = e$ dan $\overline{BD} = f$ adalah panjang diagonal segi-empat Brahmagupta *ABCD* maka berlaku

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \text{ dan } f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

***Bukti* :** Perhatikan Gambar 6.3.13, dengan aturan kosinus diperoleh

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B = c^2 + d^2 - 2cd\cos\angle D. \tag{6.3.7}$$

Karena $\angle B$ dan $\angle D$ berhadapan maka $\angle B = 180° - \angle D$, sehingga

$$\cos\angle B = -\cos\angle D. \tag{6.3.8}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (6.3.8) pada persamaan (6.3.7) diperoleh

$$\cos\angle D = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2ab + 2cd}. \tag{6.3.9}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusi persamaan (6.3.9) pada persamaan (6.3.7) diperoleh

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\left(\frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2ab + 2cd}\right)$$

$$e^2 = \frac{(c^2 + d^2)(ab + cd) - c^3 d - cd^3 + cda^2 + cdb^2}{ab + cd}$$

$$e = \sqrt{\frac{cda^2 + c^2 ab + abd^2 + cdb^2}{ab + cd}}$$

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}. \tag{6.3.10}$$

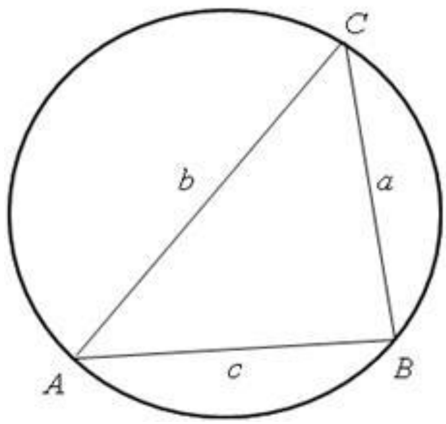
Dengan cara yang sama seperti memperoleh persamaan (6.3.10) diperoleh

$$f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

Setelah membahas panjang diagonal dari segi-empat Bragmagupta, maka selanjutnyakita bahas bagaimana mengkontruksi segi-empat Brahmagupta, hal ini diperlukan karena kalau hanya sebarang segi-empat siklik (segi-empat tali busur), maka yang kita punyai hanya jumlah sudut yang berhadapan adalah 180^0, akan tetapi belum tentu panjang semua sisinya adalah bilangan bulat. Kalau untuk 3 buah sisi pertama, senantiasa bisa kita buat panjangnya bilangan bulat, akan tetapi yang jadi masalah adalah, kalau sebarang kita buat pada sisi keempat, apa jaminannya panjangnya merupakan bilangan bulat. Adapun cara mengkontruksi segi-empat Brahmagupta adalah sebagai berikut.

Misalkan *ABC* suatu segitiga Heron siklik dengan panjang sisi $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, dan $\overline{AC} = c$.Pada Gambar 6.3.12, dengan mengambil titik *D* pada busur di depan busur *AB* dengan syarat garis $\overline{CD}$ lebih pendek dari garis $\overline{AB}$ dan tidak ada sisi segi-empat yang sejajar, maka diperoleh segi-empat Brahmagupta *ABCD* dengan panjang sisi $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ dan $\overline{DA} = d$ tidak diketahui.

Selanjutnya, dikontruksi formula Brahmagupta untuk menentukan luas segi-empat Brahmagupta dengan panjang semua sisinya tidak diketahui. Karena garis $\overline{DC}$ lebih pendek dari pada garis $\overline{AB}$, maka perpanjangan $\overline{AD}$ dan $\overline{BC}$ akan berpotongan pada satu titik di luar lingkaran, namakan titik perpotongannya adalah titik *E* dan misalkan $\overline{EC} = \alpha$ dan $\overline{ED} = \beta$.



Gambar 6.3.12.

Perhatikan segi-empat $ABCD$ dan ΔCDE pada Gambar 6.3.13.

$$\angle ABC + \angle ADC = 180° \qquad ...(6.3.11)$$

$$\angle ADC + \angle CDE = 180°, \qquad ...(6.3.12)$$

Maka dari persamaan (6.3.11) dan (6.3.12) diperoleh

$$\angle ABE = \angle CDE,$$

dengan $\angle ABC = \angle ABE.$

Kemudian dari segi-empat $ABCD$ dan ΔCDE pada Gambar 6.3.13 juga diperoleh

$$\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ \qquad \ldots(6.3.13)$$

$$\angle BCD + \angle ECD = 180^\circ, \qquad \ldots(6.3.14)$$

maka dari persamaan (6.3.13) dan (6.3.14) diperoleh

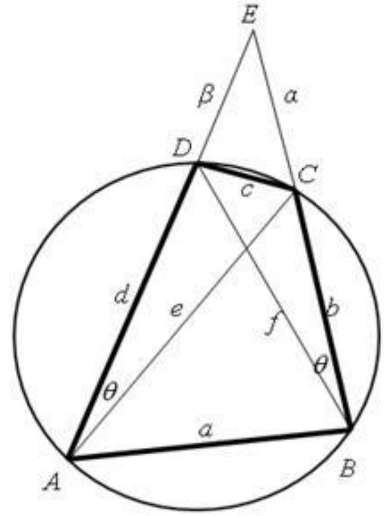
$$\angle EAB = \angle ECD,$$

dengan $\angle DAB = \angle EAB.$

Sehingga dari kesebangunan segitiga Sd-Sd, diperoleh

$$\Delta ABE \sim \Delta CDE.$$

Akibatnya



Gambar 6.3.13.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\alpha + b}{\beta} = \frac{\beta + d}{\alpha}. \qquad \ldots(6.3.15)$$

Misalkan persamaan (6.3.15) sama dengan λ, maka diperoleh

$$\left.\begin{aligned} a &= \lambda c, \\ b &= \lambda\beta - \alpha, \\ d &= \lambda\alpha - \beta. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(6.3.16)$$

Selanjutnya, perhatikan ΔABC dan ΔADC pada Gambar 6.3.13, diperoleh

$$\frac{e}{\sin \angle ABC} = \frac{e}{\sin \angle ADC} = 2R$$

sehingga

$$e = 2R \sin \angle ABC = 2R \sin \angle ADC. \qquad \ldots(6.3.17)$$

Kemudian perhatikan ΔBAD dan ΔBCD pada Gambar 6.3.13, dengan cara yang sama seperti memperoleh persamaan (6.3.17) diperoleh

$$f = 2R\sin\angle BAD = 2R\sin\angle BCD.$$

Selanjutnya dari ΔCDE pada Gambar 6.3.13, dapat dibentuk suatu lingkaran luar segitiga yang menyinggung ketiga titik sudut ΔCDE dan misalkan ρ adalah panjang jari-jari lingkaran luar ΔCDE. Berdasarkan Teorema 2.1.3 diperoleh

$$\frac{\alpha}{\sin\angle CDE} = \frac{\beta}{\sin\angle DCE} = \frac{c}{\sin\angle CED} = 2\rho. \qquad \ldots(6.3.18)$$

Dari persamaan (6.3.18) diperoleh

$$\sin\angle CDE = \frac{\alpha}{2\rho}. \qquad \ldots(6.3.19)$$

Karena $\angle CDE$ dan $\angle ADC$ merupakan sudut berpelurus dan berdasarkan persamaan (6.3.19) diperoleh

$$\sin\angle ADC = \sin\angle CDE$$

$$\sin\angle ADC = \frac{\alpha}{2\rho}. \qquad \ldots(6.1.20)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6.3.19) pada persamaan (6.3.17) diperoleh

$$e = \frac{R}{\rho}\alpha. \qquad \ldots(6.3.21)$$

Selanjutnya dengan cara yang sama seperti memperoleh persamaan (6.1.21) diperoleh

$$f = \frac{R}{\rho}\beta. \qquad \ldots(6.3.22)$$

Pada segi-empat Brahmagupta diperoleh

$$ac + bd = ef. \qquad \ldots(6.3.23)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6.3.16), (6.3.21) dan (6.3.22) pada persamaan (6.3.23) diperoleh

$$\left(\frac{R}{\rho}\alpha\right)\left(\frac{R}{\rho}\beta\right) = \lambda c.c + (\lambda\beta - \alpha)(\lambda\alpha - \beta)$$

$$\frac{R^2}{\rho^2} = \frac{\lambda^2\alpha\beta - \lambda(\alpha^2 + \beta^2 - c^2) + \alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$\frac{R^2}{\rho^2} = \lambda^2 - \frac{\lambda\left(\alpha^2 + \beta^2 - c^2\right)}{\alpha\beta} + 1. \qquad \ldots(6.3.24)$$

Dengan menggunakan aturan kosinus pada ΔCDE diperoleh

$$2\cos\angle E = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - c^2}{\alpha\beta}. \qquad \ldots(6.3.25)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (6.3.25) pada persamaan (6.3.24) diperoleh

$$\frac{R^2}{\rho^2} = \lambda^2 - 2\lambda\cos\angle E + 1$$

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 = \lambda^2 - 2\lambda\cos\angle E + \cos^2\angle E + \sin^2\angle E$$

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 - \left(\lambda - \cos\angle E\right)^2 = \sin^2\angle E$$

$$\left(\frac{R}{\rho} - \lambda + \cos\angle E\right)\left(\frac{R}{\rho} + \lambda - \cos\angle E\right) = \sin^2\angle E. \qquad \ldots(6.3.26)$$

Dari persamaan (6.3.26) secara aljabar nilai $\sin\angle E$ adalah rasional atau irrasional. Padahal jika nilai $\sin\angle E$ adalah rasional maka nilai $\cos\angle E$ adalah irrasional, tapi jika nilai $\sin\angle E$ adalah irrasional maka nilai $\cos\angle E$ mungkin rasional atau irrasional. Namun, karena $\angle E$ adalah sudut Heron maka nilai $\sin\angle E$ dan $\cos\angle E$ haruslah rasional, jadi untuk memperoleh nilai rasional dari R dan λ dengan t bilangan rasional berlaku

$$\frac{R}{\rho} - \lambda - \cos\angle E = t\sin\angle E \qquad \ldots(6.3.27)$$

$$\frac{R}{\rho} + \lambda + \cos\angle E = \frac{\sin\angle E}{t}. \qquad \ldots(6.3.28)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (6.1.27) dan persamaan (6.1.28) diperoleh

$$R = \frac{\rho}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\sin\angle E. \qquad \ldots(6.3.29)$$

Dari persamaan (6.1.18) diperoleh

$$2\rho \sin \angle CED = 2\rho \sin \angle E = c$$

$$\frac{c}{2} = \rho \sin \angle E. \qquad \text{…(6.3.30)}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6.3.30) pada persamaan (6.3.29) diperoleh

$$R = \frac{c}{4}\left(t + \frac{1}{t}\right). \qquad \text{…(6.3.31)}$$

Kemudian, dengan mengurangkan persamaan (6.3.27) dari persamaan (6.3.28) diperoleh

$$2\lambda = \left(\frac{1}{t} - t\right)\sin \angle E - 2\cos \angle E$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right)\sin \angle E - \cos \angle E \qquad \text{…(6.3.32)}$$

dengan $t = \tan\frac{\theta}{2}$.

Dengan mengambil

$$t_1 = \tan\frac{\angle CDE}{2} \text{ dan } t_2 = \tan\frac{\angle ECD}{2}$$

untuk sudut Heron *CDE* dan *ECD*, maka diperoleh

$$\cos \angle E = \frac{1 - \tan^2 \frac{\angle E}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\angle E}{2}}$$

$$\cos \angle E = \frac{1 - \left(\frac{1 - t_1 t_2}{t_1 + t_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1 - t_1 t_2}{t_1 + t_2}\right)^2}$$

$$\cos \angle E = \frac{(t_1 + t_2)^2 - (1 - t_1 t_2)^2}{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)} \qquad \text{…(6.3.33)}$$

dan

$$\sin \angle E = \frac{2\tan \frac{\angle E}{2}}{1+\tan^2 \frac{\angle E}{2}}$$

$$\sin \angle E = \frac{2\left(\frac{1-t_1t_2}{t_1+t_2}\right)}{1+\left(\frac{1-t_1t_2}{t_1+t_2}\right)^2}$$

$$\sin \angle E = \frac{2(1-t_1t_2)(t_1+t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}. \qquad \ldots(6.1.34)$$

Dengan memilih $c = t(1+t_1^2)(1+t_2^2)$, maka dari persamaan (6.3.17) dan (6.3.21) diperoleh

$$\alpha = 2\rho \sin \angle ADC. \qquad \ldots(6.1.35)$$

Karena $\angle ADC + \angle CDE = 180°$ dan berdasarkan persamaan (6.3.18) diperoleh

$$\rho = \frac{c}{2\sin \angle E},$$

sehingga persamaan (6.1.35) dapat dituliskan menjadi

$$\alpha = 2\frac{c}{2\sin \angle E}\sin(180° - \angle CDE)$$

$$\alpha = \frac{c\sin \angle CDE}{\sin \angle E}$$

$$\alpha = \frac{t(1+t_1^2)(1+t_2^2)\frac{2t_1}{(1+t_1^2)}}{\frac{2(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}}$$

$$\alpha = \frac{tt_1(1+t_1^2)(1+t_2^2)^2}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}. \qquad \ldots(6.3.36)$$

Dengan cara yang sama seperti memperoleh persamaan (6.3.36) diperoleh

$$\beta = \frac{tt_2(1+t_1^2)^2(1+t_2^2)}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}. \qquad \ldots(6.3.37)$$

Berikut ini diberikan formula untuk menentukan panjang sisi dan panjang diagonal segi-empat Brahmagupta sebagai berikut.

1) a adalah panjang garis dari titik A ke titik B. Dengan mensubstitusikan persamaan (6.3.32), (6.3.33) dan (6.3.34) pada persamaan (6.3.16) diperoleh

$$a=\lambda c=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)\sin\angle E-\cos\angle E\right)\left(t\left(1+t_1{}^2\right)\left(1+t_2{}^2\right)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)\frac{2(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}{\left(1+t_1{}^2\right)\left(1+t_2{}^2\right)}-\frac{(t_1+t_2)^2-(1-t_1t_2)^2}{\left(1+t_1{}^2\right)\left(1+t_2{}^2\right)}\right)\left(t\left(1+t_1{}^2\right)\left(1+t_2{}^2\right)\right)$$

$$a=\left(t(t_1+t_2)+(1-t_1t_2)\right)\left(t_1+t_2-t(1-t_1t_2)\right). \qquad \ldots(6.3.38$$

2) b adalah panjang garis dari titik B ke titik C. Dengan mensubstitusikan persamaan (6.3.38), (6.3.36) dan (6.3.37) pada persamaan (6.3.16) diperoleh

$$b=\lambda\beta-\alpha$$

$$b=\frac{\left(t(t_1+t_2)+(1-t_1t_2)\right)\left(t_1+t_2-t(1-t_1t_2)\right)}{t\left(1+t_1{}^2\right)\left(1+t_2{}^2\right)}\frac{tt_2\left(1+t_1{}^2\right)^2\left(1+t_2{}^2\right)}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}-\frac{tt_1\left(1+t_1{}^2\right)\left(1+t_2{}^2\right)^2}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}$$

$$b=\left(1+t_1{}^2\right)(t_2-t)(1+tt_2). \qquad \ldots(6.1.39)$$

3) c adalah panjang garis dari titik C ke titik D.

$$c=t\left(1+t_1{}^2\right)\left(1+t_2{}^2\right). \qquad \ldots(6.1.40)$$

4) d adalah panjang garis dari titik D ke titik A. Dengan mensubstitusikan persamaan (6.3.38), (6.3.34) dan (6.3.37) pada persamaan (6.3.16) diperoleh

$$d=\lambda\alpha-\beta$$

$$d=\frac{\left(t(t_1+t_2)+(1-t_1t_2)\right)\left(t_1+t_2-t(1-t_1t_2)\right)}{t\left(1+t_1{}^2\right)\left(1+t_2{}^2\right)}\frac{tt_1\left(1+t_1{}^2\right)\left(1+t_2{}^2\right)^2}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}-\frac{tt_2\left(1+t_1{}^2\right)^2\left(1+t_2{}^2\right)}{(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}$$

$$d=\left(1+t_2{}^2\right)(t_1-t)(1+tt_1). \qquad \ldots(6.3.41)$$

5) e adalah panjang garis dari titik A ke titik C. Dengan mensubstitusikan persamaan (3.3.20), (6.3.31) dan (6.3.34) pada persamaan (6.3.20) diperoleh

$$e = \frac{R}{\rho}\alpha$$

$$e = \frac{\left(1+t_1^{\ 2}\right)\left(1+t_2^{\ 2}\right)\left(1+t^2\right)2\left(2\left(t_1+t_2\right)\left(1-t_1t_2\right)\right)tt_1\left(1+t_1^{\ 2}\right)\left(1+t_2^{\ 2}\right)^2}{4t\left(1+t_1^{\ 2}\right)^2\left(1+t_2^{\ 2}\right)^2\left(t_1+t_2\right)\left(1-t_1t_2\right)}$$

$$e = t_1\left(1+t^2\right)\left(1+t_2^{\ 2}\right). \qquad \ldots(6.3.42)$$

6) f adalah panjang garis dari titik B ke titik D. Dengan mensubstitusikan persamaan (3.3.20), (6.3.31) dan (6.3.37) pada persamaan (6.3.22) diperoleh

$$f = \frac{R}{\rho}\beta$$

$$f = \frac{\left(1+t_1^{\ 2}\right)\left(1+t_2^{\ 2}\right)\left(1+t^2\right)2\left(2\left(t_1+t_2\right)\left(1-t_1t_2\right)\right)tt_2\left(1+t_1^{\ 2}\right)^2\left(1+t_2^{\ 2}\right)}{4t\left(1+t_1^{\ 2}\right)^2\left(1+t_2^{\ 2}\right)^2\left(t_1+t_2\right)\left(1-t_1t_2\right)}$$

$$f = t_2\left(1+t^2\right)\left(1+t_1^{\ 2}\right). \qquad \ldots(6.3.43)$$

Sehingga formula untuk menentukan luas segi-empat Brahmagupta berdasarkan Gambar 9 dan dengan mensubstitusikan persamaan (6.3.38), (6.3.39), (6.3.40) dan (6.3.41) yaitu :

$$LABCD = L\Delta ABC + L\Delta ADC$$

$$= \frac{1}{2}\left(ab+cd\right)\sin\angle ADC$$

$$= \frac{1}{2}\left(ab+cd\right)\sin\angle EDC$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(t\left(t_1+t_2\right)+\left(1-t_1t_2\right)\right)\left(t_1+t_2-t\left(1-t_1t_2\right)\right)\left(1+t_1^{\ 2}\right)\left(t_2-t\right)\left(1-tt_2\right)\right]\frac{2t_1}{1+t_1^{\ 2}}$$

$$+\left[t\left(1+t_1^{\ 2}\right)\left(1+t_2^{\ 2}\right)^2\left(t_1-t\right)\left(1+tt_1\right)\right]\frac{2t_1}{1+t_1^{\ 2}}$$

$$LABCD = -t_1t_2\left(2t\left(1-t_1t_2\right)-\left(t_1+t_2\right)\left(1-t^2\right)\right)\left(2\left(t_1+t_2\right)t+\left(1-t_1t_2\right)\left(1-t^2\right)\right). \ \ldots(6.3.44)$$

Formula luas pada persamaan (6.3.44) sedikit berbeda dari yang ditulis dalam berbagai buku teks lainnya. Dalam berbagai buku teks juga ditulis sebagai berikut

$$LABCD = t_1t_2\left(2t\left(1-t_1t_2\right)-\left(t_1+t_2\right)\left(1-t^2\right)\right)\left(2\left(t_1+t_2\right)t+\left(1-t_1t_2\right)\left(1-t^2\right)\right).$$

Dengan mensubstitusikan c pada persamaan (6.3.31), maka berikut ini diperoleh diameter lingkaran luar segi-empat Brahmagupta

$$2R = \frac{\left(1+t_1^{\,2}\right)\left(1+t_2^{\,2}\right)\left(t^2+1\right)}{2}. \qquad \ldots(6.3.45)$$

Selanjutnya, diberikan beberapa contoh aplikasi dari formula Brahmagupta.

***Teladan* 6.3.4**. Dengan memilih $t_1 = t_2 = \dfrac{n}{m}$ dan $t = \dfrac{v}{u}$, kemudian mensubstitusikan pada persamaan (6.3.38), (6.3.39), (6.3.40), (6.3.41), (6.3.42) dan (6.3.43) diperoleh formula Brahmagupta untuk panjang sisi dan diagonal trapesium sebagai berikut.

$$a = \left(m^2u - n^2u + 2nmv\right)\left(2mnv - m^2v + n^2v\right)$$

$$b = d = \left(m^2 + n^2\right)\left(nu - mv\right)\left(mu + nv\right)$$

$$c = \left(m^2 + n^2\right)^2 uv$$

$$e = f = mn\left(m^2 + n^2\right)\left(u^2 + v^2\right).$$

Formula Brahmagupta untuk diameter dan luas trapesium yaitu :

$$2R = \frac{\left(m^2 + n^2\right)^2\left(u^2 + v^2\right)}{2},$$

$$L = -m^2n^2\left(2vu\left(m^2 - n^2\right) - 2mn\left(u^2 - v^2\right)\right)\left(4mnvu + \left(m^2 - n^2\right)\left(u^2 - v^2\right)\right) \qquad \ldots(6.3.46)$$

Formula luas trapesium pada persamaan (6.3.46) juga dengan yang ada dalam berbagai buku teks, dalam berbagai buku teks lainnya ditulis :

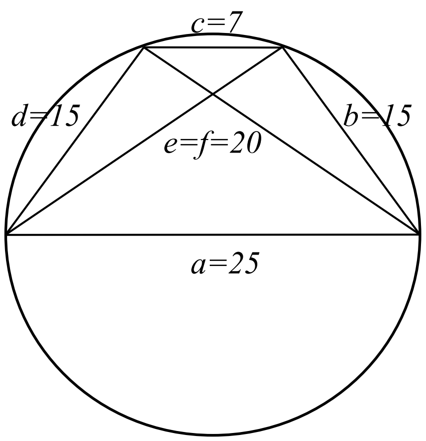
$$L = 2m^2n^2\left(nu - mv\right)\left(mu + nv\right)\left(\left(m+n\right)u - \left(m-n\right)v\right)\left(\left(m+n\right)v - \left(m-n\right)u\right). \ (6.3.47)$$

Jika formula luas pada persamaan (6.3.47) digunakan untuk menghitung nilai L maka hasil perhitungannya tidak sesuai dengan hasil perhitungan pada tabel 1. Jadi penulis menggunakan formula luas pada persamaan (6.3.46) untuk menghitung nilai L.

Berikut diberikan Tabel hasil perhitungan untuk panjang sisi, diagonal dan luas trapesium yang diperoleh jika nilai t_1 dan t diketahui .

Tabel 1. Hasil Perhitungan Contoh 1.

$t_1 = t_2$	T	a	$b = d$	C	$e = f$	$2R$	*Luas*
1/2	1/7	25	15	7	20	25	192
½	2/9	21	10	9	17	41	120
1/3	3/14	52	15	28	41	197	360
1/3	3/19	51	20	19	37	181	420
2/3	1/8	14	13	4	15	65/4	108
2/3	3/11	21	13	11	20	61	192
2/3	9/20	40	13	30	37	1203/4	420
3/4	2/11	25	25	11	30	61	432



Gambar 6.3.14.

***Teladan* 6.3.5.** Misalkan *ECD* adalah segitiga Heron rasional dengan $c:\alpha:\beta = 14:15:13$ dan $t_1 = \dfrac{2}{3}$, $t_2 = \dfrac{1}{2}$ dan $t_3 = \dfrac{4}{7}$.

Penyelesaian :

Dengan memisalkan $t = \frac{v}{u}$, diperoleh formula untuk panjang sisi dan diagonal segi-empat Brahmagupta yaitu :

$$a = (7u - 4v)(4u + 7v)$$

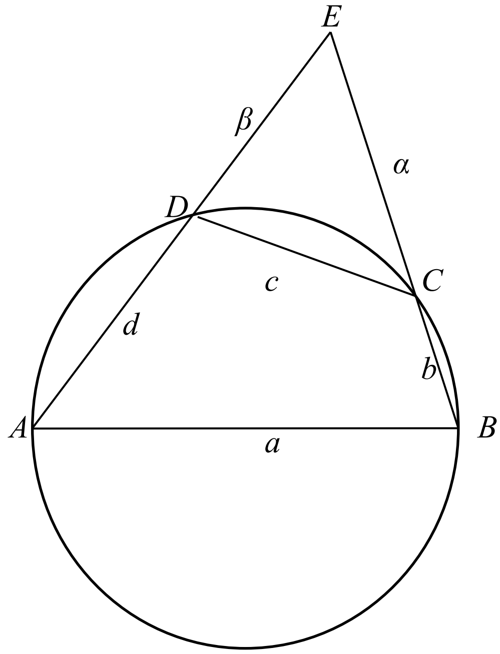
$$b = 13(u - 2v)(2u + v)$$

$$c = 65uv$$

$$d = 5(2u - 3v)(3u + 2v)$$

$$e = 30(u^2 + v^2)$$

$$f = 26(u^2 + v^2).$$



Gambar 6.3.15.

Formula luas dan jari-jari lingkaran luar segi-empat Brahmagupta yaitu:

$$L = 24(2u^2 + 7uv - 2v^2)(7u^2 - 8uv - 7v^2)$$

,

$$2R = \frac{65(u^2 + v^2)}{2}.$$

Dengan mengganti nilai u dan nilai v diperoleh panjang sisi, diagonal, luas dan panjang jari-jari lingkaran luar segi-empat Brahmagupta sebagai berikut.

Tabel 2. Hasil perhitungan contoh 2.

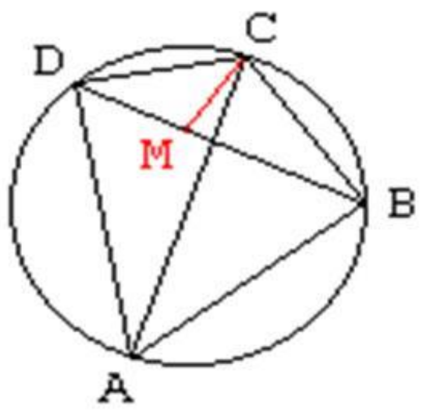
u	*V*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*2R*	*Luas*
3	1	323	91	195	165	300	260	325	28416
11	3	65	25	33	39	60	52	65	1344

6.4. Teorema Ptolemy

Teorema Ptolemy masih terkait dengan segi-empat siklik. Teorema ini membahas tentang hubungan antara jumlah dua sisi yang bersebelahan dengan hasil kali diagonal dari suatu segi-empat siklik. Teorema ini sangat mudah digunakan, misalnya untuk menentukan nilai $sin(x + y)$ yang dalam buku sekolah menengah buktinya sangat panjang. Akan tetapi disini akan diberikan buktu yang cukup sederhana.

***Teorema* 6.4.1 (*Teorema Ptolemy*)**

Jika *ABCD* sebarang segi-empat yang berada pada suatu lingkaran, maka jumlah dua pasang sisi yang bersebelahan adalah sama dengan hasil kali diagonalnya.



Gambar 6.4.1

***Bukti* :** Pada diagonal *BD* buat titik *M* sehingga $\angle ACB = \angle MCD$. Karena $\angle BAC$ dan $\angle BDC$ menghadap busur yang sama, maka $\angle BAC = \angle BDC$. Yang mengakibatkan $\angle DNC = \angle ABC$, jadi $\Delta ABC \sim \Delta DMC$, sehingga

$$\frac{CD}{MD} = \frac{AC}{AB}$$

Atau

$$AB.CD = AC.MD \qquad (6.4.1)$$

Selanjutnya karena

$\angle ACB = \angle MCD$, maka $\angle BCM = \angle ACD$

dan karena

$\angle DAC = \angle DBC = \angle MBC$ (menghadap busur yang sama),

ini mengakibatkan $\Delta BCM \sim \Delta ACD$, sehingga

$$\frac{BC}{BM} = \frac{AC}{AD}$$

atau

$$AD.BC = AC.BM \tag{6.4.2}$$

Dengan menjumlahkan persamaan (6.4.1) dan (6.4.2) diperoleh

$$AB.CD + AD.BC = AC.MD + AC.BM = AC(MD + BM) = AC.BD \ \blacktriangledown$$

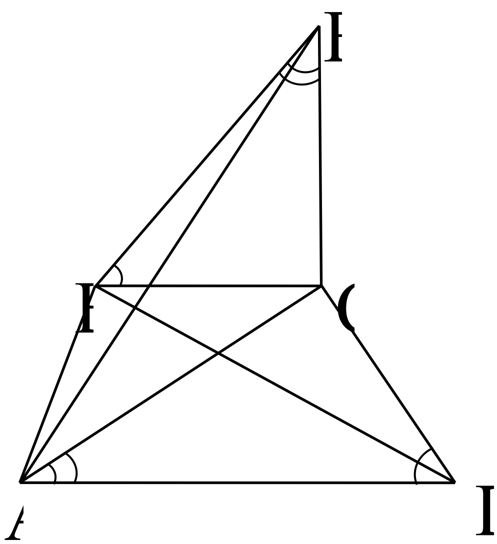
Berikut ini diberikan pola lain untuk membuktikan teorema di atas.

Bukti 2 : Misalkan *ABCD* segi-empat siklik, perhatikan gambar 6.4.2 .Kontruksi *E* sehingga $\Delta CAD \cong \Delta CEB$, yang mengakibatkan

$$\frac{CE}{CA} = \frac{CB}{CD} = \frac{BE}{DA},$$

Sehingga diperoleh

$$BE = \frac{CB \cdot DA}{CD}. \tag{6.4.3}$$



gambar 6.4.2

Kita juga dapat menunjukkan bahwa

$$\angle ECA = \angle BCD$$

Sehingga didapat

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CB}{CE}$$

Kemudian tunjukkan pula bahwa $\Delta ECA \sim \Delta BCD$ sehingga

$$\frac{EA}{BD} = \frac{CA}{CD}$$

jadi

$$EA = \frac{CA \cdot DB}{CD} \tag{6.4.4}$$

Sebagai ingatan bahwa jika *ABCD* siklik, maka

$$\angle CBE + \angle ABC = \angle CDA + \angle ABC = 180^0.$$

Tapi jelas ini akan menyebabkan *A*, *B* dan *E* segaris yang berarti *AB* + *BA* = *AE*. Jadi dari (6.4.3) dan (6.4.4) kita peroleh

$$\frac{CA \cdot DB}{CD} = AB + \frac{CB \cdot DA}{CD}$$

Maka diperoleh

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD$$

***Teladan* 6.4.1** : Misalkan titik P berada pada busur *CD* pada lingkaran luar dari empat persegi *ABCD*, tunjukkan bahwa

$$PA(PA + PC) = PB(PB + PD)$$

Penyelesaian : Perhatikan gambar 6.4.3. Misalkan panjang sisi persegi tersebut adalah *a* satuan. Selanjutnya gunakan teorema Ptolemy untuk *PDAB* maka diperoleh

$$PD \,.\, BA + PB \,.DA = PA \,.DB$$

$$a.(PD + PB) = a\sqrt{2}.PA$$

$$PD + PB = \sqrt{2}.\ PA$$

$$PB.(PD + PB) = \sqrt{2}.\ PA.PB \qquad (6.4.5)$$

dan bila teorema Ptolemy digunakan pada PABC,

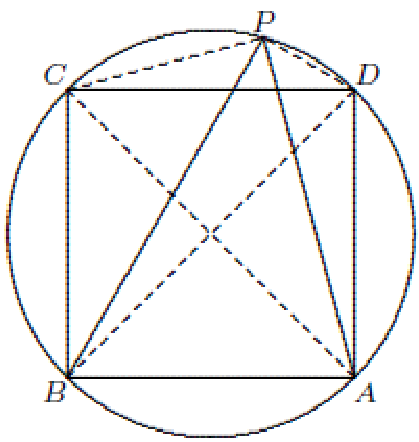
maka diperoleh

$$PA \,.\, BC + PC\ \ AB = PB \,.\, AC.$$

$$a.(PA + PC) = a\sqrt{2a}.PB$$

$$PA + PC = \sqrt{2}.PB$$

$$PA(PA + PC) = \sqrt{2}.PB.PA \qquad (6.4.6)$$



Gambar 6.4.3

maka dari (6.4.5) dan (6.4.6) diproleh

$PA(PA + PC) = PB.(PD + PB)$

Jika segiemapat *ABCD* bukan merupakan segi-empat, maka yang berlaku adalah tanda lebih besar, seperti ditunangkan dalam teorema berikut ini :

***Teorema* 6.4.2** : Jika *ABCD* bukan segi-empat siklik, maka berlaku

$$AB.CD + AD.BC > AC.BD$$

Bukti : Mialkan ABCD bukan merupakan segi-empat siklik. Dalam artian yang berlaku adalaha

$$\angle CBE + \angle ABC = \angle CDA + \angle ABC \neq 180^0.$$

Ini menyebabkan ketiga titik A, B dan E membentuk segitiga dengan $EA < AB + BE$, sehingga dari persamaa (*) dan (**) di atas diperoleh

$$\frac{CA \cdot DB}{CD} < AB + \frac{CB \cdot DA}{CD}$$

Sehingga $AB.CD + AD.BC > AC.BD$.

Berikut ini akan diberikan pengunaan teorema Ptolemy untuk membuktikan rumus *sin* $(\alpha + \beta)$ dan *sin* $(\alpha - \beta)$, untuk rumus trigonometri yang lain dapat dilakukan sebagai soal latihan.

***Teladan* 6.4.2.** Tunjukkan bahwa $sin\ (\alpha + \beta) = sin\ \alpha \cos \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta$

Penyelesaian : Perhatikan gambar di bawah ini yang merupakan lingkaran berpusat di *O* dan berdiameter 1 satuan. Diameter lingkaran adalah $BC = 1$ satuan, maka $\angle BAC = \angle BDC = 90^0$. Misalkan $\angle ABC = \alpha$ dan $\angle DBC = \beta$. Maka

$$sin\ \alpha = \frac{AC}{BC}$$

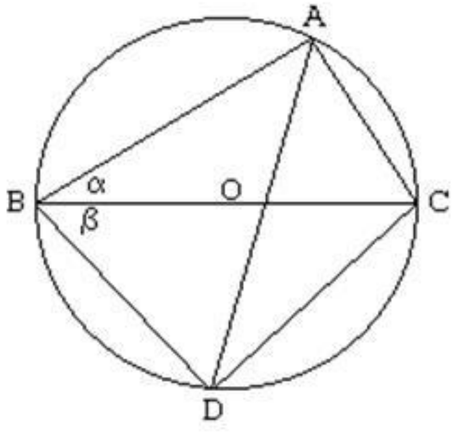
Jadi

$$AC = sin\ \alpha$$

$$AB = cos\ \alpha$$

$$BD = cos\ \beta$$

$DC = sin\ \beta$



Gambar 6.4.4

Kemudian dari $\dfrac{AD}{sin\left(\alpha+\beta\right)} = 2R$ maka

$$\frac{AD}{sin\left(\alpha+\beta\right)} = 2 \times \frac{1}{2}$$

Maka

$$AD = sin\ (\alpha + \beta)$$

Jadi dengan berdasarkan Teorema Ptolemy diperoleh

$$AD.BC = AC.BD + AB.DC$$

Karena $BC = 1$, maka $sin\ (\alpha + \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta$ ▼

***Teladan* 6.4.3.** Tunjukkan bahwa $sin\ (\alpha - \beta) = sin\ \alpha\ \cos\ \beta - cos\ \alpha\ sin\ \beta$

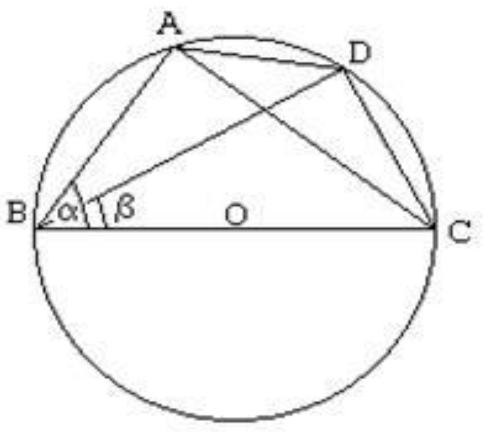
Sama seperti contoh teladan 6.4.2 diperoleh

$BC = 1$,$AB = cos\ \alpha$

$AC = sin\ \alpha$, $BD = cos\ \beta$

$DC = sin\ \beta$

$AD = sin\ (\alpha - \beta)$



Maka berdasarkan teorema Ptolemy diperoleh

AC.BD = *AD.BC* + *AB.DC*

Sin α. *Cos* β = *sin* (α - β).1 + *cos* α. *sin* β

Jadi

sin (α - β) = *sin* α. *Cos* β - + *cos* α. *sin* β ▼

Gambar 6.4.5

Kalau pada teoema Brahmagupta adalah untuk menentukan sebarang luas segi-empat. Sedang kan kalau sisi-sisi dari segi-empat tersebut diketahui, maka secara umum akan dapat ditentukkan panjang diagonal dari segi-empat tersebut. Akan tetapi berikut ini akan diberikan teoema khusus untuk membahas panjang diagonal dari segi-empat tali busur.

***Teorema* 6.4.3** : Diketahui tahui segi-empat talibusur *ABCD* dengan panjang *AB* = *a* cm, *BC* = *b* cm dan *CD* = *c* cm serta *DA* = *d* cm. Jika *p* dan *q* masing-masing menyatakan panjang diagonal *AC* dan *BD*, Maka

$$\frac{p}{q} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$$

Bukti : Dengan menggunakan rumus aturan cosinus pada Δ*ABC* dan Δ*ADC* diperoleh

$p^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \angle B$

$p^2 = c^2 + d^2 - 2ad\ cos\ \angle D$

$\quad = c^2 + d^2 - 2ad\ cos\ \angle B$

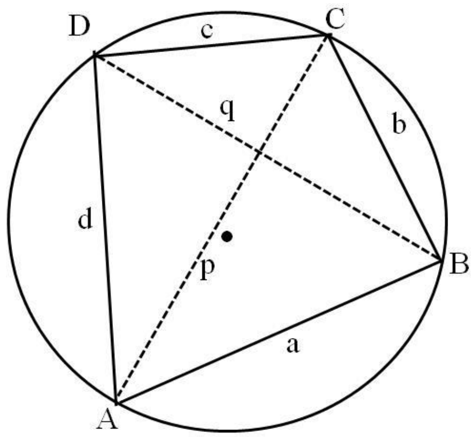
Berdasarkan kedua persamaan diperoleh

$a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \angle B = c^2 + d^2 - 2ad\ cos\ \angle B$

jadi

$$cos\ \angle \mathrm{B} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

Gantikan *cos* $\angle B$ pada persamaan di atas, maka diproleh



gambar 6.4.6

$$p^2 = a^2 + b^2 - 2ab\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)$$

$$= \frac{2ab\ (\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2) + 2cd\ (\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2) - ab\ (\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2) + 2cd(\mathrm{c}^2+\mathrm{c}^2)}{2(\mathrm{ab}+\mathrm{cd})}$$

$$= \frac{2a^2cd + 2b^2cd + 2abc^2 + 2abd^2}{2(ab+cd)}$$

$$= \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}$$

Dengan cara yang serupa dengan yang di atas, akan diperoleh

$$cos\ \angle A = \frac{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2-\mathrm{c}^2-\mathrm{d}^2}{2(\mathrm{ab}+\mathrm{cd})}$$

$$q^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$$ ♥

Perhatikan bahwa dengan menggunakan p^2 dan q^2 di atas, maka kita akan mendapatkan panjang hasil kali diagonal dan hasil bagi diagonal yaitu sebagai berikut

$$pq = ac + bd \qquad (6.4.7)$$

$$\frac{p}{q} = \frac{ad+bc}{ab+cd} \qquad (6.4.8)$$

Rumus (6.4.7) dan (6.4.8) di atas sering dikenal dengan rumus Ptolemaeus. Berikut ini akan diberikan cara pembuktian lain dari teorema Ptolemaeus yaitu dengan menggunakan kesebangunan.

***Teorema* 6.4.4.** : Pada segi-empat talibusur berlaku prekalian diagonal segi-empat tali busur sama dengan jumlah perkalian sisi yang berhadapan.

Bukti : Perhatikan kembali gambar 6.4.6. akan dibuktikan

$pq = ac + bd$ atau $p = \frac{ac}{q} + \frac{bd}{q}$

Misalkan $x = \frac{ac}{q}$ dan $y = \frac{bd}{q}$, jadi kita mesti membagi diagonal p menjadi dua bahagian garis yang masing-masing panjangnya *x* dan *y*.

Sekarang perhatikan

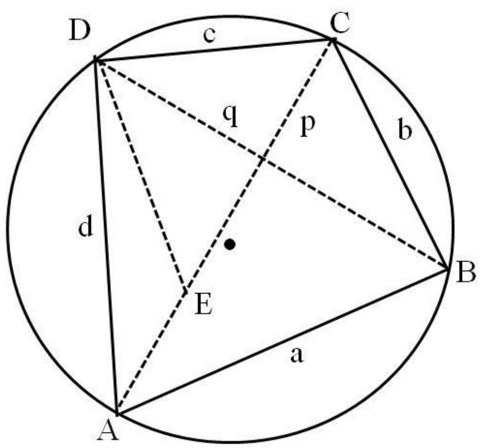
$x = \frac{ac}{q}$ atau $q : a = c : x$

perhatikan gambar 6.4.7, sisi q dan a terletak pada ΔABD dan mereka membentuk $\angle ABD$. Perhatikan juga bahwa $\angle ABD = \angle ACD$.

Misalkan $CE = x$, sehingga jika kita letakkan $\angle BAD$ pada $\angle E$, sehingga $\angle CED = \angle BAD$ atau $\angle ADB = \angle CDE$, maka $\Delta ABD \sim \Delta CDE$.

Akibatnya

$\frac{q}{c} = \frac{a}{x}$ atau $x = \frac{ac}{q}$.



gambar 6.4.7

Sekarang perhatikan ΔBDC dan ΔAED.

$\angle CAD = \angle DBC$ dan $\angle ADE = \angle BDC$. jadi $\Delta BDC \sim \Delta AED$, akibatnya

$\frac{AE}{b} = \frac{d}{q}$ atau $AE = \frac{bd}{q} = y$

Karena $CE = x$ dan $AE = y$, maka $AC = x + y$ atau

$$p = \frac{ac}{q} + \frac{bd}{q} \qquad ♥$$

Kalau kita perhatikan, proses pembuktian teoema Ptolemaeus di atas cukup rumit. Sebenarnya kita membuktikan dengan cara yang lebih sederhana yaitu cukup dengan rumus-rumus yang ada dalam segitiga yang lebih sederhana. Kita suah mengenal bahwa R adalah jari-jari lingkaran luar yang pada prinsipnya jari-jari lingkaran luar tersebut adalah perkalian ketiga sisi dibagi dengan 4 kali luas segi tiga. Maka dalam hal ini untuk gambar 6.4.6 atau 6.4.7 akan berlaku :

$$abp = 4R \times \mathrm{L}\Delta ABC$$

$$cdp = 4R \times \mathrm{L}\Delta ADC$$

dengan R merupakan jari-jari lingkaran luarnya. Maka dari kedua persamaan di atas kalau dijumlahkan akan diperoleh

$$(ab + cd).p = 4R \times \text{Luas } \square\, ABCD \qquad (6.4.9)$$

Dengan cara yang serupa dengan langkah di atas, akan diperoleh

$$adq = 4R \times L\Delta ABD$$

$$bcq = 4R \times L\Delta BDC$$

jumlah keduanya akan memberikan

$$(ad + bc).q = 4R \times \text{Luas } \square\, ABCD \qquad (6.4.10)$$

Dari persamaan (6.4.9) dan (6.4.10) akan diperoleh

$$(ad + cd).p = (ad + bc).q$$

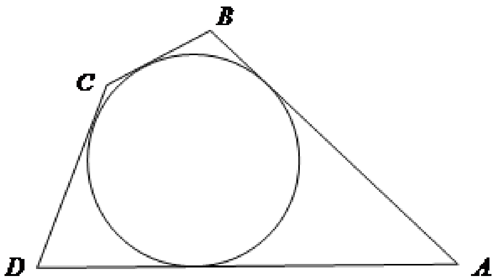
Atau

$$p = \frac{ac}{q} + \frac{bd}{q}$$

Para pembaca dapat membandingkan tingkat kesulitan dari kedua proses pembuktian yang diberikan di atas, kalau cara pertama itu adalah cara yang banyak dimuat dalam berbagai buku teks. Bandingkanlah dengan proses pembuktian cara kedua (terakhir), kami yakin proses pembuktian ke dua ini jauh lebih mudah untuk dipahami. Ide seperti di atas sekali lagi sebenarnya memberikan inspirasi kepada kita, pada dasarnya teorema-teorema yang ada dalam geometri tersebut banyak yang dapat kita buktikan dengan hanya menggunakan matematika yang lebih sederhana.

Di atas sudah diberikan tentang segi-empat siklik yang sering juga disebut dengan segi-empat talibusur (dalam artian segi-empat tersebut mempunyai lingkaan luar. berikut ini akan dibahas suatu segi-empat yang mempunyai lingkaran dalam, artinya ke empat sisi dari segi-empat tersebut menyinggung lingkaran dalamnya hal ini yang disebut dengan segi-empat *Circumscriptible.*

Definisi 6.4.1 Segi-empat *Circumscriptible* adalah segi-empat yang memuat sebuah lingkaran dalam (*Incircle of the Quadrilateral*) sehingga menyinggung keempat sisi segi-empat.



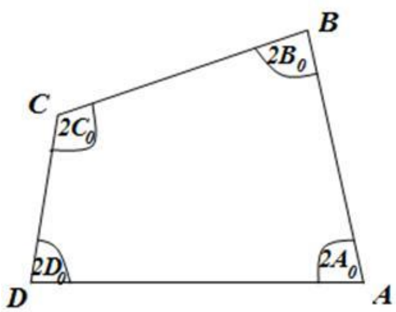
Gambar 6.4.8

Sebagaimana yang telah disebutkan pada bagian terdahulu bahwa tidak semua segi-empat adalah *Circumscriptible*. Oleh karena itu, agar suatu segi-empat menjadi *Circumscriptible* maka tentulah memerlukan syarat tertentu.

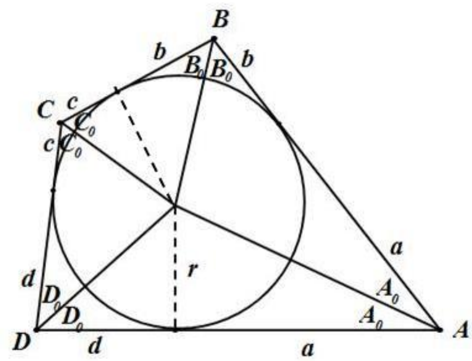
Berikut ini diberikan teorema yang menunjukkan syarat untuk suatu segi-empat agar menjadi *Circumscriptible*. Sedangkan syarat perlu dan cukup agar suatu segi-empat merupakan segi-empat *Circumscriptible* telah dibahas pada teorema 5.1.7. sedangkan segi-empat *Circumscriptible* adalah konvek telah dibahas pada teorema 5.1.7. Selanjutnya, dibahas hubungan antara panjang diagonal dengan panjang garis singgung pada segi-empat Bisentrik. Adapun hubungan tersebut dinyatakan dalam bentuk teorema yang mana dalam pembuktiannya menggunakan 3 buah lemma. Adapun teorema tersebut beserta pembuktiannya diberikan dibagian akhir dari bab ini. Pada lemma dibawah ini menyatakan adanya hubungan antara segi-empat Bisentrik dengan panjang garis singgung dari titik sudutnya.

Lema 6.4.1 Misalkan *ABCD* adalah segi-empat *Circumscriptible* dengan panjang garis singgung dari titik sudut A, B, C dan D berturut-turut adalah *a*, *b*, *c* dan *d*, dan *r* adalah jari-jari lingkaran dalamnya. Segi-empat *ABCD* adalah Siklik jika dan hanya jika $ac = bd$.

Bukti. Diberikan sebarang segi-empat Konveks *ABCD* yang mana besar sudut *A, B, C* dan *D* berturut-turut adalah $2A_0, 2B_0, 2C_0$ dan $2D_0$ (lihat gambar 22). Karena *ABCD* adalah Konveks, maka berlaku $2A_0, 2B_0, 2C_0$ dan $2D_0$ kurang dari 180^0 sehingga A_0, B_0, C_0 dan D_0 kurang dari 90^0. Dengan demikian A_0, B_0, C_0 dan D_0 adalah sudut lancip.



Gambar 6.4.8



Gambar 6.4.9

Misalkan segi-empat Konveks *ABCD* tersebut adalah *Circumscriptible* dengan panjang garis singgung dari titik sudut *A, B, C* dan *D* berturut-turut adalah *a, b, c* dan *d,* dan *r* adalah jari-jari lingkaran dalamnya. Lihat gambar 6.4.9.

Pada gambar 6.4.9, diperoleh

$$\tan A_0 = \frac{r}{a},\ \tan B_0 = \frac{r}{b}$$

$$\tan C_0 = \frac{r}{c} \text{ dan } \tan D_0 = \frac{r}{d}. \qquad \ldots(6.4.11)$$

Maka

$$\tan A_0 \tan C_0 = \frac{r}{a}\frac{r}{c}$$

$$= \frac{r^2}{ac} \qquad \ldots(6.4.12)$$

dan

$$\tan B_0 \tan D_0 = \frac{r}{b}\frac{r}{d}$$

$$= \frac{r^2}{bd}. \qquad \ldots(6.4.13)$$

Berdasarkan 6.4.12 dan 6.4.13, Bila ditunjukkan $\tan A_0 \tan C_0 = \tan B_0 \tan D_0$ maka mestilah berlaku $ac = bd$.

Oleh karena itu, untuk membuktikan segi-empat $ABCD$ adalah Siklik jika dan hanya jika $ac = bd$, maka cukup ditunjukkan bahwa segi-empat $ABCD$ adalah Siklik jika dan hanya jika $\tan A_0 \tan C_0 = \tan B_0 \tan D_0$. Kemudian dengan mensubtitusi persamaan (6.4.11), diperoleh $ac = bd$. Misalkan $ABCD$ adalah Siklik. Akan ditunjukkan bahwa (lihat gambar 6.4.10).

$$\tan A_0 \tan C_0 = \tan B_0 \tan D_0.$$

Karena $ABCD$ adalah Siklik, berdasarkan Teorema 2.3.8,

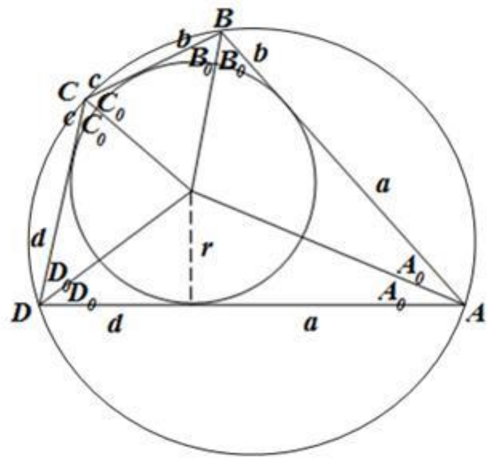
$$2A_0 + 2C_0 = 2B_0 + 2D_0 = 180^0$$

$$A_0 + C_0 = B_0 + D_0 = 90^0.$$

Maka

$$tan(A_0 + C_0) = tan(B_0 + D_0) = tan 90^0.$$

$\dots(6.4.14)$



Gambar 6.4.10

Dari persamaan 6.4.14 diperoleh

$$\tan(A_0 + C_0) = \frac{\tan A_0 + \tan C_0}{1 - \tan A_0 \tan C_0} = \tan 90^0$$

dan

$$\tan(B_0 + D_0) = \frac{\tan B_0 + \tan D_0}{1 - \tan B_0 \tan D_0} = \tan 90^0.$$

Karena $\tan 90^0$ tidak terdefinisi, maka haruslah

$$\tan A_0 \tan C_0 = 1 \qquad \dots(6.4.15)$$

dan

$$\tan B_0 \tan D_0 = 1. \qquad \dots(6.4.16)$$

Dari persamaan 6.4.15 dan 6.4.16, disimpulkan bahwa

$$\tan A_0 \tan C_0 = \tan B_0 \tan D_0$$

$$\frac{r}{a}\frac{r}{c} = \frac{r}{b}\frac{r}{d}$$

$$ac = bd.$$

Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa jika *ABCD* tidak Siklik maka

$$\tan A_0 \tan C_0 \neq \tan B_0 \tan D_0$$

(pernyataan ini setara dengan pernyataan jika

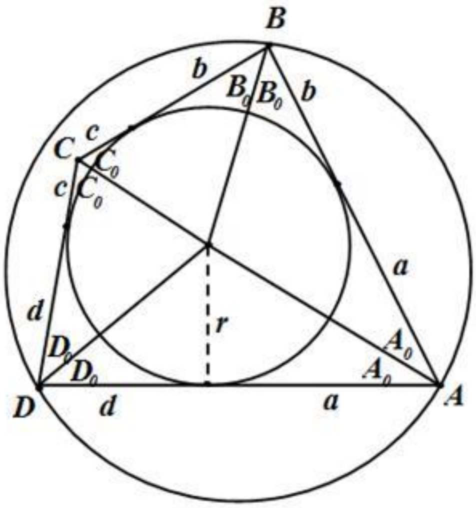
$$\tan A_0 \tan C_0 = \tan B_0 \tan D_0$$

maka segi-empat *ABCD* adalah Siklik). Misalkan *ABCD* tidak Siklik. Lihat gambar 6.4.11.

Berdasarkan Teorema 5.1.8,

$2A_0 + 2C_0 \neq 180^0$ dan

$2B_0 + 2D_0 \neq 180^0$. Sehingga terdapat dua kemungkinan yaitu



Gambar 6.4.11

$$180^0 < 2A_0 + 2C_0 < 360^0$$

dan

$$0^0 < 2B_0 + 2D_0 < 180^0$$

atau

$$0^0 < 2A_0 + 2C_0 < 180^0$$

dan

$$180^0 < 2B_0 + 2D_0 < 360^0.$$

Jika

$$180^0 < 2A_0 + 2C_0 < 360^0$$

Dan

$$0^0 < 2B_0 + 2D_0 < 180^0,$$

maka

$$90^0 < A_0 + C_0 < 180^0$$

dan

$$0^0 < B_0 + D_0 < 90^0 .$$

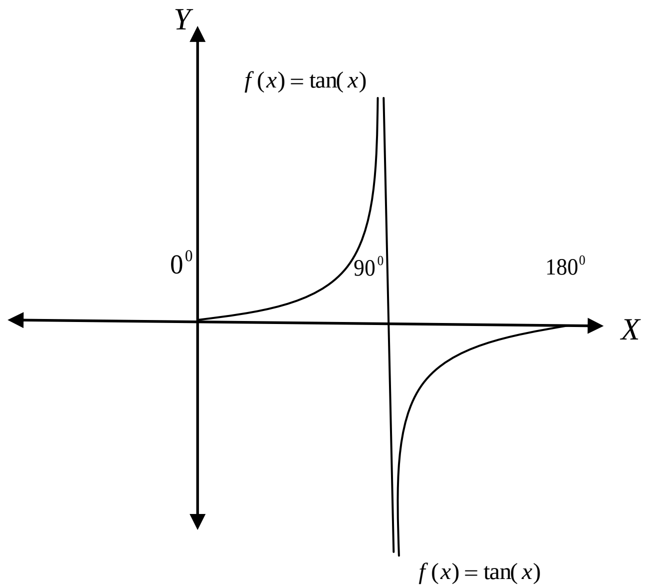
Karena $90^0 < A_0 + C_0 < 180^0$ dan fungsi tangen monoton naik tegas di $(90^0, 180^0]$ (lihat gambar 6.4.12),

maka

$$\tan(A_0 + C_0) < \tan 180^0 .$$

Sehingga

$$\tan(A_0 + C_0) = \frac{\tan A_0 + \tan C_0}{1 - \tan A_0 \tan C_0} < 0 .$$



Gambar 6.4.12

Tetapi, karena A_0 dan C_0 adalah sudut lancip maka $\tan A_0 > 0$ dan $\tan C_0 > 0$. Akibatnya, $\tan A_0 + \tan C_0 > 0$. Dengan demikian, agar

$$\frac{\tan A_0 + \tan C_0}{1 - \tan A_0 \tan C_0} < 0$$

maka haruslah $1 - \tan A_0 \tan C_0 < 0$. Sehingga $\tan A_0 \tan C_0 > 1$.

Selain itu, karena $0^0 < B_0 + D_0 < 90^0$ dan fungsi tangen juga monoton naik tegas di $[0^0, 90^0)$ maka $\tan 0^0 < \tan(B_0 + D_0)$ .Sehingga

$$0 < \frac{\tan B_0 + \tan D_0}{1 - \tan B_0 \tan D_0}.$$

Tetapi, karena B_0 dan D_0 adalah sudut lancip maka $\tan B_0 > 0$ dan $\tan D_0 > 0$. Akibatnya, $\tan B_0 + \tan D_0 > 0$. Oleh karena itu, agar

$$0 < \frac{\tan B_0 + \tan D_0}{1 - \tan B_0 \tan D_0},$$

maka haruslah $1 - \tan B_0 \tan D_0 > 0$. Sehingga $\tan B_0 \tan D_0 < 1$. Dengan demikian, disimpulkan bahwa $\tan A_0 \tan C_0 \neq \tan B_0 \tan D_0$. Maka berlaku $ac \neq bd$. Dengan cara yang serupa untuk kasus $0^0 < 2A_0 + 2C_0 < 180^0$ dan $180^0 < 2B_0 + 2D_0 < 360^0$, maka berturut turut diperoleh $\tan A_0 \tan C_0 < 1$ dan $\tan B_0 \tan D_0 > 1$. sehingga, disimpulkan juga $\tan A_0 \tan C_0 \neq \tan B_0 \tan D_0$. Maka berlaku $ac \neq bd$. ♥

Selanjutnya, diberikan sebuah lemma yang menunjukkan hubungan antara jari-jari lingkaran dalam dengan panjang garis singgung pada segi-empat *Circumscriptible.*

Lema 6.4.2 Misalkan *ABCD* adalah segi-empat *Circumscriptible* dengan panjang garis singgung dari titik sudut A, B, C dan D berturut-turut adalah *a, b, c* dan *d,* dan *r* adalah jari-jari lingkaran dalamnya. Jari-jari lingkaran dalam dapat dinyatakan dalam bentuk

$$r^2 = \frac{bcd + acd + abd + abc}{a + b + c + d}.$$

Bukti. Misalkan $ABCD$ adalah segi-empat yang mana besar sudut A, B, C dan D berturut-turut adalah $2A_0,\ 2B_0,\ 2C_0$ dan $2D_0$ (lihat gambar 20), dan misalkan

$$\alpha = \tan A_0,\ \beta = \tan B_0,\ \gamma = \tan C_0 \text{ dan } \delta = \tan D_0.$$

Misalkan juga

$$\varepsilon_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$\varepsilon_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\delta + \gamma\delta$$

$$\varepsilon_3 = \alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta + \alpha\beta\delta$$

$$\varepsilon_4 = \alpha\beta\gamma\delta.$$

$$\tan(A_0+B_0+C_0+D_0)=\frac{\tan(A_0+B_0)+\tan(C_0+D_0)}{1-\tan(A_0+B_0)\cdot\tan(C_0+D_0)}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan A_0+\tan B_0}{1-\tan A_0\cdot\tan B_0}+\dfrac{\tan C_0+\tan D_0}{1-\tan C_0\cdot\tan D_0}}{1-\dfrac{\tan A_0+\tan B_0}{1-\tan A_0\cdot\tan B_0}\cdot\dfrac{\tan C_0+\tan D_0}{1-\tan C_0\cdot\tan D_0}}$$

$$=\frac{\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}+\dfrac{\gamma+\delta}{1-\gamma\delta}}{1-\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\cdot\dfrac{\gamma+\delta}{1-\gamma\delta}}$$

$$=\frac{(1-\gamma\delta)(\alpha+\beta)+(1-\alpha\beta)(\gamma+\delta)}{(1-\gamma\delta)(1-\alpha\beta)-(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\delta+\gamma)-(\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta+\alpha\beta\delta)}{1-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta)+\alpha\beta\delta\gamma}.$$

$$\tan(A_0+B_0+C_0+D_0)=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{1-\varepsilon_2+\varepsilon_4} \qquad \ldots 6.4.17$$

Pada sebarang segi-empat, jumlah keempat sudutnya sama dengan 360^0. Karena besar sudut segi-empat *ABCD* adalah $2A_0,\ 2B_0,\ 2C_0$ dan $2D_0$, maka $2A_0+2B_0+2C_0+2D_0=360^0$. Sehingga $A_0+B_0+C_0+D_0=180^0$.

Oleh karena itu, berdasarkan persamaan 6.4.17 diperoleh

$$\tan 180^0=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{1-\varepsilon_2+\varepsilon_4}$$

$$0=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{1-\varepsilon_2+\varepsilon_4}$$

Pada pembuktian Lema 6.4.1, telah ditunjukkan bahwa :

a) Jika $A_0+C_0=B_0+D_0=90^0$, maka $\alpha\gamma=\beta\delta=1$.

b) Jika $90^0<A_0+C_0<180^0$ dan $0^0<B_0+D_0<90^0$, maka $\alpha\gamma>1$ dan $\beta\delta<1$.

c) Jika $0^0<A_0+C_0<90^0$ dan $90^0<B_0+D_0<180^0$, maka $\alpha\gamma<1$ dan $\beta\delta>1$.

Berikut ini, menggunakan ketiga hasil tersebut akan ditunjukkan bahwa $\varepsilon_2-\varepsilon_4\neq 1$.

Kasus 1.

Jika $\alpha\gamma = \beta\delta = 1$, maka $\varepsilon_2 - \varepsilon_4 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta - \alpha\beta\gamma\delta$

$$= \alpha\beta + 1 + \alpha\delta + \beta\gamma + 1 + \gamma\delta - 1 \cdot 1$$

$$= (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) + 1.$$

Karena A_0, B_0, C_0 dan D_0 sudut lancip maka berlaku $\alpha + \gamma > 0$ dan $\beta + \delta > 0$.

Akibatnya

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_4 = (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) + 1 > 1.$$

Kasus 2.

Jika $\alpha\gamma > 1$ dan $\beta\delta < 1$, maka $\varepsilon_2 - \varepsilon_4 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta - \alpha\beta\gamma\delta$

$$= \alpha\beta + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \alpha\gamma(1 - \beta\delta)$$

$$> \alpha\beta + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + (1 - \beta\delta)$$

$$= (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) + 1$$

$$> 1.$$

Kasus 3.

Jika $\alpha\gamma < 1$ dan $\beta\delta > 1$, maka $\varepsilon_2 - \varepsilon_4 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta - \alpha\beta\gamma\delta$

$$= \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \gamma\delta + \beta\delta(1 - \alpha\gamma)$$

$$> \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \gamma\delta + (1 - \alpha\gamma)$$

$$= (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) + 1$$

$$> 1.$$

Dari kasus 1, 2 dan 3 dapat disimpulkan bahwa $\varepsilon_2 - \varepsilon_4 \neq 1$. Sehingga pada persamaan

$\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4} = 0$ haruslah. $\varepsilon_1 - \varepsilon_3 = 0$.

Dengan demikian,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\delta + \beta\delta\gamma + \alpha\beta\delta. \quad \text{…6.4.18}$$

Misalkan segi-empat *ABCD* tersebut adalah *Circumscriptible*. Maka persamaan (6.4.11) berlaku. Jika persamaan (6.4.11) disubtitusikan ke persamaan (6.4.18) maka diperoleh

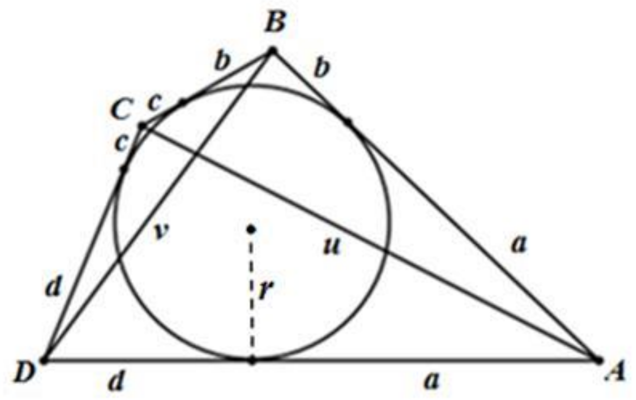
$$r^2 = \frac{bcd + acd + abd + abc}{a + b + c + d}. \qquad \heartsuit$$

Berikut ini diberikan sebuah lemma yang menunjukkan hubungan antara panjang diagonal dengan panjang garis singgung pada segi-empat *Circumscriptible*. Adapun dalam pembuktiannya menggunakan Lemma 6.4.2.

Lema 6.4.3 Misalkan *ABCD* adalah segi-empat *Circumscriptible* dengan panjang diagonal *AC* dan *BD* berturut-turut adalah *u* dan *v*. Misalkan juga panjang garis singgung dari titik sudut A, B, C dan *D* berturut-turut adalah *a*, *b*, *c* dan *d*. Panjang diagonal-diagonal segi-empat *ABCD* dapat dinyatakan dalam bentuk

$$v^2 = \frac{b+d}{a+c}((a+c)(b+d)+4ac) \text{ dan } u^2 = \frac{a+c}{b+d}((a+c)(b+d)+4bd).$$

Bukti. Misalkan $ABCD$ adalah segi-empat yang mana besar sudut *A*, *B*, *C* dan *D* berturut-turut adalah $2A_0,\ 2B_0,\ 2C_0$ dan $2D_0$.



Gambar 6.4.13

perhatikan

$$\cos 2A_0 = \cos^2 A_0 - \sin^2 A_0$$

$$= \frac{\cos^2 A_0 - \sin^2 A_0}{\cos^2 A_0} \cdot \cos^2 A_0$$

$$= (1 - \tan^2 A_0) \cdot \frac{1}{\sec^2 A_0}$$

$$\cos 2A_0 = \frac{1 - \tan^2 A_0}{1 + \tan^2 A_0}. \qquad \ldots(6.4.19)$$

Misalkan segi-empat *ABCD* tersebut adalah *Circumscriptible* dengan panjang diagonal *AC* dan *BD* berturut-turut adalah *u* dan *v*. Misalkan juga panjang garis singgung dari titik sudut A, B, C dan *D* berturut-turut adalah *a*, *b*, *c* dan *d*, dan *r* adalah jari-jari lingkaran dalamnya (lihat gambar 6.4.11). Maka persamaan (6.4.11) berlaku. Jika persamaan (6.4.11) disubtitusikan ke persamaan (6.4.19) maka diperoleh

$$\cos 2A_0 = \frac{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{a^2 + r^2}{a^2 - r^2}. \qquad \ldots(6.4.20)$$

Menggunakan Lemma 3.3 pada persamaan 6.4.20, maka diperoleh

$$\cos 2A_0 = \frac{a^2 - \left(\frac{bcd + acd + abd + abc}{a + b + c + d}\right)}{a^2 + \left(\frac{bcd + acd + abd + abc}{a + b + c + d}\right)}$$

$$= \frac{a^2(a + b + c + d) - (bcd + acd + abd + abc)}{a^2(a + b + c + d) + (bcd + acd + abd + abc)}$$

$$= \frac{a^2(a + b + c + d) - (bcd + acd + abd + abc)}{(a + b)(a + c)(a + d)}. \qquad \ldots(6.4.21)$$

Dengan cara yang serupa diperoleh

$$\cos 2D_0 = \frac{d^2(a + b + c + d) - (bcd + acd + abd + abc)}{(b + d)(a + d)(c + d)}. \qquad \ldots(6.4.22)$$

Selanjutnya, menggunakan aturan Kosinus pada ΔBAD dan ΔACD yang berada pada segi-empat *Circumscriptible ABCD* (lihat gambar 6.4.11), maka berturut-turut diperoleh

$$v^2 = (a+b)^2 + (a+d)^2 - 2(a+b)(a+d)\cos 2A_0 \qquad \ldots(6.4.23)$$

dan

$$u^2 = (a+d)^2 + (c+d)^2 - 2(a+d)(c+d)\cos 2D_0. \qquad \ldots 6.4.24$$

Dengan mensubtitusi persamaan (6.4.11) ke persamaan (6.4.13), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
v^2 &= (a+b)^2 + (a+d)^2 - 2(a+b)(a+d)\cos 2A_0 \\
&= (a+b)^2 + (a+d)^2 - 2(a+b)(a+d)[a^2(a+b+c+d) - (bcd+acd \\
&\quad + abd + abc)]/(a+b)(a+c)(a+d) \\
&= (a+b)^2 + (a+d)^2 - \frac{2}{a+c}[a^2(a+b+c+d) - (bcd+acd+abd+abc)] \\
&= ((a+c)[a^2+2ab+b^2+a^2+2ad+d^2] - 2[a^3+a^2b+a^2c+a^2d \\
&\quad - (bcd+acd+abd+abc)])/(a+c) \\
&= ((a+c)[b^2+d^2+2bd-2bd+2a^2+2ab+2ad] - 2[a^3+a^2b \\
&\quad + a^2c + a^2d - (bcd+acd+abd+abc)])/(a+c) \\
&= ((a+c)(b+d)^2 + 2(a+c)(-bd+a^2+ab+ad) - 2[a^3+a^2b+a^2c \\
&\quad + a^2d - (bcd+acd+abd+abc)])/(a+c) \\
&= ((a+c)(b+d)^2 + 2(-abd+a^3+a^2b+a^2d-bcd+a^2c+abc+acd \\
&\quad - a^3 - a^2b - a^2c - a^2d + bcd + acd + abd + abc))/(a+c) \\
&= \frac{(a+c)(b+d)^2 + 2(2abc+2acd)}{a+c} \\
&= \frac{(a+c)(b+d)^2 + 4ac(b+d)}{a+c} \\
v^2 &= \frac{b+d}{a+c}((a+c)(b+d)+4ac).
\end{aligned}$$

Dengan mensubtitusi persamaan (6.4.22) ke persamaan (6.4.24) maka diperoleh

$$u^2 = (a+d)^2 + (c+d)^2 - 2(a+d)(c+d)\cos 2D_0$$

$$= (a+d)^2 + (c+d)^2 - 2(a+d)(c+d)[d^2(a+b+c+d) - (bcd+acd$$

$$+abd+abc)]/(b+d)(a+d)(c+d)$$

$$u^2 = (a+d)^2 + (c+d)^2 - \frac{2}{b+d}[d^2(a+b+c+d) - (bcd+acd+abd+abc)]$$

$$= ((b+d)[a^2+2ad+d^2+c^2+2cd+d^2] - 2[d^3+d^2b+d^2c+a^2d$$

$$-(bcd+acd+abd+abc)])/(b+d)$$

$$= ((b+d)[a^2+c^2+2ac-2ac+2d^2+2ad++2cd] - 2[d^3+d^2a$$

$$+d^2b+d^2c-(bcd+acd+abd+abc)])/(b+d)$$

$$= ((b+d)(a+c)^2 + 2(b+d)(-ac+d^2+ad+cd) - 2[d^3+d^2a+d^2b$$

$$+d^2c-(bcd+acd+abd+abc)])/(b+d)$$

$$= ((b+d)(a+c)^2 + 2(-abc+d^3+cd^2+bcd+ad^2+bd^2+abd-acd$$

$$-d^3-d^2b-d^2c-d^2a+bcd+acd+abd+abc))/(b+d)$$

$$= \frac{(b+d)(a+c)^2 + 2(2abd+2bcd)}{b+d}$$

$$= \frac{(b+d)(a+c)^2 + 4bd(a+c)}{b+d}$$

$$u^2 = \frac{a+c}{b+d}\left((a+c)(b+d)+4bd\right). \qquad \heartsuit$$

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang menyatakan adanya hubungan antara panjang diagonal dengan panjang garis singgung pada segi-empat Bisentrik. Pada prinsipnya pada teorema 6.4.3 sudah diberikan hubungan antara perbandingan panjang diagonal tersebut untuk segi-empat siklik (tali busur), berikut ini diberikan lagi hubungan yang sama, akan tetapi diberlakukan untuk segi-empat *Circumscriptible* dan menjadi syarat perlu dan cukup untuk segi-empat siklik. Berikut teorema yang dimaksud.

Teorema 6.4.5 Misalkan *ABCD* adalah segi-empat *Circumscriptible* dengan panjang diagonal *AC* dan *BD* berturut-turut adalah *u* dan *v*. Misalkan juga panjang garis singgung dari titik sudut A, B, C dan D berturut-turut adalah *a, b, c* dan d (lihat gambar 6.4.11). Segi-empat *ABCD* adalah Siklik jika dan hanya jika $\frac{u}{v} = \frac{a+c}{b+d}$.

Menggunakan Lema 6.4.1 dan 6.4.2, diberikan pembuktian singkat dari Teorema 6.4.5 berikut ini.

Bukti. $\Rightarrow$. Misalkan segi-empat *ABCD* adalah *Circumscriptible.* Akan ditunjukkan bahwa jika segi-empat *ABCD* adalah Siklik maka $\frac{u}{v} = \frac{a+c}{b+d}$. Misalkan segi-empat *ABCD* adalah Siklik. Berdasarkan Lema 6.4.1, berlaku

$$ac = bd\,.$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan 4, kemudian ditambahkan dengan $(a+c)(b+d)$ maka diperoleh

$$(a+c)(b+d) + 4ac = (a+c)(b+d) + 4bd$$

Menggunakan Lema 6.4.3, maka diperoleh

$$\frac{v^2(a+c)}{b+d} = \frac{u^2(b+d)}{a+c}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{a+c}{b+d}\,.$$

$\Leftarrow$. Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa jika $\frac{u}{v} = \frac{a+c}{b+d}$ maka *ABCD* adalah Siklik. Misalkan

$$\frac{u}{v} = \frac{a+c}{b+d}\,.$$

Jika kedua ruas dikuadratkan maka diperoleh

$$\frac{v^2(a+c)}{b+d} = \frac{u^2(b+d)}{a+c}\,.$$

Menggunakan Lemma 6.3.4, maka diperoleh

$$(a+c)(b+d) + 4ac = (a+c)(b+d) + 4bd$$

$$ac = bd\,.$$

Berdasarkan Lema 6.4.1, maka disimpulkan segi-empat *ABCD* adalah Siklik. ♥

Dalam berbagai buku teks, banyak dibuktikan jari-jari lingkaran luar untuk segi-empat tali busur, akan tetapi proses pembuktiannya selalu dengan menggunakan pendekatan geometri yang sangat berbelit-belit. Bukti cara lain tidak diberikan disini, akan tetapi berikut ini akan diberikan cara pembuktian jari-jari lingkaran luar dengan menggunakan konsep geometri yang lebih sederhana seperti yang diberikan di atas.

Teorema 6.4.6: Diketahui tahui segi-empat talibusur *ABCD* dengan panjang *AB* = *a* cm, *BC* = *b* cm dan *CD* = *c* cm serta *DA* = *d* cm. Maka jari-jari lingkaran luarnya adalah

$$R = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4\,L}$$

Bukti : Kembali perhatikan gambar 6.1.13 atau 6.1.14 di atas, sama seperti langkah di atas yaitu untuk ΔABC dan ΔACD diperoleh

$abp = 4R \times L\Delta ABC$

$cdp = 4R \times L\Delta ADC$

yang kalau kedua persamaan di atas dijumlahkan akan diperoleh

$(ab + cd).p = 4R \times$ Luas □*ABCD*

Jadi

$$R = \frac{(ab+cd)}{4}.p$$

$$= \frac{ab+cd}{4L}.\sqrt{\frac{(ad+bc).(ac+bd)}{ab+cd}}$$

$$= \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4\,L}$$ ♥

***Soal Latihan* 13.**

1. Tentukanlah bentuk Persamaan yang dapat dihasilkan seperti pada teorema Carnot I, jika titik P berada diluar ΔABC
2. Periksalah apakah ketaksamaan Erdos-Mordell berlaku jika titik *P* berada di luar segitiga *ABC*. Kalau berlaku silakan dibuktikan dan kalau tidak berlaku berikan contoh penyangkalnya.
3. Jika P tidak berada pada busur *AC* pada lingkaran luar ΔABC, maka tunjukkan bahwa

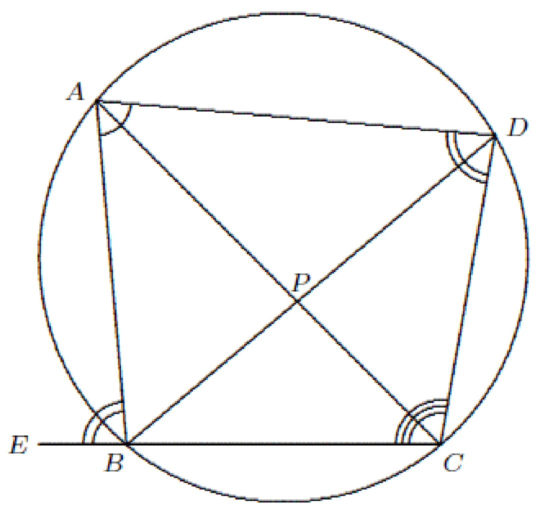
$$AC \, . \, PB + BC \, . \, PA > AB \, . \, PC$$

4. Tunjukkan bahwa teorema Pythagoras adalah bentuk khusus dari teorema Ptolemaeus.
5. Diketahui trapesium samakaki *ABCD* (*AB* sejajar *DC*). Buktikan bahwa

$$(AC)^2 - (AD)^2 = AB \times CD$$

6. Gunakan teorema Ptolemy untuk membuktikan rumus-rumus trigonometri misalnya *tan* $(\alpha+\beta)$ dan *tan* $(\alpha-\beta)$.
7. Jika pada gambar disebelah, *ABCD* adalah segi-empat siklik, tunjukkan bahwa $\angle ABE = \angle D$
8. Jika pada gambar disebelah pada segi-empat *ABCD* berlaku $\angle ABE = \angle D$, tunjukkan bahwa *ABCD* adalah segi-empat siklik.
9. Jika *P* adalah titik potong sebarang segi-empat sikllik, tunjukkan bahwa

$$AP \, . \, PC = BP \, . \, PD.$$

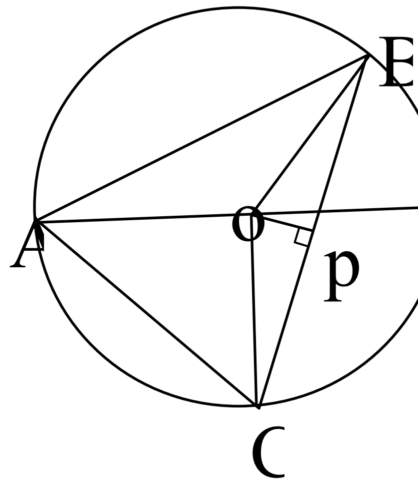


10. Pada sebuah lingkaran yang berpusat di titik *O* dibuat busur *AB* dan *AC*, dengan *X* dan *Y* merupakan titik tengah dari busur *AB* dan *AC*, buktikan bahwa *O, X, A* dan *Y* adalah titik yang consiklik.

11. Jika pada sebuah trapesium *ABCD*, dengan *AB* sejajar dengan *DC*, misalkan *E* titik tengah dari sisi *BC*. Tunjukkan bahwa 2*L*Δ*AED* = *L*□*ABCD*
12. Jika ABCD adalah segi-empat Konvek. Tunjukkan bahwa luas segi-empat tersebut adalah

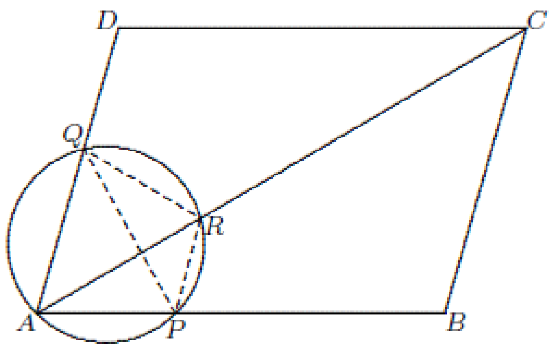
$$K^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\ cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

13. Perhatikan gambar disebelah. Misalkan *O* titik pusat lingkaran luar Δ*ABC* dengan diameter *d*, jika ∠*BAC* = α, tunjukkan bahwa *sin* α = *BC*/d.



14. Pada jajaran genjang *ABCD* seperti gambar disebelah. Sebuah lingkaran melalui titik *A* memotong sisi *AB, AD* dan *AC* masing-masing dititik *P*. *Q* dan *R*. Tunjukkan berlaku :

AP . *AB* + *AQ* . *AD* = *AR* . *AC*



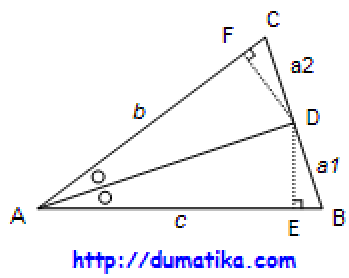
15. Buktikan teorema Pythagoras dengan menggunakan teorema Ptolemy
16. Buktikan teoema Van Schooten’s dengan menggunakan teorema Ptolemy

17. *) Diketahui segitiga samasisi *ABC* dan titik *P* terletak sedemikian rupa sehingga jumlah jarak *P* ke *A* dan jarak *P* ke *C* tidak lebih jauh dari jarak *P* ke *B*. Buktikan bahwa *PB* = *PA* + *PC* jika dan hanya jika P terletak pada lingkaran luar ΔABC
18. *) Diketahui Δ*ABC* samakaki (*AB* = *AC*), dibuat lingkaran lluar dan titi *P* terletak pada busur *BC*. Buktikan bahwa :
$$\frac{PA}{PB+PC} = \frac{AC}{BC}$$
19. **) Dalam segilima beraturan *ABCDE* dibuat lingkaran luar dan titik *P* terletak pada busur BC. Buktikan bahwa
$$PA + PD = PB + PC + PE$$
20. *). Jika pada segitiga *ABC*, masing-masing titik *D*, *E* dan *F* berada pada sisi *BC*, *CA* dan *AB*. Tunjukkan lingkaran luar dari Δ*AEF*, Δ*BDF* dan Δ*CDE* berpotongan disatu titik. (titik perpotongannya itu disebut dengan *titik Miquel*).
21. Jika *ABCD* adalah segi-empat siklik dengan panjang sisi *a*, *b*, *c* dan *d*. tunjukkan bahwa Luasnya adalah $K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ dengan *s* adalah semiperimeter.

BAB VII

Garis-garis Istimewa Pada Segitiga

Perhatikanlah gambar di bawah ini, hal ini menunjukkan bagaimana banyaknya masalah dalam kehidupan nyata yang melibatkan segitiga, bukan hanya segitiga, akan tetapi adalah beberapa garis khusus yang terdapat dalam segitiga tersebut.

BAB VII

Garis-garis Istimewa Pada Segitiga

Segitiga terbentuk oleh tiga ruas garis yang setiap ujungnya bersekutu dengan sebuah ujung ruas garis lainnya. Pesekutuan-persekutuan tersebut membentuk (tiga) buah titik sudut segitiga. Ruas garis semula membentuk sisi-sisi segitiga. Ketiga ruas garis melingkupi sebuah *daerah segitiga"*. Jumlah ketiga panjang ruas garis dinamakan keliling segitiga tersebut. Ukuran besar daerah segitiga merupakan ukuran luas daerah segitiga yang secara singkat dinamakan luas segitiga.

Sangat banyak garis-garis istimewa dalam sebuah segitiga, garis bagi, garis berat dan garis tinggi sebenarna juga garis-garis istimewa pada suatu segitiga. Akan tetapi karena garis bagi khususnya terkait terkait dengan lingkaran dalam, makanya dibahas pada bab terdahulu. Maka sebelum membahas garis-garis istimewa dalam segitiga tersebut terlebih dahulu sekedar remidial tentang sisi dan sudut yang pada dasarnya telah digunakan pada pembahasan yang ada pada bagian sebelum ini.

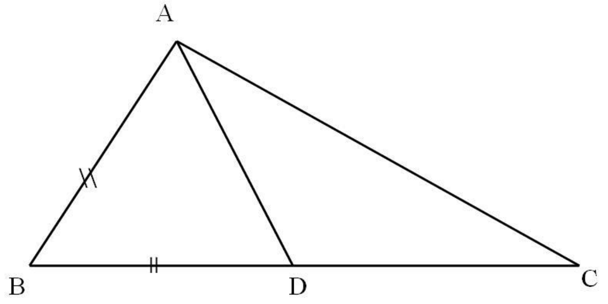
7.1. *Sisi dan Sudut*

Pada bagian ini akan dibahas beberapa pemahaman dasar tentang segitiga yang terkait dengan hubungan sudut dan panjang sisinya yang sering disebut dengan istilah ketidaksamaan pada sisi segitiga dan hubungannya dengan sisi dan sudut. masalah garis bagi, garis tinggi dan garis berat yang untuk selanjutnya pemahaman konsep ini sangat diperlukan untuk memahami konsep-konsep lainnya yang ada pada bagian lain.

Jika dua buah sisi segitiga tidak sama panjang, maka sudut terbesar pasti akan terletah pada dihadapan sisi terpanjang. Pernyataan tersebut dapat kita sederhanakan dalam bentuk teorema berikut ini

***Teorema* 7.1.1**: Pada ΔABC, jika $BC > AB$, maka $\angle BAC > \angle ACB$.

Bukti : Bentuk garis AD sehinga $BD = AB$, jadi ΔABD merupakan segitiga sama kaki. Maka $\angle DAB = \angle ADB$



Gambar 7.1.1

$$\angle ADB = \angle DAC + \angle ACD$$

$$\angle DAB = \angle DAC + \angle ACD$$

Sehingga

$$\angle DAB + \angle DAC > \angle DAC + \angle ACD$$

$$\angle BAC > \angle ACD$$

atau

$$\angle BAC > \angle ACB \qquad \heartsuit$$

Kebalikan dari teorema di atas juga akan berlaku, maksudnya jika pada sebuah segitiga, dua buah sudut pada segitiga tersebut tidak sama, maka sisi terpanjang akan berada didepan sudut terbesar, yang dalam bentuk teorema dapat dituliskan sebagai berikut

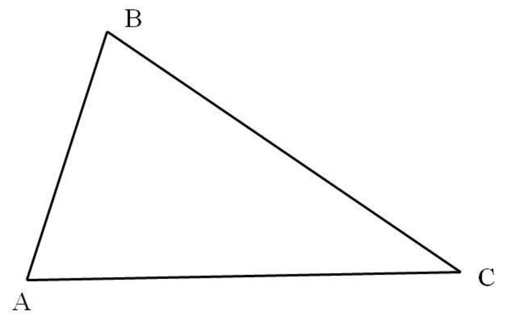
***Teorema* 7.1.2** : Jika pada ΔABC, $\angle A > \angle C$, maka $BC > AB$

Bukti : Perhatikan gambar 6.1 2. Misalkan $\angle A > \angle C$, maka hubungan antara BC dengan AB ada 3 kemungkinan yaitu

1. $BC < AB$
2. $BC = AB$
3. $BC > AB$

Bila $BC < AB$ maka menurut teorema 7.1.1 di atas, mestilah $\angle A < \angle C$ yang kontradiksi dengan premis.

Selanjutnya jika $BC = AB$ maka mestilah $\angle A = \angle C$, yang juga kontradisi dengan premis, maka yang berlaku adalah kemungkinan ke 3 yaitu $BC > AB$.



Gambar 7.1.2

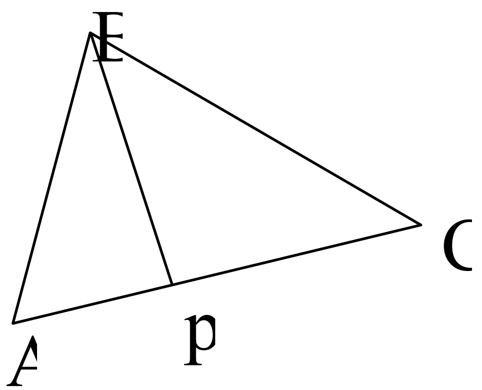
Teorema 7.1.3. (Teorema bisektor sudut).

Misalkan ABC sebarang segitiga dengan BP adalah bisektor $\angle B$, maka berlaku

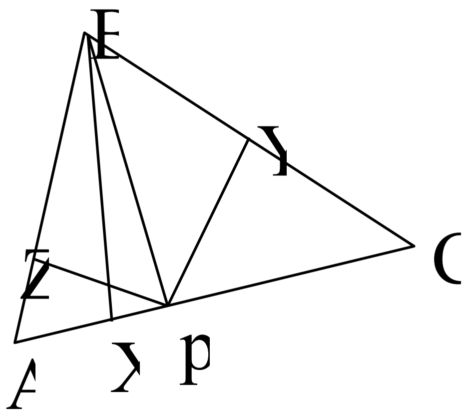
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PC} \Leftrightarrow \angle ABP = \angle PBC.$$

Bukti : $\Leftarrow$ dari titik P buat garis yang tegak lurus ke sisi AB dan BC, katakan titik berpotongan di titik Y dan Z seperti pada gambar 7.1.3b kemudian dari titik B buat garis tegak lurus ke AC dan katakana titik potongnya adalah X. maka jelas berlaku $PZ = PY$, kemudian dari kesebangunan ΔABX dengan segitiga APZ, maka diperoleh

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BX}{PZ} = \frac{BX}{PY}$$



Gambar 7.1.3a



Gambar 6.1. b

Selanjutnya dari kesebangunan ΔCBX dengan ΔCPY maka diperoleh $\frac{CB}{CP} = \frac{BX}{PY}$, sehingga diperoleh

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AP \cdot BX}{PY} \cdot \frac{PY}{CP \cdot BX} = \frac{AP}{CP}.$$

$\Rightarrow$ Misalkan $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{CP}$. misalkan P' titik potong bisektor sudut B ke AC, akan ditunjukkan $P = P'$. Karena P′ juga titik potong dari bisektor sudut B, maka berdasarkan premis berlaku $\frac{AB}{BC} = \frac{AP'}{CP'}$. yang menyebabkan $\frac{AP'}{CP'} = \frac{AP}{CP}$. kondisi ini menyebabkan $P = P'$ ♥

7.2. *Beberapa Teorema Khusus*

Materi pada sub bab 6.1 sebenarnya bisa dipahami sesudah bab II, akan tetapi dimasukkan disini karena untuk keterkaitannya dengan berbagai teorema yang ada di bagian berikut. Berikut ini akan diberikan beberapa teorema khusus yang ada dalam segitiga, sebenarnya sangat banyak teorema khusus dalam segitiga tersebut, akan tetapi disini hanya akan diberikan sebahagian yaitu yang terkait dengan hubungan sisi dan sudut. Untuk yang pertama akan diberikan hubungan antara panjang sisi segitiga jika sebuah garis kita tarik dari sebarang titik sudutnya, secara khusus hal ini dikenal dengan teorema Stewart's berikut ini.

Teorema Stewart's : 7.2.1. diberikan sebuah segitiga *ABC*, pada sisi *BC* dibuat titik *X* dengan perbandingan *BX* : *XC* = *r* : *s*, jika panjang sisi *AX* adalah *p*, maka berlaku :

$$a(p^2 + rs) = b^2r + c^2s$$

Bukti : Misalkan $\angle B = \theta$, gunakan hokum kosinus untuk ΔAXB, maka diperoleh

$$cos\,\theta = \frac{r^2 + p^2 - c^2}{2pr}$$

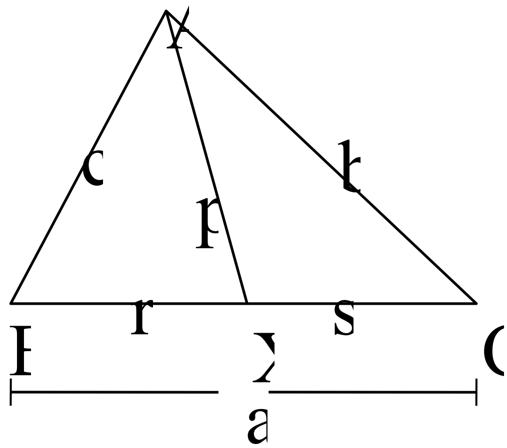
Kemudian gunakan juga hokum kosinus untuk ΔBXC, yang memberikan

$$\cos\theta = \frac{b^2 - s^2 - p^2}{2ps}.$$

Jadi

$$\frac{r^2 + p^2 - c^2}{2pr} = \frac{b^2 - s^2 - p^2}{2ps}.$$

Karena $a = r + s$, maka dari persamaan di atas diperoleh $a(p^2 + rs) = b^2r + c^2s$



gambar 7.2.1

Perlu diperhatikan bahwa dalam berbagai buku, teorema stewart's di atas ditulis dalam bentuk berikut

$$ap^2 = b^2.r + c^2.s - rsa \qquad (7.2.1)$$

Pada prinsipnya teorema stewart's tersebut juga berlaku jika $\angle A$ adalah tumpul, untuk memahaminya dapat penulis lakukan sebagai latihan. Berikut ini akan diberikan bukti lain dari teorema Stewart's yang hasilnya ditulis dalam bentuk seperti persamaan (7.2.1), akan tetapi dibuktikan untuk $\angle A$ yang tumpul dan dengan memberikan notasi yang berbeda dengan bukti yang di atas.

Bukti lain teorema Stewart's

Perhatikan gambar 7.2.2a. buat garis dari titik C ke AB dan katakana titik potongnya adalah D, sebut $AD = c_1$ dan $DB = c_2$. Kemudian dari titik C buat garis tinggi ke sisi AB (seperti gambar 7.2.2b). Katakan titik potongnya dengan garis AB adalah di titik E dan katakan panjang $DE = m$. kemudian katakana panjang sisi $CD = x$, akan ditunjukkan

$$x^2.c = a^2c_1 + b^2.c_2 - c_1c_2c$$

Berdasarkan teorema proyeksi pada segitiga lancip/tumpul, maka pada ΔDBC berlaku

$$a^2 = x^2 + c_2^2 + 2mc_2$$

$$m = \frac{-x^2 - c_2^2 + a^2}{2c_2} \qquad (7.2.2)$$

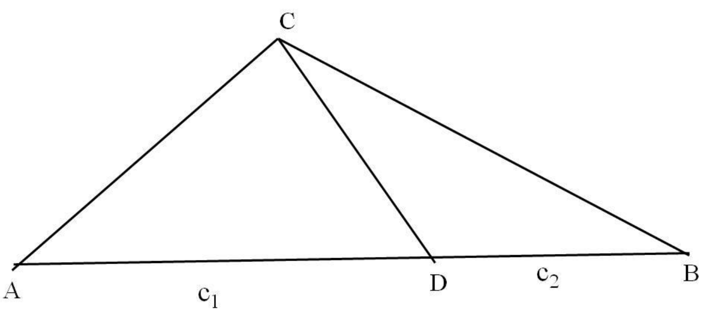
Kemudian pandang ΔADC (lancip),kembali berdasarkan teorema proyeksi pada segitiga lancip/tumpul dipreoleh

$$b^2 = x^2 + c_1^2 - 2mc_1$$

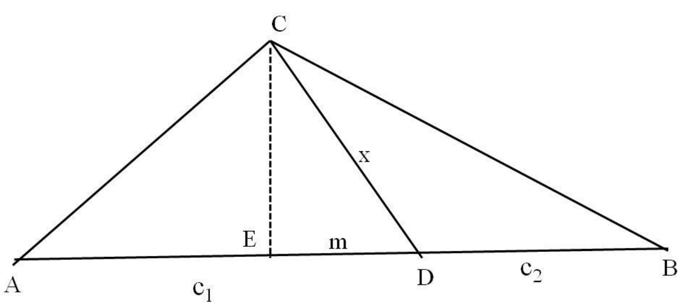
Maka diperoleh

$$m = \frac{x^2 + c_1^2 - b^2}{2c_c} \qquad (7.2.3)$$

Maka dari persamaan (7.2.2) dan (7.2.3) diperoleh



Gambar 7.2.2a



gambar 7.2.2b

$$\frac{x^2+c_1^2-b^2}{2c_1} = \frac{-x^2-c_2^2+a^2}{2c_2}$$

$$x^2c_2 + c_1^2c_2 - b^2c_2 = -x^2c_1 - c_1^2c_1 + a^2c_1$$

$$x^2(c_1 + c_2) = a^2c_1 + b^2c_2 + c_1c_2(c_1 + c_2)$$

$$x^2c = a^2c_1 + b^2c_2 + c_1c_2c$$

Jika pada teorema stewart's di atas titik *X* merupakan bisektor dari *BC* atau ΔABC merupakan segitiga samasisi, maka dipreleh bentuk khususnya yang sering disebut dengan teorema Apollonius, seperti berikut ini

Teorema Apollonius **7.2.2**: Jika pada ΔABC dengan panjang sisi masing-masing adalah *a*, *b* dan *c*, dan *BX* merupakan disektor dari *AC*, bila panjang *BX* = *m*, maka berlaku

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + a^2/2.$$

Dan jika *b* = *c*, maka segitiga tersebut menjadi segitiga samasisi dan berlaku

$$m^2 + (a/2)^2 = b^2.$$

Bukti : gunakan lansung teorema Stewart's (7.2.1) ♥

Misalkan kita punya suatu ΔABC dengan sisi-sisi masing-masing adalah *a*, *b* dan *c*, kemudian dari titik *C* diproyeksikan pada sisi *AB* (sisi *c*), sebut titik proyeksinya adalah *D* dan katakana *AD* = *p* dan *DB* = *q*, maka berikut ini akan ditentukkan hubungan *p* dan *q* terhadap panjang sisi *a* dan b. Teorema yang membahas tentang hal ini sering disebut dengan teorema proyeksi pada segitiga lancip/tumpul yaitu sebagai berikut :

Teorema **7.2.3**: Misalkan *ABC* suatu segitiga dan misalkan *D* merupakan proyeksi titik *C* pada sisi *AB*. Sebut *p* = *AB* dan *q* = *DC*, maka berlaku

$$a^2 = b^2 + c^2 - pc$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - qc$$

Bukti : Pandang $\Delta\ ADC$, maka berlaku

$$t^2 = b^2 - p^2$$

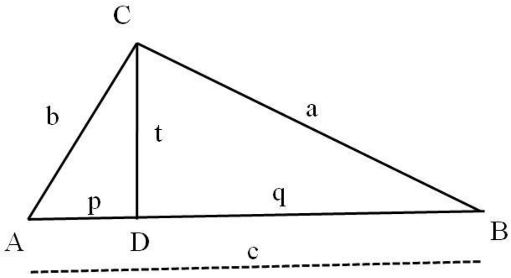
$$a^2 - q^2 = b^2 - p^2$$

$$a^2 = b^2 - p^2 + q^2$$

$$a^2 = b^2 - p^2 + (c - p)^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2pc$$

untuk $b^2 = a^2 + c^2 - 2qc$ dapat
dibuktikan dengan cara yang serupa.



Gambar 7.2.3

Teorema di atas juga dapat dibuktikan dengan cara yang serupa, jika $\angle C$ merupakan segitiga tumpul, yang dapat pembaca detailkan sebagai latihan. Yang perlu diperhatikan adalah bahwa hasilnya berbeda untuk segitiga lancip. Untuk segititiga tumpul hasilnya adalah

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2pc$$
$$b^2 = a^2 + c^2 + 2qc$$

Teorema khusus berikutnya yang akan dibahas adalah hubungan antara panjang sisi-sisi suatu segi tiga dengan panjang garis berat (yaitu garis dari suatu titik sudut yang membagi sisi dihadapannya atas dua bahagian yang sama panjang).

***Teorema* 7.2.4**: misalkan ΔABC dengan sisi a, b dan c serta z_a, z_b dan z_c masing-masing menyatakan garis berat dari ke masing-masing sisi a, b dan c, maka berlaku

$$z_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$$

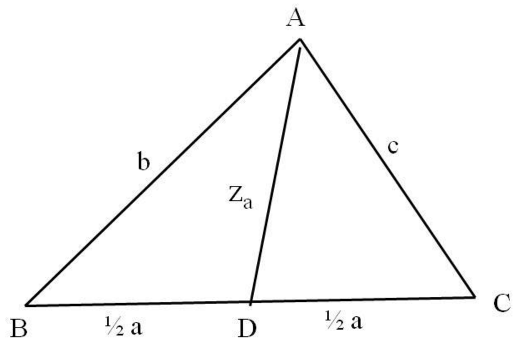
$$z_b^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}b^2$$

$$z_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c^2$$

Bukti : diketahui ΔABC, dengan $z_a = AD$ (seperti pada gambar 7.2.4)

$$z_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$$

Sedangkan yang lain dapat ditunjukkan dengan cara yang serupa. Dari teorema Stewart akan diperoleh



Gambar 7.2.4

$$z_a^2 . a = b^2 . \frac{1}{2} . a + c^2 . \frac{1}{2} . a - \frac{1}{2} a . \frac{1}{2} a . a$$

$$a . z_a^2 = a . \left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2\right)$$

Sehingga maka diperolehlah

$$z_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$$

Teorema 7.2.5: Garis yang membagi sisi di depannya menjadi dua bagian yang berbanding seperti sisi-sisi yang berdekatan.

Bukti : perhatikan gambar 7.2.5a kemudian tarik garis *AD*, selanjutnya buat titik *E* dan *F* sehingga $DE \perp AB$ dan $DF \perp AC$ sehingga $\Delta ADE \cong \Delta ADF$. Sebut $CD = a_1$ dan $DB = a_2$. Akan dibuktikan bahwa berlaku $a_1 : a_2 = c : b$.

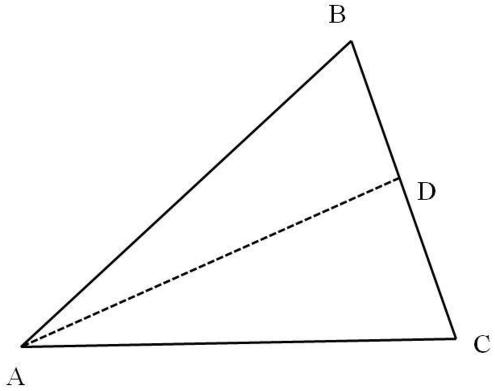
Perhatikan ΔABD dan ΔACD

$$\frac{L\Delta ABD}{L\Delta ACD} = \frac{\frac{1}{2}.AB.DE}{\frac{1}{2}.AC.DF} = \frac{c}{b}$$

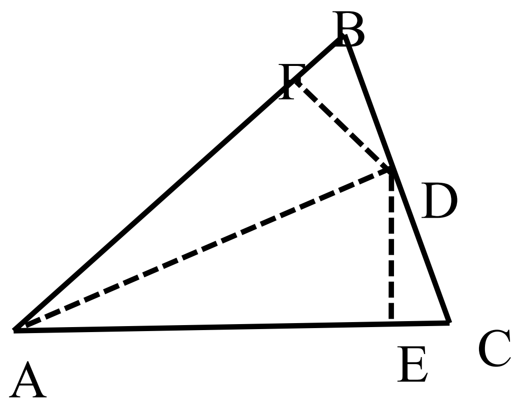
Jika garis tinggi dari *A* disebut z_a , maka berlaku

$$\frac{L\Delta ABD}{L\Delta ACD} = \frac{\frac{1}{2}.BD.z_a}{\frac{1}{2}.CD.z_a} = \frac{a_1}{a_2}$$

Sehingga dapat disimpulkan $a_1 : a_2 = c : b$. ` ` ♥



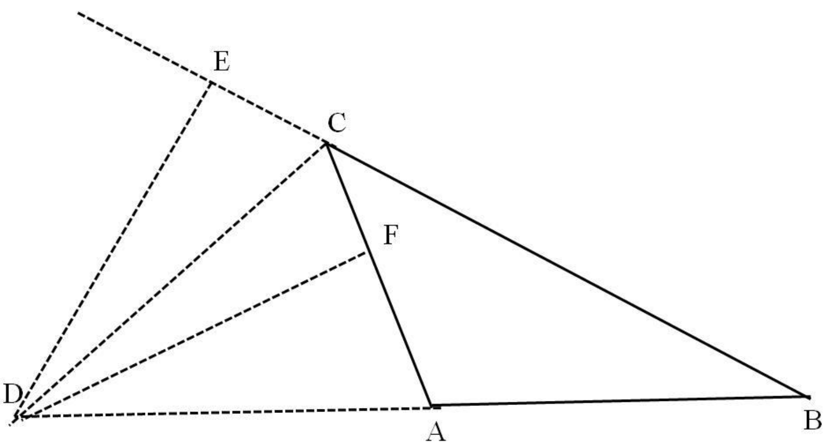
Gambar 7.2.5a



Gambar 7.2.5b

Juga dapat ditunjukkan bahwa teorema di atas juga berlaku untuk garis bagi luar. Bila diketahui ΔABC, kemudian buat garis bagi luar $\angle C$, perpanjang sisi *BA* sehingga memotong garis bagi tadi di titik *D* (seperti gambar 7.2.6), kemudian buat garis tegak lurus dari titik *D* ke *AC* dan perpanjangan sisi *BC*. Sebut *AD* = *p* dan *BD* = *q*, akan ditunjukkan bahwa berlaku

$$CD^2 = pq - ab$$



Gambar 7.2.6

Menurut teorema 7.2.1 (teorema Stewart) berlaku :

$$b^2q = CD^2.c + a^2.p - pcq$$

$$CD^2.c = pqc + b^2.q - a^2.p$$
$$CD^2.c = pqc + b(b.q) - a(a.p)$$
$$CD^2.c = pqc + b(a.p) - a(b.q)$$
$$CD^2.c = pqc + abp - abq$$
$$CD^2.c = pqc + a\,b(p - q)$$
$$CD^2.c = pqc - abc$$
$$CD^2 = pq - ab$$

Kalau teorema di atas terkait dengan hubungan sisi pada suatu segitiga dengan garis bagi berikut ini akan diberikan hubungan antara sisi-suatu segitiga dengan garis tinggi (yaitu garis dari titik sudut yang tegak lurus dengan sisi di hadapannya). Pembahasannya digunakan pendekatan yang sangat sederhana yang hanya menggunakan konsep luas dan konsep lain yang cukup sederhana.

***Teorema* 7.2.6** : Dua garis tinggi dalam segitiga berbanding terbalik dengan sisinya

Bukti : Misalkan kita punya Δ*AB*C, sebut t_a dan t_b masing-masing garis tinggi dari titik *A* dan *B*. Akan dibuktikan berlaku

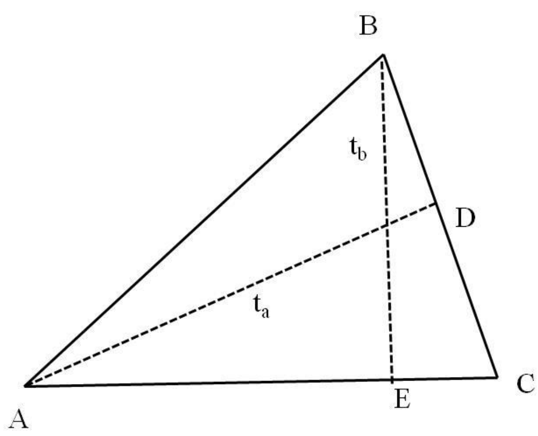
$$\frac{t_a}{t_b} = \frac{b}{a}$$

Perhatikan gambar disebelah, dari sisi garis tinggi t_a dan t_b maka luas Δ*ABC* dapat ditentukan dari dua sisi yaitu

$L\Delta ABC = ½\ AC.t_b = ½\ b.t_b$

dan

$L\Delta ABC = ½\ CB.t_a = ½\ a.t_a$



Gambar 7.2.6

Maka diperoleh

$$\frac{t_a}{t_b} = \frac{b}{a}$$

***Teorem**a* 7.2.7 : Misalkan pada sebuah ΔABC, dengan panjang sisi masing-masing adalah a, b dan c. bila t_a, t_b dan t_c masing-masing menyatakan panjang garis tinggi dari titik A, B dan C, maka

$$t_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a).(s-b).(s-c)}$$

$$t_b = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a).(s-b).(s-c)}$$

$$t_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a).(s-b).(s-c)}$$

Bukti : karena $s = a + b + c$, maka

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2s - 2c = 2\,(s - c)$$

dengan cara yang sama akan dipreoleh

$$a - b + c = 2(s - b)$$

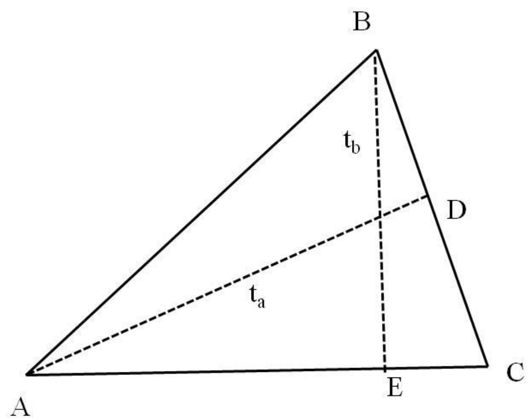
$$-a + b + c = 2(s - a)$$

Selanjutnya perhatikan gambar 7.2.7

$$t_a^2 = c^2 - p^2$$

Dan dari teorema proyeksi pada segitiga lancip/tumpul diperoleh

$$p = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$



Gambar 7.2.7

Maka

$$t_a^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

$$t_a^2 = \left(c + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right).\left(c - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$t_a^2 = \left(\frac{2ac + c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right).\left(\frac{2ac - c^2 - a^2 + b^2}{2a}\right)$$

$$t_a^2 = \left(\frac{(a+c)^2 - b^2}{2a}\right).\left(\frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}\right)$$

$$t_a^2 = \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b-a+c)(b+a-c)}{4a^2}$$

$$t_a^2 = \frac{2s.2(s-b)(s-a)(s-c)}{4a^2}$$

$$t_a^2 = \frac{4}{a^2}(s.(s-b)(s-a)(s-c))$$

$$t_a = \frac{2}{a}\sqrt{s.(s-b)(s-a)(s-c)}$$

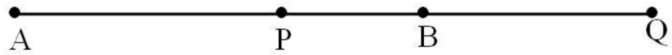
Untuk membuktikan t_b dan t_c dapat dilakukan dengan cara yang serupa sebagai latihan.

6.3. *Konjugate Harmonik*

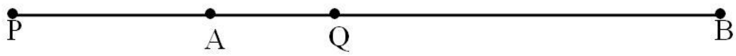
Misalkan pada garis *AB* (dan perpanjanganya) terdapat titik *P* dan *Q*, sehingga *P* dan *Q* dikatakan membagi segmen *AB*, dikatakan membagi secara harmonik jika ia membagi segmen *AB* dalam rasio yang sama. Dalam artian

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$$

Dalam hal ini titik *P* dan *Q* dikatakan *Konjugate harmonic* terhadap segmen garis *AB*.



Gambar 7.3.1a



Gambar 7.3.1.b

Jika P dan Q merupakan conjugate harmonic dari segmen garis *AB*, maka sering disimbolkan dengan (*A*,*B*;*P*,*Q*)

***Teladan* 7.3.1.** Jika d menyatakan panjang segmen garis *AB* dan *P*, *Q* harmonic konjugate pada segmen garis *AB*, jika *AP* = *p* dan *AQ* = *q*, maka berlaku

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{d}$$

Penyelesaian : Dari hubungan $\frac{p}{d-p} = -\frac{q}{d-q}$, maka akan diproleh hasil yang di inginkan.

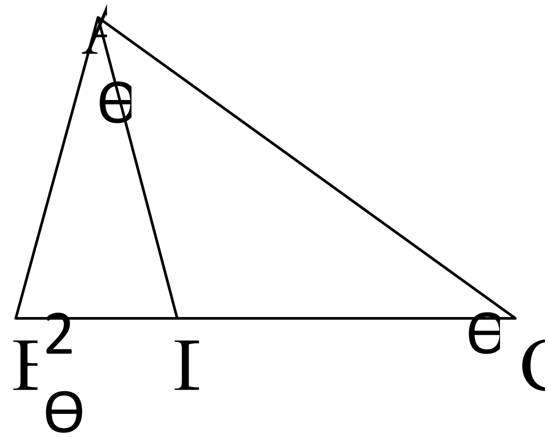
***Soal Latihan* 14.**

1. Kalau teorema sudut bisektor, adalah untuk bisektor dalam tunjukkan bahwa teorema sudut bisektor juga berlaku untuk sudut luar

2. (segitiga emas). Diberikan sebuah ΔABC dengan ukuran sudutnya seperti gambar disebelah, tunjukkan bahwa berlaku :

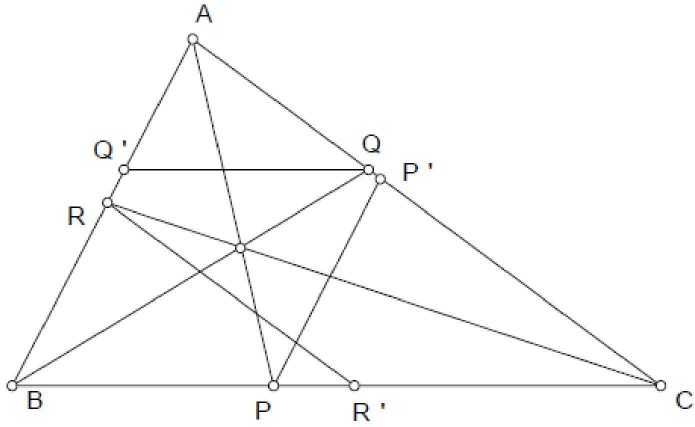
$$\frac{DC}{AD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Catatan : perbandingan DC/AD ini disebut dengan perbadingan emas (golden ratio).

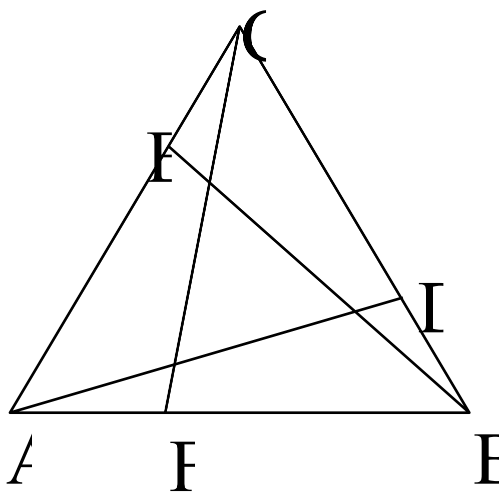


3. Misalkan ΔABC dengan panjang sisi $a = 11$, $b = c$, jika titik D dan E berada pada sisi BC sehingga AD dan AE akan membagi $\angle A$ atas tiga bagian yang sama (trisect), tunjukkan bahwa $AD = A$E dan berapakah panjangnya.
4. Buktikan bahwa teorema proyeksi pada segitiga lancip/ tumpul juga berlaku jika $\angle C$ adalah tumpul.
5. Buktikan teorema Stewart untuk $\angle A$ yang tumpul.
6. Buktikan nilai t_b dan t_c pada teorema 7.2.7
7. Pada ΔABC, buat titik D pada sisi AB sehingga $AD = ½\ DB$, Kemudian buat titik E pada AC sehingga AE = 3EC. Bila kedua garis BE dan CD berpotongan dititik F, hitunglah $CF : FD$ dan $BF : FE$.
8. Detilkan bukti teladan 7.3.1.
9. Jika $(A,B;P,Q)$ tunjukkan bahwa juga
   a. $(A,B;Q,P)$
   b. $(B,A;P,Q)$
   c. $(P,Q;A,B)$
10. Pada ΔABC, bisektor dari masing-masing titik sudut memotong sisi BC, CA dan AB di titik P, Q dan R. Jika P', Q' dan R' titik pada sisi CA, AB dan BC sehingga PP' / /BC, QQ' // CA dan RR' // AB, seperti gambar di bawah, tunjukkan

$$\frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'} + \frac{1}{RR'} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

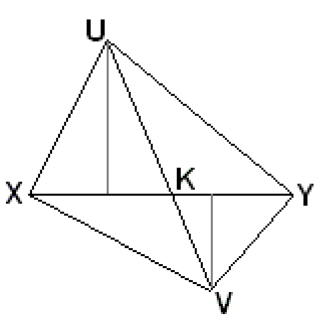


11. Diberikan ΔABC samasisi yang panjangnya 1 satuan, buat titik D, E dan F seperti gambar disebelah dengan $AF = BD = CE = r$, dengan $0 < r < 1$. Gunakan teorema Stewart's untuk menghitung panjang sisi $AD = BE = CF$



12. Jika K adalah titik potong dari XY dengan UV, tunjukkan bahwa

$$\frac{L\Delta UXY}{L\Delta VXY} = \frac{UK}{VK}$$



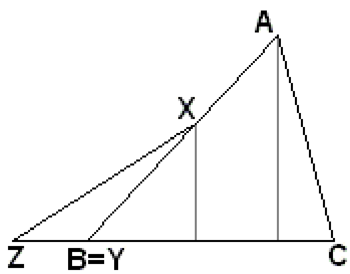
13. Jika pada ΔABC, $AC = 4$, $BC = 5$, bila CD garis bagi, AE garis berat. Bila luas $ADEC$ = 6.5 satuan, hitunglah $L\Delta BDE$

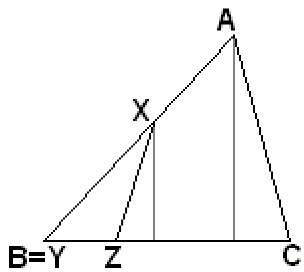
14. *) Diketahui ΔABC dengan titik O terletak di dalam segitiga, Jika K merupakan keliling legitiga, tunjukkan $\frac{1}{2} K < OA + OB + OC < K$

15. Perhatikan gambar di bawah ini. Diberikan ΔABC dan ΔXYZ, sehingga $\angle ABC = \angle BYZ$ atau $\angle ABC + \angle XYZ = 180^0$.

    Tunjukkan bahwa

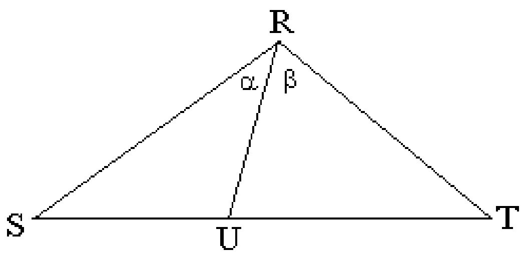
$$\frac{L\Delta ABC}{L\Delta XYZ} = \frac{AB}{BY} \cdot \frac{BC}{YZ}$$





16. Perhatikan gambar disebelah dan tunjukkan bahwa :

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{RU} = \frac{\sin \alpha}{RT} + \frac{\sin \beta}{RS}$$



17. Sudut A merupakan sudut tumpul pada ΔABC, bila dibuat garis tinggi AD dan BE. Buktikan bahwa

    $AC = \frac{DC \times BC}{EC}$ dan tunjukkan pula $\angle DEC = \angle B$

18. Pada ΔABC, AD dan BC merupakan garis tinggi yang berpotongan dititik T. gunakan teorema Stewart untuk menunjukkan $AD \times AT + BT \times BE = AB^2$.

19. jika ΔABC tumpul dan titik D titik tengah BC,

a. Buktikan bahwa salah satu keduanya dari ketaksamaan berikut ini benar

    $\angle BAD > \angle B$ atau $\angle DAC > \angle C$

b. Buktikan $AD < ½ BC$

20. *) Pada ΔABC titik D, E dan F masing-masing titik tengah sisi BC, AC dan AB, Jika K menyatakan keliling segitiga, buktikan bahwa

    $½ K < AD + BE + CF < K$

21. *) Jika diketahui ΔABC dengan sisi-sisi a, b dan c. Selidikilah apakah mungkin membuat segitiga yang panjang sisinya adalah
    a. $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, dan $\sqrt{c}$,
    b. a^2 , b^2 dan c^2.

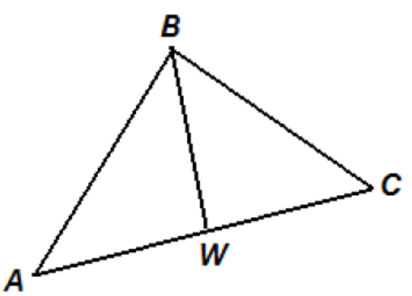
22. *) Pada ΔABC, titik E dan D masing-masing berada pada ruas garis AC dan BC. Jika pada $\angle CAD$ dibuat garis bagi AF dan pada $\angle CBE$ dibuat garis bagi BF. Buktikan bahwa

    $$\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB$$

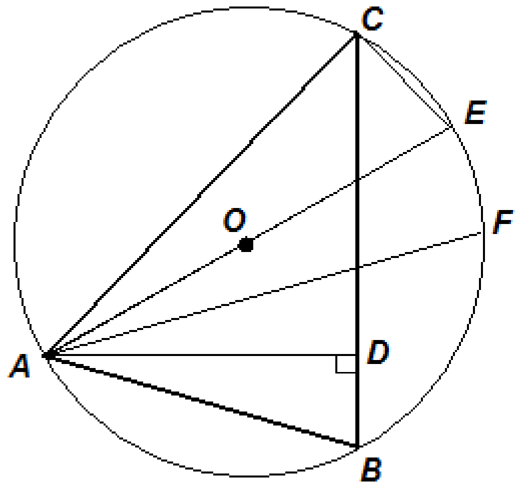
23. *) Diketahui ΔABC dan titik D terletak pada AC sehingga $AB = AD$. Jika diketahui pula $\angle ABC - \angle ACB = 30^0$. Berapakah $\angle BCD$

24. Ini adalah bentuk lain dari teorema Stewart's. Diberikan sebarang ΔABC, dengan BW adalah bisektor $\angle B$, misalkan $\beta = \angle ABC$. Tunjukkan berlaku

    $$BW = \frac{2\,AB.BC}{AB+BC}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$



25. *). Perhatikan ΔABC dengan O adalah titik pusat lingkaran luarnya. Jika AF adalah bisektor dari $\angle BAC$, dan AE adalah diagonal, maka AE adalah bisektor dari $\angle CAF$.



26. *)Diketahui trapezium $ABCD$ dengan AB = 44 cm, BC = 25 cm, CD = 16 cm dan AD = 17 cm. hitunglah
    a. Panjang diagonal AC
    b. Panjang diagonal BD
    c. Hitunglah Luas trapezium tersebut
27. **) diketahui sebuah segitiga lancip dan dan misalkan $A'B'C'$ ditentukan dengan cara berikut : Titik A' adalah titik ptotong antara garis tinggi dari A terhadap sisi BC dengan setengah lingkaran kea rah luar segitiga yang digambarkan dengan sisi BC sebagai garis tengah. Titik B' dan C' ditentukan dengan cara yang serupa. Buktikan bahwa

$$(L\Delta BCA')^2 + (L\Delta CAB')^2 + (L\Delta ABC')^2 = (L\Delta BCA)^2$$

28. **) Diketahui segiempat $ABCD$ dan P, Q masing-masing adalah titik tengah CD dan AB. Garis AP berptongan dengan DQ di X. Garis BP berpotongan dengan CQ di Y. Buktikan bahwa

$$L\Delta\ ADX + L\Delta BCY = \text{Luas } PXQY$$

29. *) Gunakan teorema Stewart's untuk membuktikan bahwa panjang garis bagi dari titik A pada ΔABC, dengan panjang sisi a, b dan c adalah

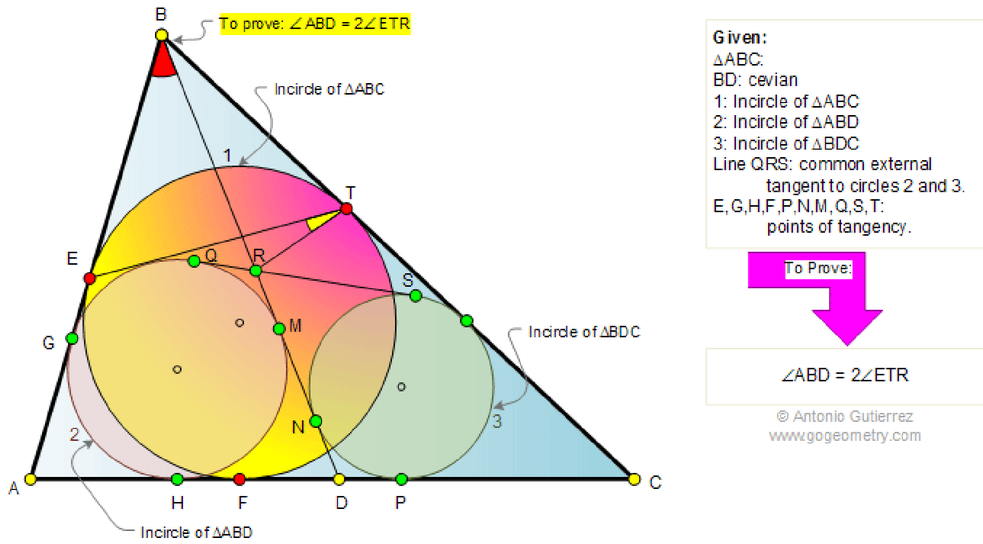
$$w_a^2 = bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$$

30. *). Tunjukkan juga bahwa $w_a^2 = \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}$ denan s = ½ (a + b + c)

BAB VIII

Kongkurensi dan Kelinearan

Berbagai persoalan dalam berbagai disiplin ilmu yang memerlukan eksistensi (kewujudan) dari perpotongan beberapa buah garis, yang di dalam geometri geometri dikenal dengan nama kongkurensi beberapa buah garis lurus. Secara aljabar, kadang kala eksistensinya ini sulit kita tunjukkan, akan tetapi dengan menggunakan berbagai konsep geometri hal ini bisa dengan mudah kita tunjukkan.


B
To prove: ∠ABD = 2∠ETR
Incircle of ΔABC
1
T
E
Q
R
S
G
M
Incircle of ΔBDC
N
3
2
A
H
F
D
P
C
Incircle of ΔABD
Given:
ΔABC:
BD: cevian
1: Incircle of ΔABC
2: Incircle of ΔABD
3: Incircle of ΔBDC
Line QRS: common external tangent to circles 2 and 3.
E,G,H,F,P,N,M,Q,S,T: points of tangency.
To Prove:
∠ABD = 2∠ETR
© Antonio Gutierrez
www.gogeometry.com

BAB VIII

Kongkurensi dan Kelinearan

8.1. *Teorema Ceva*

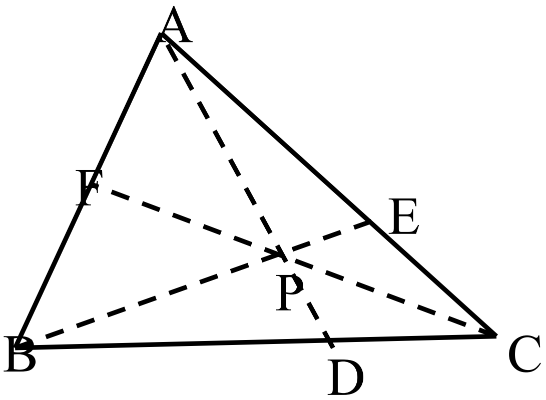
Memang ada cara lain yang dapat digunakan untuk menunjukkan beberapa garis berpotongan pada satu titik. Akan tetapi teorema Ceva dan teorema merupakan cara terbaik untuk menunjukkan eksistensi kolinearitas (tiga garis yang berpotongan di satu titik) dari bebarapa buah garis lurus. Karena kemudahannya ini maka teorema Ceva banyak digunakan termasuk untuk membuktikan kolilnearitas dari segienam talibusur serta berbagai penggunaan lainnya.

***Teorema* 8.1.1. (*Teorema Ceva*).**

JIka D, E dan F masing-masing adalah titik pada sisi BC, CA dan AB pada segitiga ABC. Maka garis AD, BE dan CF adalah kongkuren (bertemu di satu titik) jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Bukti : $\Rightarrow$. Misalkan ketiga garis AD, BE dan CF kongkuren (bertemu disatu titi), katakan titik P. Misalkan pula $L\Delta AB$C menyatakan luas segitiga **ABC**, maka berlaku



$$\frac{AF}{FB} = \frac{L\Delta ACF}{L\Delta FCB} = \frac{L\Delta APF}{L\Delta FPB}$$

$$= \frac{L\Delta ACF - L\Delta APF}{L\Delta FCB - L\Delta FPB}$$

$$= \frac{L\Delta APC}{L\Delta BPC}$$

Gambar 8.1.1

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\frac{BD}{DC} = \frac{L\Delta BPA}{L\Delta CPA} \text{ dan}$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{L\Delta CPB}{L\Delta APB}$$

Jadi

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{PCE}{EA} = \frac{L\Delta APC}{L\Delta BPC} \cdot \frac{L\Delta BPA}{L\Delta CPA} \cdot \frac{L\Delta CPB}{L\Delta APB} = 1$$

$\Leftarrow$ Untuk membuktikan sebaliknya misalkan hasil kali perbandingan ketiga garis bernilai 1, akan ditunjukkan bahwa ketiga garis bertemu di suatu titik. Untuk itu misalkan *AD* dan *BE* berpotongan di titik *P*, selanjutnya buat garis *CP* dan perpanjang sehingga memotong garis *AB*, katakan titik potongnya adalah *F′*, berdasarkan hipotesis maka berlaku

$$\frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Jadi

$$\frac{AF'}{F'B} = \frac{DC}{BD} \cdot \frac{EA}{CE} = \frac{AF}{FB}$$

Kesamaan di atas mengatakan $F = F'$. Jadi ketiga garis tersebut bertemu pada satu titik.♥

Salah satu persoalan yang sering mengganjal dalam garis bagi atau bisektor sudut-sudut pada suatu segitiga adalah, bagaimana menunjukkan bahwa ketiga bisektor perpotongan pada suatu titik. Dengan menggunakan teorema Ceva hal itu dapat ditunjukkan dengan mudah.

Pada segitiga *AB*C misalkan *AX*, *BY* dan *CY* masing-masing adalah bisektor dari $\angle$CAB, $\angle$*AB*C dan $\angle BCA$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *AX*, *BY* dan *CZ* adalah kongkuren dan titik konkurensinya ini disebut dengan incenter. Ingat bahwa incenter ini merupakan titik pusat jari-jari lingkaran dalam. Sebelum membuktikan konkurensi di atas, terlebih dahulu dibuktikan teorema bisektor sudut.

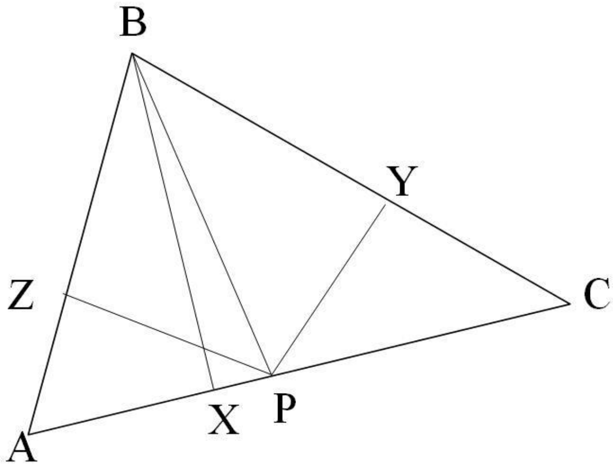
***Teorema* 8.1.2. *Teorema bisektor sudut*.**

Diberikan segitiga *AB*C , jika *BP* adalah bisektor sudut *B*, maka berlaku

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PC} \Leftrightarrow \angle ABP = \angle PBC.$$

Bukti : $\Rightarrow$ Buat garis tinggi dari titik *P* ke sisi *AB* dan *BC* katakan titik *Z* dan *Y*. seperti pada gambar 8.1.2a kemudian buat garis tinggi dari titik *B* ke sisi *AC* dan katakan titik *X*. selanjutnya dari $\Delta PZB \cong \Delta PYB$ diperoleh $PZ = PY$ (mengapa ?). kemudian dari $\Delta ABX \cong \Delta APZ$ diperoleh

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BX}{PZ} = \frac{BX}{PY}$$



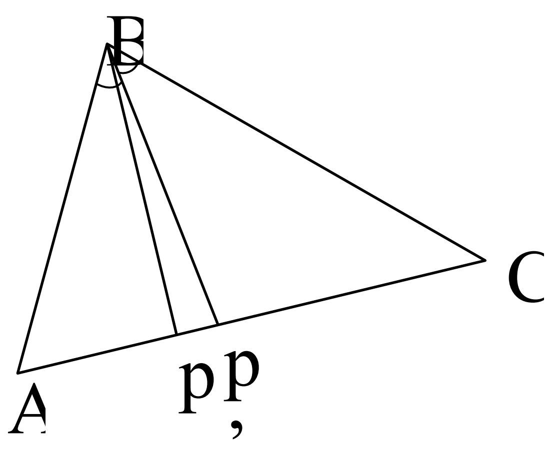
Gambar 8.1.2a

Juga $\Delta CBX \cong \Delta CPY$, maka $\frac{CB}{CP} = \frac{BX}{PY}$. Selanjutnya

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AP \cdot BX}{PY} \cdot \frac{PY}{CP \cdot BX} = \frac{AP}{CP}.$$

$\Leftarrow$ Misalkan $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PC}$, Misalkan P′ bisektor dari $\angle B$, dari premis maka haruslah berlaku

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AP'}{P'C} \Rightarrow P = P'.$$



gambar 8.1.2b

***Teorema* 8.1.3.**: Ketiga bisektor sudut pada Δ *ABC* berpotongan pada satu titik.

Bukti : Dengan menggunakan teorema bisektor sudut (teorema 8.1.2) maka diperoleh

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AY}{YC},\frac{BC}{CA}=\frac{BZ}{ZA},\frac{AB}{AC}=\frac{BX}{XC};$$

Selanjutnya

$$\frac{AZ}{BZ}\times\frac{BX}{XC}\times\frac{CY}{YA}=\frac{CA}{BC}\times\frac{AB}{AC}\times\frac{BC}{AB}=1.$$

Kemudian oleh teoreme Ceva ini bermakna ketiga garis tersebut berpotongan pada satu titik. ♥

Untuk segitiga *AB*C, bila *AX* menjadi bisektor *B*C (garis di sekolah menengah mungkin dikenal dengan istilah garis berat), maka *BX* = *XC*, sehingga bila *AX*, *BY* dan *CZ* masing-masing adalah garis berat pada segitiga *ABC*, maka jelas berlaku

$$\frac{AZ}{ZB}.\frac{BX}{XC}.\frac{CY}{YA}=1$$

Selanjutnya misalkan *P* adalah titik pusat lingkaran dalamnya, perhatikan segitiga *ACX* dengan titik *B*, *P* dan *Y*, maka berlaku

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YZ}=1\times1\times1=1$$

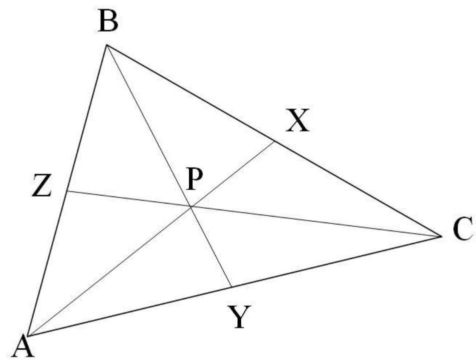
Maka

$$1 = \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CB}{BX} \cdot \frac{XP}{PA} \Rightarrow$$

$$1 = 1 \cdot 2 \cdot \frac{XP}{PA} \Rightarrow \frac{XP}{PA} = \frac{1}{2}$$

Jadi bila P titik pusat lingkaran dalam, maka berlaku

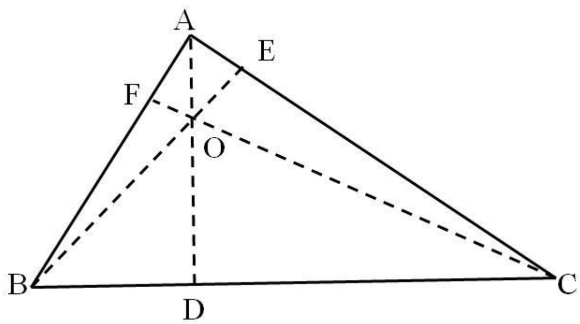
$$\frac{AP}{PX} = \frac{BP}{PY} = \frac{CP}{PZ} = \frac{1}{2}$$



Gambar 8.1.4

Berikut ini, juga dengan menggunakan teorema Ceva akan titunjukkan bahwa garis tinggi (yang melahirkan orthocenter) juga berpotongan pada satu titik.

***Corollary* 8.1.1**. Dalam sebarang segitiga, maka garis tinggi berpotongan pada satu titik



Gambar 8.1.5

Bukti : Perhatikan bahwa $\Delta ACD \sim \Delta BCE$, sehingga diperoleh

$$\frac{CE}{DC} = \frac{BE}{AD}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\frac{AF}{EA} = \frac{CF}{BE}$$

dan

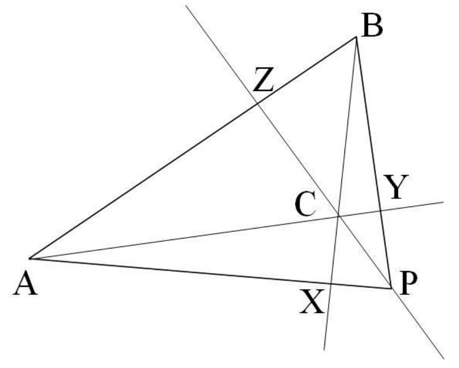
$$\frac{BD}{FB} = \frac{AD}{CF}$$

Sehingga

$$\frac{AF}{FB} . \frac{BD}{DC} . \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{EA} . \frac{BD}{FB} . \frac{CE}{DC} = \frac{CF}{BE} . \frac{AD}{CF} . \frac{BE}{AD} = 1$$

Karena persamaan bernilai satu, maka menurut teorema Ceva ketiga garis tinggi juga bertemu pada satu titik. Kita tau bahwa tidak selalu titik orthocenter ini berada di dalam segitiga, perhatikan gambaru 8.1.6, sebagai latihan penulis dapat membuktikan bahwa ketiga garis tingginya juga berpotongan disatu titik.

Bukti teorema ceva ini sangat banyak, cara di atas dengan menggunakan konsep luas daerah hanyalah salah saatu cara pembuktiannya. Berikut ini akan diberikan cara pembuktian lain yaitu dengan menggunakan konsep trigonometri.



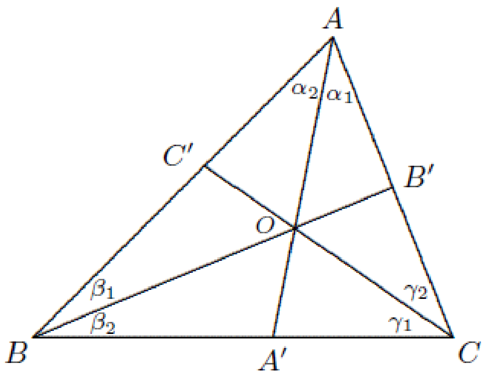
Gambar 8.1.6

Misalkan

$\angle CAA' = \alpha_1$, $\angle A'AB = \alpha_2$,

$\angle ABB' = \beta_1$, $\angle B'BC = \beta_2$,

$\angle BCC' = \gamma_1$ dan $\angle C'\mathbf{C}A = \gamma_2$.



Gambar 8.1.7

Maka

$$\sin\alpha_1 = A'C.\frac{\sin C}{AA'}$$

$$\sin\alpha_2 = BA'.\frac{\sin B}{AA'}$$

Jadi

$$\frac{\sin\ \alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{BA'\sin B}{A'C\sin C}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\frac{\sin\ \beta_2}{\sin\beta_1} = \frac{CB'\sin C}{B'A\sin A}$$

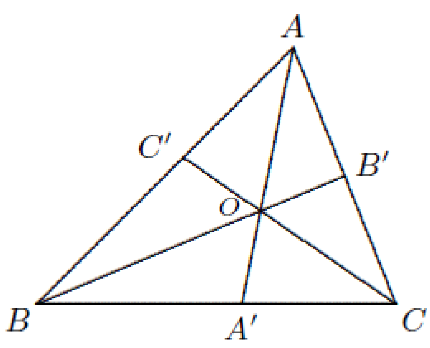
$$\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = \frac{AC'\sin C}{C'B\sin B}$$

Maka berdasarkan teorema Ceva AA', BB' dan CC' berpotongan disatu titik jika dan hanya jika

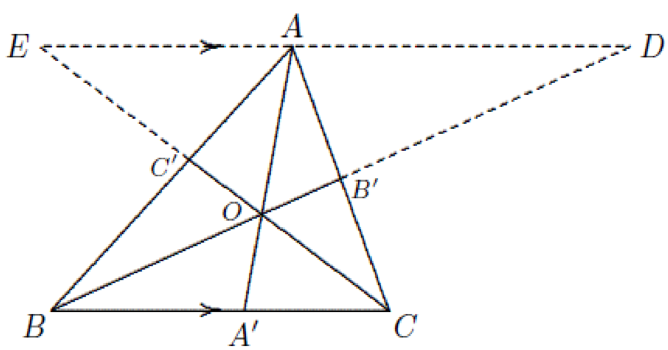
$$\frac{\sin\ \alpha_2}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{\sin\ \beta_2}{\sin\beta_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = 1$$

Jika anda sangat memahami konsep kesebangunan dalam segitiga, maka konsep kesebangunan ini juga dapat anda gunakan untuk membuktikan teorema Ceva tersebut. Coba perhatikan gambar 8.1.8a. jika pada gambar 8.1.8a tersebut buat garis melalui titik *A* yang sejajar dengan *BC*, Kemudian perpanjang sisi BB′ dan *CC*′ sehingga memotong garis yang melalui *A* tadi ti titik *D* dan *E* seperti pada gambar 8.1.8b

.



gambar 8.1.8a



gambar 8.1.8b

Maka dapat ditunjukkan bahwa

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{BC'}{AD}, \qquad \frac{AC'}{C'B} = \frac{EA}{BC}$$

Karena

$$\frac{BA'}{AD} = \frac{A'O}{OA} = \frac{A'C}{EA}$$

diperoleh

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AD}{EA}$$

Maka

$$\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A}.\frac{AC'}{C'B} = \frac{AD}{EA}.\frac{BC}{AD}.\frac{EA}{BC} = 1$$

Sebaliknya misalkan berlaku

$$\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A}.\frac{AC'}{C'B} = 1 \qquad (8.1.2)$$

Misalkan pula A', B' dan C' masing-masing berada pada sisi *B*C, *AC* dan *AB* (untuk kasus lain dapat dibuktikan dengan cara yang sama), selanjutnya misalkan BB', CC' berptongan di titik *O*, hubungkan *AO*, katakan bertemu dititik A'' , akan ditunjukkan $A' = A''$, dari premis tentunya berlaku

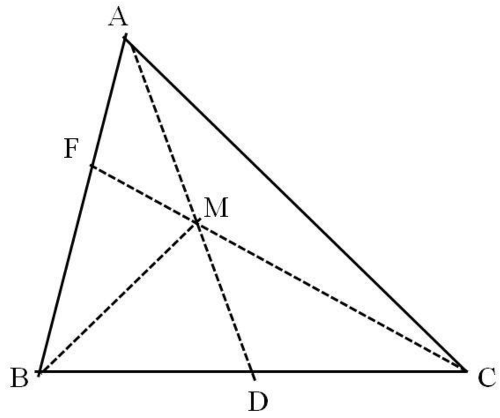
$$\frac{BA''}{A''C}.\frac{CB'}{B'A}.\frac{AC'}{C'B} = 1 \qquad (8.1.3)$$

Maka dari persamaan (8.1.2) dan (8.1.3) akan diperoleh $A' = A''$.

Berikut ini akan diberikan bentuk lain dari akibat teorema ceva. Akan tetapi dalam hal ini pembuktiannya akan diberikan dengan menggunakan konsep luas, diharapkan kepada pembaca untuk membuktikannya dengan menggunakan teorema Ceva (sebagai latihan).

***Teorema* 8.1.4:** Suatu garis dari titik C pada ΔABC memotong garis berat dari titik A dengan sama panjang. Buktikan garis tersebut membagi ABF dengan perbandingan 1 : 2.

Bukti : Perhatikan gambar 8.1.9, misalkan AD garis berat dan CF memotong AD menjadi dua bagian garis yang sama panjang.



gambar 8.1.9

$$L\Delta ABD = L\Delta ADC$$

$$= \tfrac{1}{2}\, L\Delta ABC$$

Kemudian, karena M adalah titik tengah garis AD, maka

$$L\Delta AMC = L\Delta CND$$

$$= \tfrac{1}{2}\, L\Delta ADC$$

$$= \tfrac{1}{4}\, L\Delta ABC$$

Sekali lagi, karena M titik tengah garis AD, maka

$$L\Delta BMD = L\Delta BMA$$

$$= \tfrac{1}{2}\, L\Delta BDA$$

$$= \tfrac{1}{4}\, L\Delta ABC$$

Karena

$$L\Delta BCM = L\Delta BDM + L\Delta CMO$$

$$= \tfrac{1}{4}\, L\Delta ABC + \tfrac{1}{4}\, L\Delta ABC$$

$$= \tfrac{1}{2}\, L\Delta ABC$$

Tetapi

$$\frac{AF}{BF} = \frac{L\Delta ACF}{L\Delta BCF} = \frac{L\Delta AMF}{L\Delta BMF}$$

Oleh karena itu

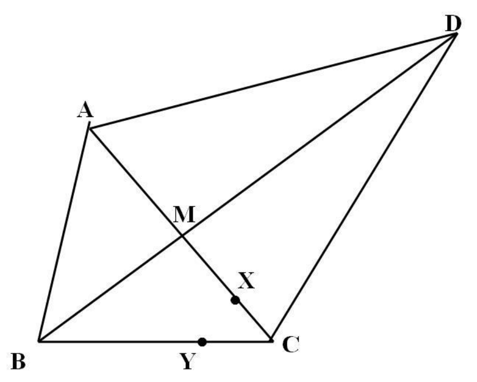
$$\frac{AF}{BF} = \frac{L\Delta ACF - L\Delta AMF}{L\Delta BCF - L\Delta BMF}$$

$$\frac{AF}{BF} = \frac{L\Delta ACM}{L\Delta BCM}$$

$$\frac{AF}{BF} = \frac{\frac{1}{4}L\Delta ABC}{\frac{1}{2}L\Delta ABC} = \frac{1}{2}$$

Jadi *AF* : *BF* = 1 : 2

***Teladan* 8.1.2** : Pada segiempat *ABCD*, diagonal *AC* dan *BD* berpotongan di titik *M*, sehingga *AM* = *MC* dan *DM* = 2*MB*, misalkan titik *X* dan *Y* pada sisi *MC* dan *BC* sehingga *D*, *X* dan *Y* segaris



gambar 8.1.10

Penyelesaian : karena DM = 2 MB maka diperoleh

$$\frac{DM}{BD} = \frac{DM}{BM+MD} = \frac{2MB}{3MB} = \frac{2}{3}$$

Karena AM = MC, maka

$$\frac{CX}{MX} = \frac{CM-XM}{XM} = \frac{CM}{XM} - \frac{XM}{XM} = \frac{1}{2}\left(\frac{AC}{XM}\right) - 1 = \frac{1}{2}.3 - 1 = \frac{1}{3}$$

Selanjutnya perhatikan segitiga *MB*C dengan titik *D*, *X* dan *Y*. maka diperoleh

$$\frac{BY}{YC} \cdot \frac{CX}{XM} \cdot \frac{MD}{DB} = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 1$$

Ini bermakna bahwa ketiga titik D, X dan Y adalah segaris

Teladan 8.1.3 : Perhatikan segiempat *ACGE* dengan *H* adalah titik potong *AC* dan *GE*, garis *AE* dan *CG* bertemu di *I* sedangkan garis *AC* dan *EG* bertemu di *D*. Misalkan *B* titik potong *IH* dan *AC* seperti pada gambar disebelah. Buktikan bahwa

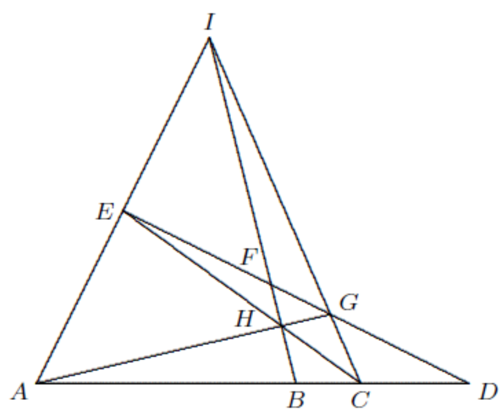
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

Penyelesaian : ***Cara I***. Perhatikan Δ *ACI*, Δ*AE*C dan Δ*CEI*, maka dengan menggunakan teorema Menelaus akan diperoleh

$$\frac{CD}{DA} \cdot \frac{AE}{EI} \cdot \frac{IG}{GC} = 1,$$

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CH}{HE} \cdot \frac{EI}{IA} = 1,$$

$$\frac{CG}{GI} \cdot \frac{IA}{AE} \cdot \frac{EH}{HC} = 1,$$



gambar 8.1.11

Bila ketiga persamaan di atas dikalikan maka akan diperoleh

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

Cara II. Gunakan teorema Ceva pada Δ*AC*I, maka diperoleh

$$\frac{IE}{EA} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CG}{GI} = 1$$

Kemudian pada ΔACI gunakan teorema Menelaus, dengan garis transversalnya adalah *EGD*, maka diperoleh.

$$\frac{AD}{DC}.\frac{CG}{GI}.\frac{IE}{EA} = 1$$

Maka dapat ditunjukkan

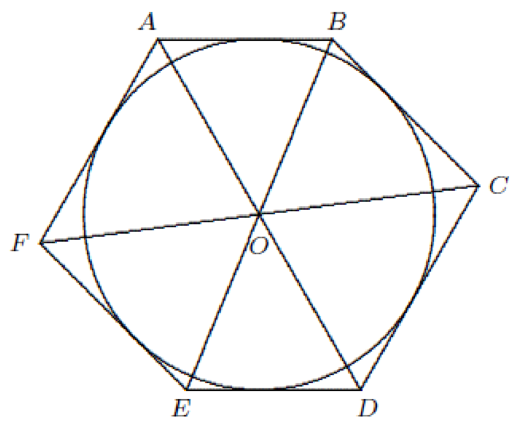
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

8.2. *Teorema Brianchon*

Kalau teorema Pascal merupakan eksistensi kolinearitas dari titik potong enam titik pada lingkaran, maka berikut ini sebagai perluasan dari teorema pascal yang berupa eksistensi kongkurensi dari diagonal segienam yang berada pada suatu lingkaran yang dikenal dengan teorema Brianchon berikut ini.

Teorema* 8.2.1 *(Teorema Brianchon) : Jika semua sisi dari suatu segienam menyinggung sebuat lingkaran, maka ketiga diagonalnya adalah kongkuren (atau mungkin juga sejajar).

Bukti : Perhatikan gambar 8.2.1. Misalkan *A*, *B*, *C*, *D*, *E* dan *F* adalah titik sudut dari segienam tersebut dan misalkan pula *R*, *Q*, *T*, *S*, *P* dan *U* masing-masing adalah titik singgung dari sisi *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* dan *FA* terhadap lingkaran tersebut (perhatikan gambar 8.2.2). tanpa mengurangi perumuman kita misalkan segienam tersebut konvek. Dengan diagonal *AD*, *BE* dan *CF* yang kesemuanya



Gambar 8.2.1

tidak sejajar.

Perpanjang garis FE, BC, BA, DE, DC dan FA dan membentuk titik P', Q', R', S', T' dan U' sehingga

$$PP' = QQ' = RR' = SS' = TT' = UU'$$

Selanjutnya bentuk lingkaran I yang menyinggung PP' dan QQ' di titik P' dan Q', lingkaran II yang menyinggung RR' dan SS' dititik R' dan S', lingkaran III yang menyinggung TT' dan UU' dititik T' dan U' seperti pada gambaru 8.2.2

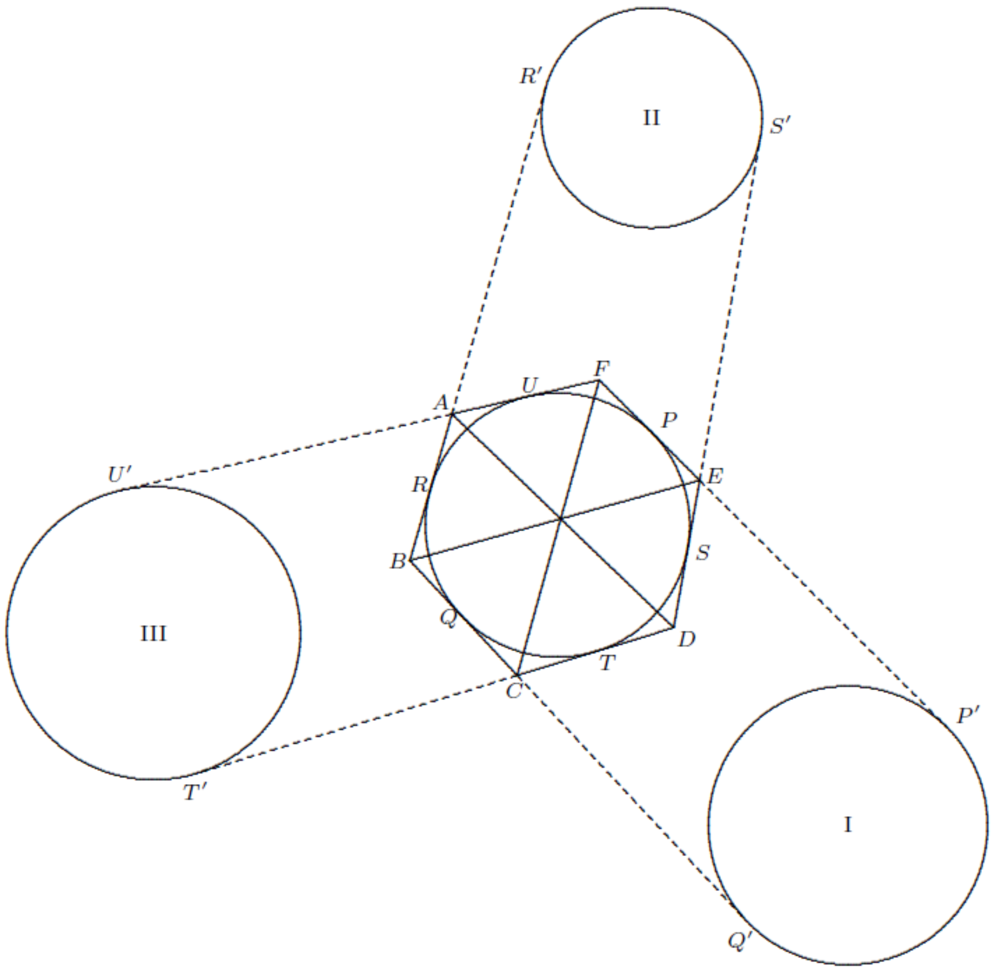
Perhatikan bahwa

$$AU' = UU' - AU = RR' - AR = AR'$$

dan

$$DT' = DT -+ TT' = DS + SS' = \mathrm{DS}'$$

Yang mana A dan D menpunyai kuasa yang sama terhadap lingkaran ke II dank e III, jadi AD merupakan sumbu radikal dari lingkaran I dan III, akibatnya AD, BE dan CF kongkuren.

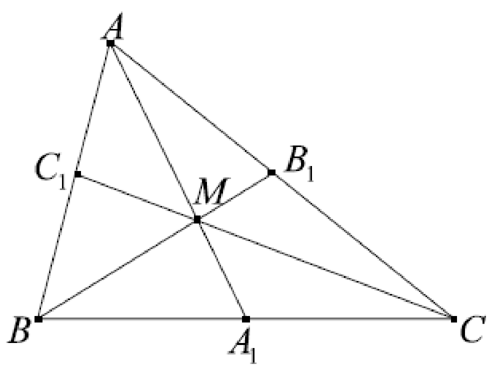


Gambar 8.2.2

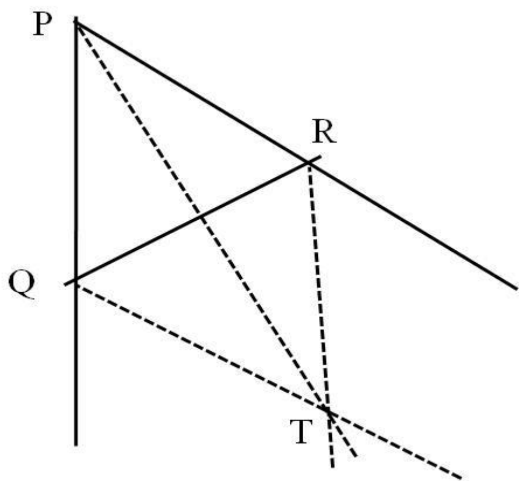
***Soal Latihan* 15**.

1. Buktikan teorema 8.1.4 dengan menggunakan teorema Ceva
2. Gunakan Rumus Trigonometri untuk membuktikan teorema Ceva
3. Dengan menggunakan bukti teorema Ceva versi trigonometri, buktikan bahwa garis tinggi suatu segitiga berpotongan disatu titik.
4. Hal yang sama seperti soal nomor 3 akan tetapi untuk garis berat.
5. Tunjukkan bahwa circumcenter berpotongan disatu titik.
6. Misal pada ΔABC panjang sisinya adalah a, b dan c. I adalah incenter, jika D, E, F masing-masing titik potong dari titik sudut ke sisi dihadapannya yang melalui incenter. Tunjukan berlaku $\frac{b+c}{a} = \frac{IA}{ID}$
7. Dalam sebuah ΔABC, buat titik A_1, B_1 dan C_1 masing-masing pada sisi BC, AV dan AB sehinga AA_1, BB_1 dan CC_1 kongkuren. Tunjukkan bahwa berlaku

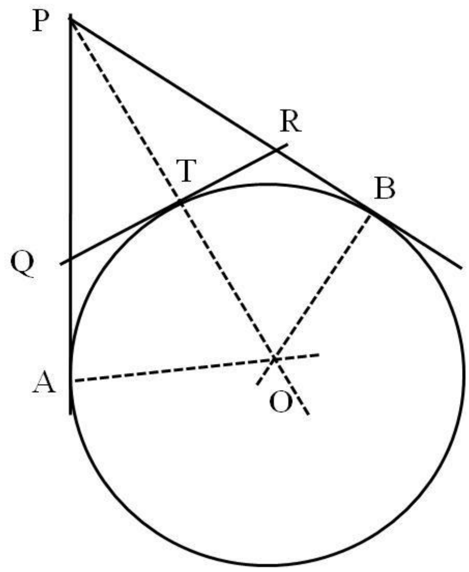
$$\left|\frac{MA}{MA_1}\right| = \left|\frac{C_1A}{C_1B} + \left|\frac{B_1A}{B_1C}\right|\right|$$



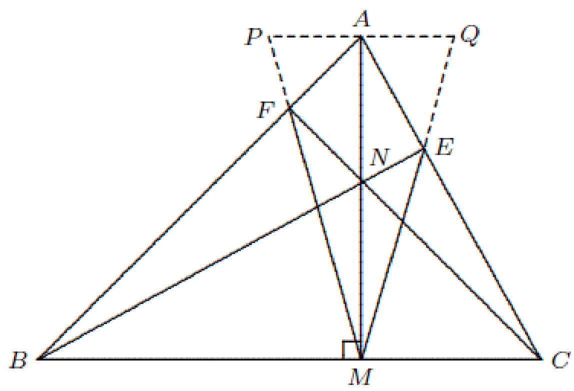
8. Perhatikan gambar disebelah, PT adalah bisektor $\angle P$ sedangkan QT dan RT adalah bisektor sudut luar dari Q dan R. tunjukkan bahwa PT, QT dan RT berpotongan disatu titik



9. Pada gambar disebelah, lingkarannya adalah lingkaran luar dari ΔPQR, gunakan teorema ceva untuk menunjukkan bahwa *PO*, *AO* dan *BO* berpotongan di satu titik.

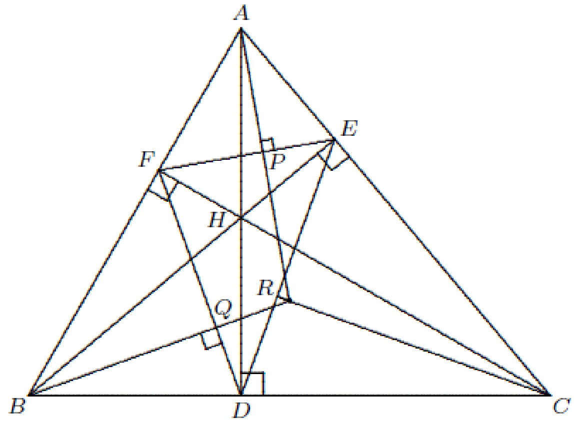


10. Pada ΔABC, jika *AX*, *BY* dan *CZ* berpotongan di titip *P*, Jika *AX* adalah garis bagi $\angle A$ dan $BX.\ CY = XC.\ BZ$. Tunjukkan bahwa ΔABC sama kaki.
11. Pada ΔABC, jika *AX*, *BY* dan *CZ* masing-masing adalah garis bagi dari segitiga tersebut yang berpotongan di titik *P*. Jika $BP\ .\ ZP = BZ.\ AP$. Tunjukkan bahwa *ABC* adalah segitiga siku-siku.
12. Perhatikan gambar di bawah ini, *AM* adalah garis tinggi dari titik *A*, dan *N* adalah sebarang titik pada *AN*, kemudian buat garis *BN* memotong *AC* di *E* dan *CN* yang memotong *AB* di F, Tunjukkan bahwa $\angle EMN = \angle FMN$



Petunjuk : perpanjan garis *ME* dan *MF* dan buat garis dari titik *A* yang sejajar dengan *BC* sehingga memotong perpanjangan garis *ME* dan *MF* tadi.

13. *). Perhatikan gambar disebelah, *AD*, *BE* dan *CF* adalah garis tinggi. Buktikan bahwa garis yang tegak lurus dari *A* ke *EF*, garis yang tegak lurus dari *B* ke DF dan garis yang tegak lurus dari *C* ke *DE*, ketiganya berpotongan di satu titik. ***Petunjuk*** : gunakan bukti Ceva secara trigonometri



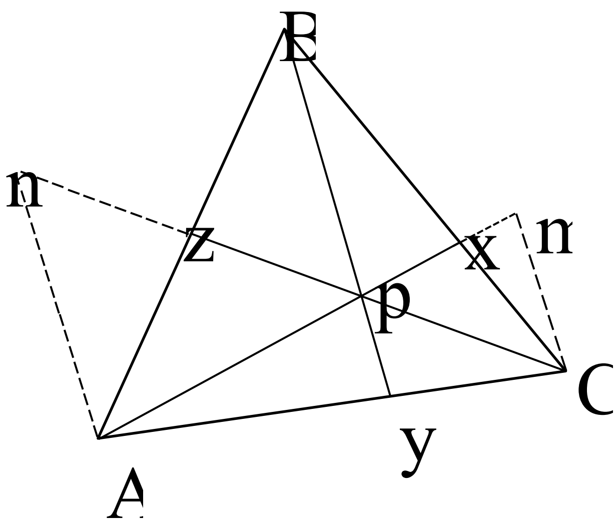
14. Misalkan *ABCD* adalah suatu trapezium yang *AB* // *CD*, jika *M* dan *N* adalah titik tengah dari *AB* dan *CD*, buktikan bahwa *MN*, *AC* dan *BD* adalah kongkuren.

15. *) Ini merupakan bentuk lain dari teorema Ceva. Perhatikan gambar disebelah, *AX*, *BY* dan *CZ* berpotongan di titik *P*, buat garis *AN* dan *CN* yang sejajar dengan *YB*, tunjukkan bahwa berlaku

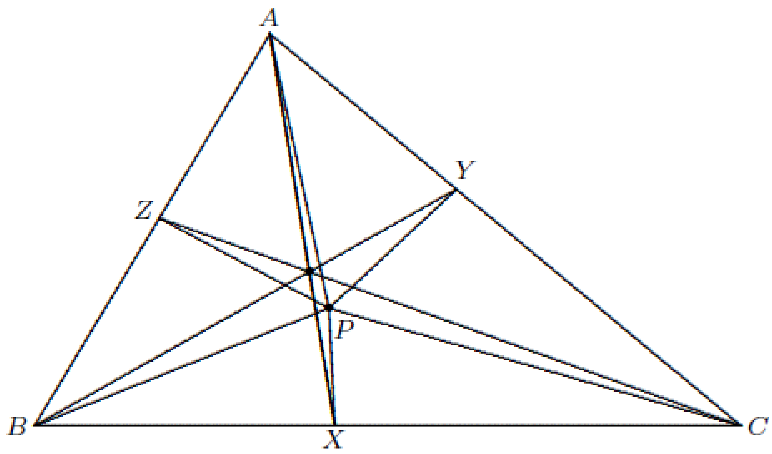
$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$

Pentunjuk : gunakan

$$\frac{AY}{YC}=\frac{AN}{CM},\frac{CX}{XB}=\frac{CM}{BP},\frac{BZ}{ZA}=\frac{BP}{AN}$$



16. Perhatikan gambar di bawah ini, misalkan titik P berada dalam ΔABC, kemudian bisektor dari $\angle BP$C, $\angle CP$A dan $\angle APB$ memotong sisi BC, CA dan AB masing-masing di titik X, Y dan Z, tunjukkan bahwa AX, BY dan CY adalah kongkuren

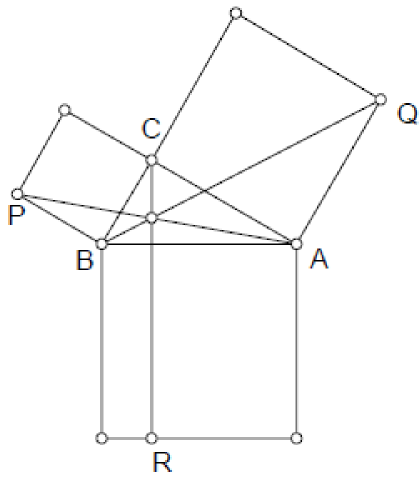


17. Gunakan teorema ceva untuk membuktikan perpendicular bisektor adalah konkuren
18. Bisakah anda justifikasi, apakah bisa digunakan teorema Ceva untuk menunjukkan eksistensi titik pusat lingkaran singgung luar.
19. Misalkan A_1. B_1 dan C_2 sebarang titik pada sisi BC, CA dan AB pada ΔABC, tunjukkan bahwa garis yang tegak lurus dari A_1, B_1 dan C_1 akan berpotongan di satu titik jika dan hanya jika

$$(BA_1)^2 - (A_1C)^2 + (CB_1)^2 - (B_1A)^2 + (AC_1)^2 - (C_1B)^2 = 0$$

Catatan : Kondisi ini di sebut dengan teorema Carnot. Dengan cara lain sudah dibuktikan pada bab 6.

20. Perhatikan gambar disebelah yaitu gambar yang sama seperti pembuktian teorema Pythagoras. ΔABC sikut-siku di C. Tunjukkan bahwa garis AP, BQ dan CR berpotongan di satu titik.



21. Pada sebuah ΔABC, misalkan AP adalah garis bagi $\angle A$, BQ adalah garis berat sisi AC dan CR adalah garis tinggi dari titik C ke garis AB. Periksalah apakah ketiga garis tersebut berpotongan disatu titik.

22. **). Hal yang sama seperti soal no 16, tunjukkan bahwa $\cos \angle A = \frac{c}{b+c}$.

23. Diberikan ΔABC, kontruksilah titik A', B' dan C' sehingga $\Delta ABC'$, $\Delta BCA'$ dan $\Delta CAB'$ adalah segitiga sama-kaki yang memenuhi $\angle BCA' = \angle CBA' = \angle A$, $\angle CAB' = \angle ACB' = \angle B$, $\angle ABC' = \angle BAC' = \angle C$, kemudian tunjukkan bahwa AA', BB' dan CC' adalah kongkuren.

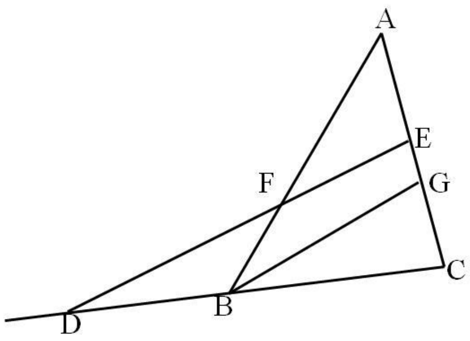
8.3. *Teorema Menelaus*

Kalau teorema Ceva memberikan syarat untuk tiga buah garis dari masing-masing titik sudut suatu segitiga bertemu pada suatu titik (konkuren), maka berikut ini akan diberikan syarat agar tiga buah titik yang berada pada sisi-sisi atau pada perpanjangan sisi-sisi suatu segitiga yang adalah segaris (colinear).

***Teorema* 8.3.1. (*Teorema Menelaus*).**

Jika titik D, E dan F masing-masing terletak ada sisi BC, CA dan AB pada ΔABC, Maka titik D, E dan F adalah segaris jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = -1$$



Gambar 8.3.1

Bukti : $\Rightarrow$ Misalkan ketiga titik D, E dan F adalah segaris, dan misalkan pula titik G pada AC sehingga DE sejajar dengan BG, maka diperoleh $\Delta AFE \sim \Delta\ ABG$ yang mengakibatkan

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EG}$$

Dan dari $\Delta BCG \sim \Delta\ DCE$, menghasilkan

$$\frac{BD}{DC} = \frac{GE}{EC}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = \frac{AE}{EG}\cdot\frac{GE}{EC}\cdot\frac{CE}{EA} = -1$$

$\Leftarrow$ Misalkan perbandingan hasilkali ketiganya bernilai -1, Misalkan pula perpotongan DE dengan AB adalah F', maka berdasarkan hipotesis diperoleh

$$\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = -1$$

Yang mengakibatkan

$$\frac{AF'}{F'B} = -\frac{DC}{BD}\cdot\frac{EA}{CE} = \frac{AF}{FB}$$

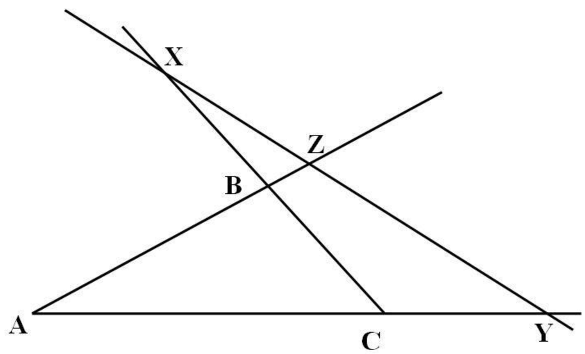
Ini mengatakan bahwa $F = F'$, jadi ketiga titik adalah segaris. ▼

Kalau teorema Menelaus adalah untuk menunjukkan kolinearitas dari dua titik yang berada pada penggal garis (sisi-sisi segitiga) dan satu titik lagi berada pada perpanjangan pengal garis dari sisi lainnya. Berikut ini akan ditunjukkan kewujudan kolinearitas dari tiga buah titik yang kesemuanya tidak berada pada penggal garis dari sisi-sisi segitiga tersebut, akan tetapi berada pada perpanjangan penggal garis tersebut. Teorema tentang ini sering juga disebut dengan teorema transversal Menelaus. Kondisi seperti ini yang nantinya juga dikembangkan pada kolinearitas pada lingkaran, elips dan lain sebagainya.

Teorema* 8.3.2. *Teorema Transversal Menelaus

Jika titik *X*, *Y* dan *Z* masing masing berada pada perpanjangan sisi *CB*, *AC* dan *AB*, maka *X*, *Y* dan Z adalah segari jika dan hanya jika

$$\frac{AZ}{ZB}.\frac{BX}{XC}.\frac{CY}{YA} = -1$$



gambar 8.3.2a

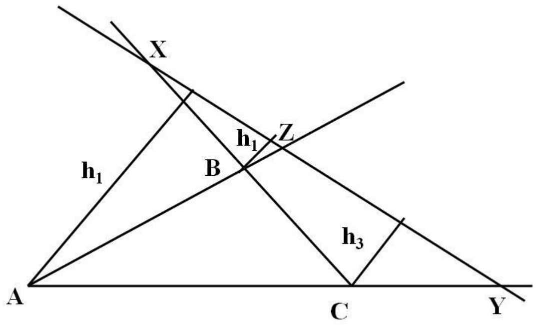
***Bukti* :** Buat masing-masing garis tegak lurus dari titik *A*, *B* dan *C* ke sisi *XZ* (perhatikan gambar 8.3.2a dan 8.3.2b) dan misalkan panjangnya berturut-turut adalah h_1, h_2 dan h_3. Maka dengan mudah anda akan dapat Menunjukkan bahwah

$$\frac{AZ}{ZB} = -\frac{h_1}{h_2}, \quad \frac{BX}{XC} = -\frac{h_2}{h_3} \quad \text{dan} \quad \frac{AY}{YC} = -\frac{h_1}{h_3}$$

Selanjutnya akan anda peroleh

$$\frac{AZ}{ZB} \times \frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} = -1$$

Untuk membuktikan sebaliknya persis sama dengan pembuktian teorema Menelaus.



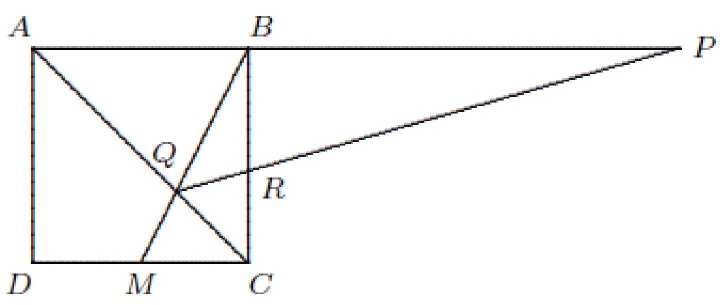
gambar 8.3.2b

***Teladan* 8.3.2**: Jika *ABCD* suatu persegi, perpanjang *AB* sampai di *P* sehingga *BP* = 2*AB*. Misalkan M titik tengah dari *CD* dan *Q* titik perpotongan antara *AC* dan *BM*. Tentukan posisi dari *R* pada *BC* sehingga *P*, *Q* dan *R* segaris.

Penyelesaian : dari *BP* = 2*AB*, maka *AP* : *PB* = 3 : -2, selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa $\Delta ABQ \sim \Delta CMQ$, sehingga *CQ* : *QA* = *CM* : *AB* = 1 : 2, maka berdasarkan teorema Menelaus terhadap segitiga *ABC*

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

Jadi *BR* : *RC* = 4 : 3

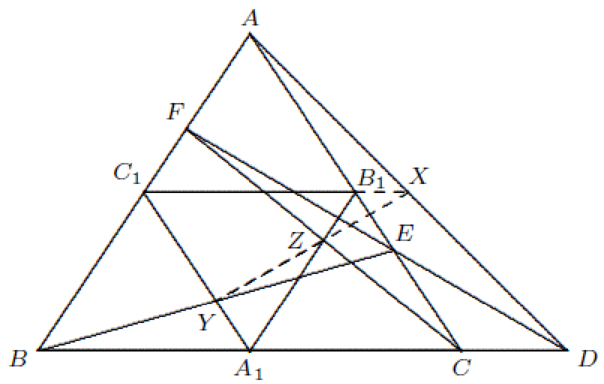


Gambar 8.3.3

8.4. *Konsekuensi Dari Teorema Ceva Dan Menelaus*

Penggunaan teorema ceva telah dibahas dalam subbab 8.1 dan 8.2, yang diantaranya untuk menunjukkan kongkurensi dari ketiga garis bagi, garis berat dan garis tinggi dari suatu segitiga. Sebenarnya sangat banyak sekali penggunaan teorema Ceva dan Menelaus ini. Berikut ini akan diberikan beberapa konsekuensi dari teorema Ceva dan Menelaus.

***Teorema* 8.4.1**..Jika D, E dan F masing-masing titik potong garis dari A, B dan C terhadap sisi-sisi ΔABC seperti pada gambar 8.4.1 di bawah. Jika X, Y dan Z masing-masing merupakan titik tengah dari sisi AD, BE dan CF, tunjukkan bahwa X, Y dan Z adalah segaris.



Gambar 8.4.1

Bukti : Misalkan A_1, B_1 dan C_1 masing-masing adalah titik tengah dari sisi BC. AC dan AB. Maka B_1C_1 sejajar dengan BC, dengan B_1. C_1 dan X adalah segaris, sehingga

$$\frac{BD}{DC} = \frac{C_1X}{XB_1}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\frac{CE}{EA} = \frac{A_1Y}{YC_1} \text{ dan } \frac{AF}{FB} = \frac{B_1Z}{ZA_1}$$

Selanjutnya berdasarkan teorema Menelaus terhadap ΔABC dengan garis DEF diperoleh

$$\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}.\frac{AF}{FB} = -1$$

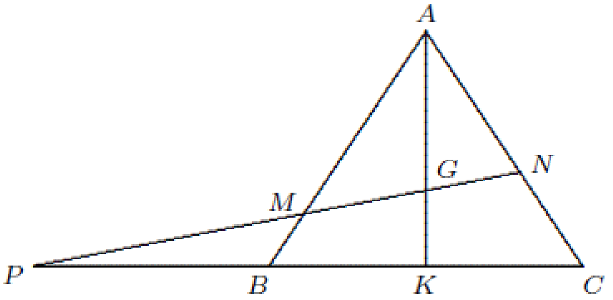
Lalu

$$\frac{C_1X}{XB_1}.\frac{B_1Z}{ZA_1}.\frac{A_1Y}{YC_1} = -1$$

Ini bermakna bahwa X, Y dan Z adalah segaris.

***Teorema* 8.4.2** : Misalkan G centroid dari ΔABC, Melalui G dibuat garis lurus yang memotong AB di B dan memotong AC di N. Tunjukkan bahwa

AM . NC + AN .MB = AM . AN



gambar 8.4.2

Bukti : Kita tau bahwa

$$\frac{NC}{AN} + \frac{MB}{AM} = 1$$

Jika seandainya MN sejajar dengan BC maka

$$\frac{NC}{AN} = \frac{MB}{AM} = \frac{GK}{AK} = \frac{1}{2}$$

Maka hasil lansung benar. Selanjutnya misalkan *MN* dan *BC* berpotongan di titik *P*. maka dengan teorema Menelaus untuk ΔAKB dengan garis *PMG* diperoleh

$$\frac{BP}{PK} \cdot \frac{KG}{GA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1 \quad \text{(dalam nilai mutlak)}$$

Apabila $\frac{KG}{GA} = \frac{1}{2}$, diperoleh

$$BP = \frac{2.MB.PK}{AM}$$

Dengan cara yang sama kita gunakan teorema Menelaus untuk ΔACK dengan garis *PGN*, maka akan diperoleh persamaaan

$$PC = \frac{2.CN.KP}{NA}$$

Karena *PC* - *P*K = *KC* = *BK* = *PK* – *PB*, jika disubsitusikan kedalam persamaan di atas, maka akan diperoleh *AM* . *NC* + *AN* .*M*B = *AM* . *AN*.

Suatu bangun bidang dikatakan konvek jika setiap dua titik dalam bidang tersebut dihubungkan, maka garis penghubunga kedua titik tersebut semuanya berada dalam bangun tersebut. Berikut ini diberikan penggunaan secara bersama teorema Ceva dan Menelaus untuk segi-empat konvek, yang mana hasilnya adalah dalam bentuk perbandingan sisi-sisinya.

***Teorema* 8.4.3** : Dalam segiempat konvek *ACG*E, Sisi *AG* berpotongan dengan *CE* di *H*, perpanjangan AE berpotongan dengan perpanjangan CG di I. Perpanjangan EG berpotongan dengan perpanjangan AC di D. dan garis IH berpotongan dengan EG di F dan dengan AD di B. Maka

i. $\frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC}$

ii. $\frac{EF}{FG} = -\frac{ED}{DG}$

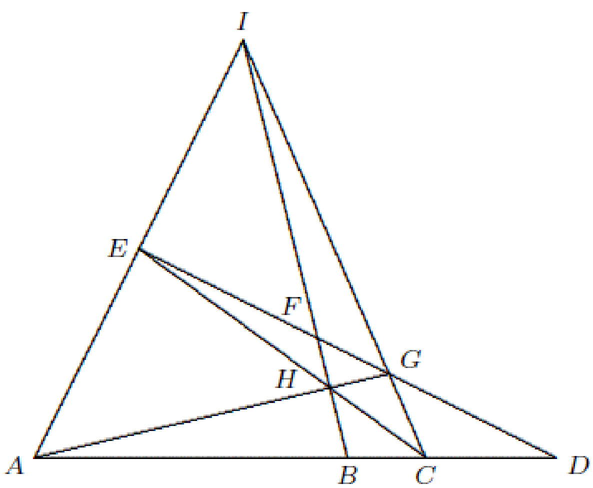
Dalam hal ini arah segmen garis digunakan

***Bukt**i* : (i). perhatikan gambar disebelah dan gunakan teorema Ceva untuk ΔACI, maka diperoleh

$$\frac{IE}{EA} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CG}{GI} = 1$$

Sedangkan kalau digunakan teorema Menelaus untuk ΔACI tersebut dengan garis *EGD* akan diperoleh

$$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CG}{GI} \cdot \frac{IE}{EA} = -1$$



Gambar 8.4.3

Maka

$$\frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC}$$

(ii). Gunakan teoema Ceva untuk ΔIEG, maka dipeoleh

$$\frac{IA}{AE} \cdot \frac{EF}{FG} \cdot \frac{GC}{CI} = 1$$

Kemudian gunakan teorema Menelaus untuk ΔIEG tersebut, maka diperoleh

$$\frac{ED}{DG}\cdot\frac{GC}{CI}\cdot\frac{IA}{AE}=-1$$

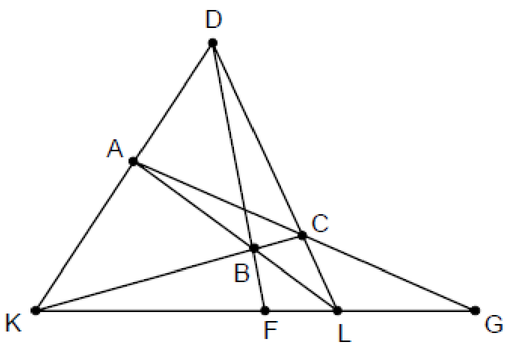
Maka

$$\frac{EF}{FG}=-\frac{ED}{DG}$$

Berikut ini diberikan bukti lain dari contoh di atas, akan tetapi arah segmen garis tidak digunakan (tentunya tanda pada kesamaan akan berobah). Pembuktian cukup digunakan hanya dengan menggunakan konsep luas saja. Hal ini sengaja diberikan dengan tunjuan untuk menunjukkan yang menjadi konten utama dalam buku ini yaitu menunjukkan bahwa banyak teorema dan persoalan dalam goemeti bisa diselesaikan dengan konsep yang cukup sederhana, seperti konsep luas, teorema Pythagoras dan lain konsep geoemetri sederhana lainnya yang sudah dikenal pada tingkat sekolah menengah.

***Teladan* 8.4.1** : Perhatikan gambar berikut, pada segiempat convek *ABCD*, garis *D*A dan *CB* berpotongan di *K*, garis *AB* dan *DC* berpotongan di *L*, garis *AC* dan *KL* berpotongan di *G*, garis *DB* dan *KL* berpotongan di *F*. buktikan

$$\frac{KF}{FL}=\frac{KG}{GL}$$



gambar 8.4.4

Penyelesaian : perhatikan bahwa

$$\frac{KF}{FL}=\frac{L\Delta KBD}{L\Delta LBD}=\frac{L\Delta KBD}{L\Delta KBL}\times\frac{L\Delta KBL}{L\Delta LBD}$$

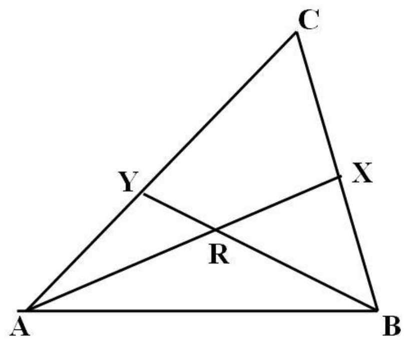
$$= \frac{CD}{CL} \times \frac{AK}{AD}$$

$$= \frac{L\Delta ACD}{L\Delta ACL} \times \frac{L\Delta ACK}{L\Delta ACD} = \frac{L\Delta ACK}{L\Delta ACL} = \frac{KG}{LG}$$

***Teladan* 8.4.2** : Pada ΔABC disebelah, buat *AX* dan *BY* yang berpotongan di titik *R*, jika $\frac{AY}{YC} = p$ dan $\frac{AR}{RX} = q$ tentukanlah perbandingan $\frac{BX}{XC}$ dalam bentuk p dan q.

Penyelesian : Perhadikan ΔAXC dan sisi BRY sebagai transversalnya, maka dengan menggunakan teorema Menelaus akan diperoleh

$$\frac{AR}{RX} . \frac{XB}{BC} . \frac{CY}{YA} = 1$$



gambar 2.8.5

Maka

$$\frac{BC}{XB} = \frac{AR}{RX} . \frac{CY}{YA} = \frac{q}{p}$$

Jadi

$$\frac{BX+XC}{BX} = \frac{q}{p}$$

$$1 + \frac{XC}{BX} = \frac{q}{p}$$

$$\frac{XC}{BX} = \frac{q}{p} - 1 = \frac{q-p}{p}$$

Jadi

$$\frac{BX}{XC} = \frac{p}{q-p}$$

Teladan* 8.4.3 *: Pada ΔABC, titik *D*, *E* dan *F* berturut-turut merupakan titik potong garis tinggi dari titik *A*, *B* dan *C* terhadap sisi *BC*, *CA* dan *AB*. Bila *P*, *Q* dan *R* adalah titik potong garis tinggi dari titik *A*, *B* dan *C* pada *EF*, *FD* dan *DE*. Tunjukkan *P*, Q dan *R* adalah segaris.

Penyelesaian : Pertama-tama tunjukkan secara trigonometri bahwa

$\sin \angle FAP = \cos \angle AFP = \cos C.$

Dengan cara yang sama anda dapat menunjukkan

$\sin\angle PAE = \cos B,$

$\sin\angle ECR = \cos B,$

$\sin\angle RCD = \cos A,$

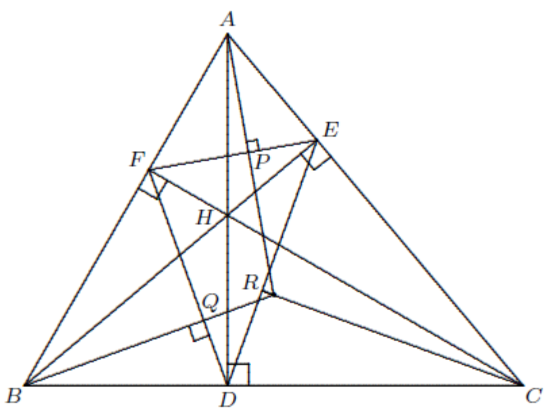
$\sin\angle DBQ = \cos A$ dan

$\sin\angle QBF = \cos C.$

Maka

$$\frac{\sin \angle FAP}{\sin \angle PAE}.\frac{\sin \angle ECR}{\sin \angle RCD}.\frac{\sin \angle DBQ}{\sin \angle RBF} = 1$$

Ini bermakna bahwa titik *P*, *Q* dan *R* adalah segaris

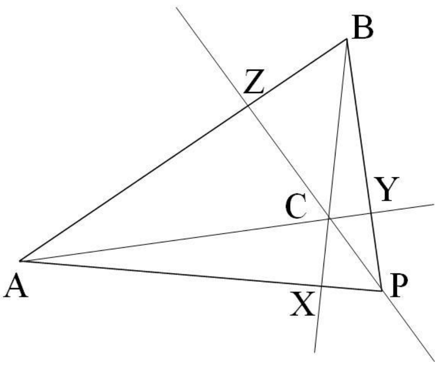


Gambar 8.2.6

.

Soal Latihan 16.

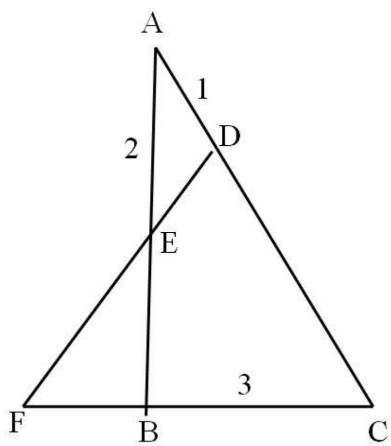
1. Perhatikan gambar disebelah, dimana P adalah orthocenter dari ΔABC. Tunjukkan bahwa ketiga garis tinggi berpotongan disatu titik.



2. Buktikan teorema Menelauos dengan menggunakan luas daerah.
3. Dalam ΔABC, D dan E masing-masing berada pada garis BC dan CA, jika AD dan BE berpotongan di titik S. kemudian CP dan AB berpotongan dititik P, Jika DE dan AB berpotongan dititik Q, tunjukkan

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$$

4. Jika G centroid dari Δ ABC dan Δ ABC sebangun dengan Δ $A'B'C'$ dengan perbandingan 1 : 2, maka G juga centroid dari Δ $A'B'C'$..
5. Jika pada gambar disebelah $\angle B = 90^0$, $BC = 3$ cm, $AB = 4$ cm , AD = 1 cm. Tentukan panjang sisi BF.



6. Misalkan P titik di dalam ΔABC, AP, BP dan CP masing-masing memotong sisi BC, CA dan AB di titik D, E dan F, tunjukkan bahwa $\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$

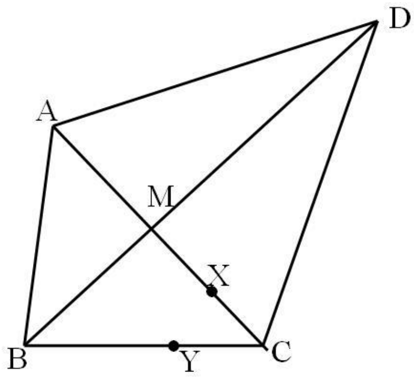
7. Jika pada suatu Δ ABC, AP, BQ dan CR bertemu di suatu titik, tunjukkan bahwa :

$$\frac{TP}{AP}+\frac{TQ}{BQ}+\frac{TR}{CR}=1$$

8. Jika pada gambar disebelah $AM = MC$ dan $DM = 2MB$, buat titik X dan Y masing-masing pada sisi CM dan BC sehingga

$$\frac{AC}{MX}=\frac{BY}{YC}=3$$

tunjukkan bahwa D, X dan Y segaris.



9. Buktikan teorema 6.4.6 pada bab 6 dengan menggunakan teorema Menelaus.

10. Diberikan ΔABC, misalkan D dan E sebarang titik pada BC, Sebuah lingkaran memotong segment garis AB, AC, AD dan AE masing-masing adalah di titik P, Q, R dan S. Buktikan

$$\frac{AP.AB - AR.AD}{AS.AE - AQ.AC}.=\frac{BD}{CE}$$

11. Diberikan suatu ΔABC, misalkan X adalah titik potong bisector sudut A ke sisi BC, dan Y titik potongn bisector dari sudut A ke sisi BC, sedangkan Z adalah titik potong bisector sudut luar C, tunjukkan bahwa X, Y dan Z segaris.

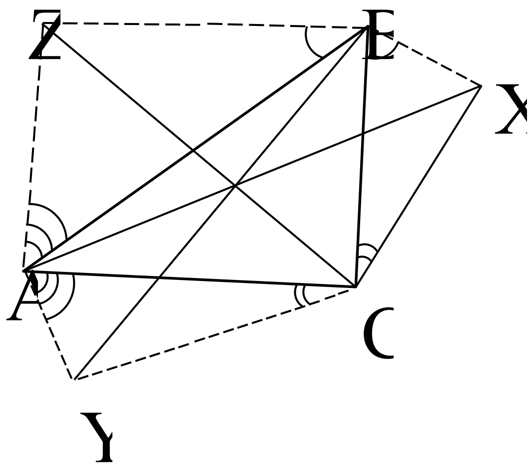
12. *) Perhatikan gambar disebelah dan *X*, *Y* dan Z seperti dalam gambar. Dengan

    $\angle ABZ = \angle CBX$

    $\angle BCX = \angle ABY$

    $\angle BAZ = \angle CAY$

    Tunjukkan *AX*, *BY* dan *CZ* adalah kongkuren

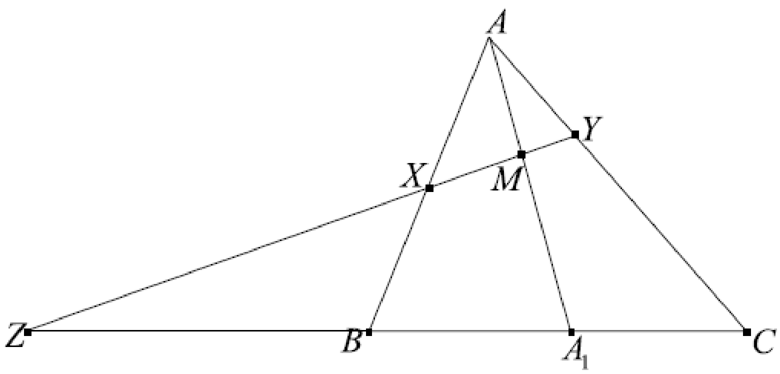


13. Tunjukkan dengan menggunakan teorema Menelaus bahwa jika *H* orthocenter dari ΔABC, tunjukkan bahwa garis euler dari ΔABC, ΔHBC, ΔHCA dan ΔHAB adalah segaris.
14. *). Diketahui segitiga sebarang (tidak samakaki). Pada setiap sudut luar segitiga dibuat garis bagi dan diperpanjang hingga memotong sisi lain di segitiga. Buktikan bahwa ketiga titik potong tersebut kolinear.
15. Pada ΔABC misalkan A_1 pada sisi BC, sedangkan X dan Y berada pada sisi AB dan AC. Jika garis YX memotong AA_1 di titik M dan memotong perpanjangan CB di titik Z (seperti pada gambar di bawah , jika

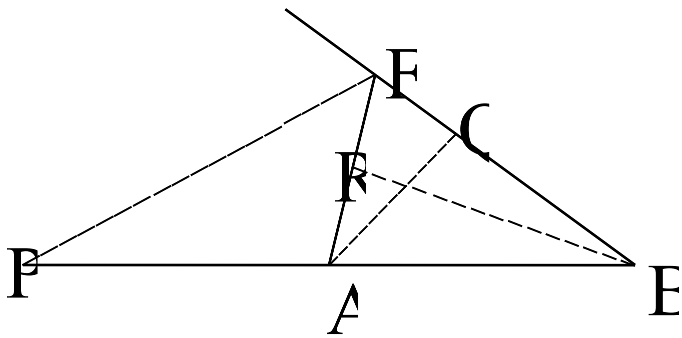
    $$\left|\frac{A_1B}{A_1C}\right| = \frac{\angle C}{\angle B}$$

    Tunjukkan bahwa

    $$\angle B.\frac{|XB|}{|XA|} + \angle C.\frac{|YC|}{|YA|} = (\angle B + \angle C).\frac{|A_1M|}{MA}$$



16. *) Perhatikan gambar disebelah, dengan *AQ* bisector $\angle A$, *BR* bisector $\angle B$ dan FP bisector sudut luar $\angle F$. tunukkan *P*, *Q* dan *R* segaris.

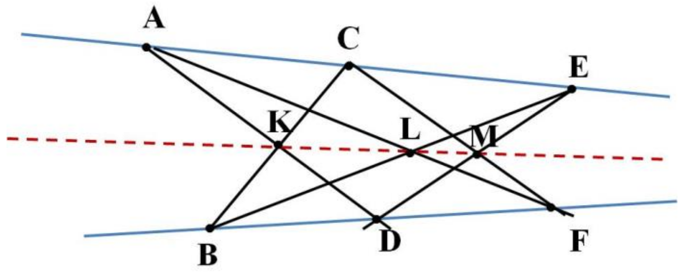


8.5. *Teorema Pappus*

Kalau teorema Ceva menunjukkan kewujudan tiga buah garis yang kongkuren dan Menelaus menyatakan kewujudan tiga buah titik yang kolinear, maka berikut ini akan dibahas kewujudan kolinearitas dari titik perpotongan 6 buah titik pada lingkaran.

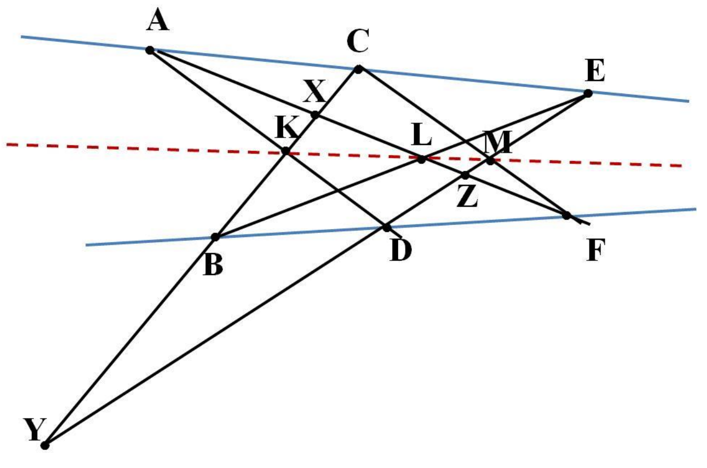
Teorema 8.5.1.(Teorema Pappus) : Jika titik *A*, *C* dan *E* berada pada suatu garis dan titik *B*, *D* dan *F* berapa pada garis lainnya, dan jika terdapat garis *AD*, *AF* dan *CF* masing-masing berpotongan dengan *BC*, *BE* dan DE. Maka ketiga titik potongnya yaitu *K*, *L* dan *M* adalah segaris.

Bukti : perhatikan gambar di bawah ini



Gambar 8.5.1

Pada gambar 8.3..1 perpanjang sisi *ED* dan *CB* sehingga berpotongan dititik *Y* dan sebut perpotongan *AF* dengan *CB* adalah *X* dan perpotongan *AF* dengan *ED* adalah *Z,* seperti pada gambar 8.5.2



Gambar 8.5.2

Pandang segitiga *XYZ* dengan garis transpersal adalah *BDF*, maka dengan menggunakan teorema Menelaus akan diperoleh

$$\frac{XB}{BY}.\frac{YD}{DZ}.\frac{ZF}{FX} = -1 \text{ dan}$$

$$\frac{XC}{CY}.\frac{YE}{EZ}.\frac{ZA}{AX} = -1$$

Kemudian dengan memandang *AD* sebagai garis transpersalnya akan diperoleh pula

$$\frac{XK}{KY}.\frac{YD}{DZ}.\frac{ZA}{AX} = -1$$

Untuk BE sebagai garis transpersal diperoleh

$$\frac{XB}{BY}.\frac{YE}{EZ}.\frac{ZL}{LX} = -1$$

Dan *CF* sebagai garis transpersalnya akan diperoleh

$$\frac{XC}{CY}.\frac{YM}{MZ}.\frac{ZF}{FX} = -1$$

Maka dari kelima persamaan di atas akan mengakibatkan

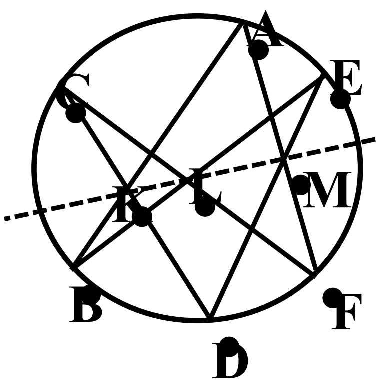
$$\frac{XK}{KY}.\frac{YM}{MZ}.\frac{ZL}{LX} = -1$$

Dan ini bermakna bahwa ketiga titik *X*, *Y* dan *Z* adalah segaris.

Berikut ini perhatikan kalau teorema Pappus itu kita berlakukan untuk lingkaran dengan 2 kasus, kasus pertama persis sama seperti lingkaran akan tetapi kedua garisnya dalam bentuk sebuah lingkaran yang posisi ke enam titiknya saling bersebelahan. Pada teorema ini bentuk perpotongan dua buah garis dilambangkan dengan $\cap$, dengan $K = AB \cap CD$ bermakna titik *K* merupakan titik potong dari garis *AB* dengan *CD*. Banyak sekali cara yang dapat ditempuh untuk membuktikan teorema di bawah, akan tetapi disini hanya akan diberikan salah satu cara pembuktian dengan menggunakan teorema Menelaus.

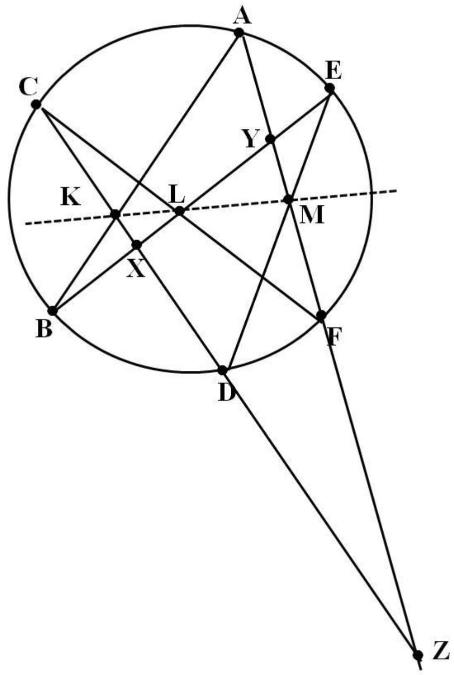
Teorema 8.5.2 : Misalkan *A*, *B*, *C*, *D*, *E* dan *F* adalah 6 buah titik pada lingkaran (tidak perlu berurutan. Misalkan $K = AB \cap CD$, $L = CF \cap BE$ dan $M = DE \cap AF$. Maka *K*, *L* dan *M* adalah segaris :

Bukti : Perhatikan gambaru 8.5.3



Gambar 8.5.3

kemudian perpanjang *CD* dan *AF* sehingga bertemu di titik *Z*, sebut $X = CD \cap BE$ dan $Y = BE \cap AF$. Cara pemiliha titik *X*, *Y*, *Z* untuk membuktikan teorema berikut tidaklah tunggal. Banyak cara yang dapat ditempuh. Misalkan titik *X*, *Y* dan *Z* seperti pada gambar 7.1.3 .Kemudian terapkan teorema Menelaus pada ΔXYZ dengan berturut-turut sisi *CF*, *AB* dan DE sebagai garis transversalnya,



Gambar 8.5.4

Maka akan diperoleh tiga buah persamaan berikut ini

$$\frac{XL}{LY}.\frac{YF}{FZ}.\frac{ZC}{CX} = -1$$

$$\frac{XB}{BY}.\frac{YA}{AZ}.\frac{ZK}{KX} = -1$$

$$\frac{XE}{EY}.\frac{YM}{MZ}.\frac{ZD}{DX} = -1$$

Kemudian karena

$XB.\ XE = XC.\ XD$

$YA.\ YF = YB.\ YE$

$ZD.\ ZC = ZF.\ ZA$

Maka dari ketiga persamaan Menelaus di atas akan mengakibatkan

$$\frac{XL}{LY}.\frac{YM}{MZ}.\frac{ZK}{KX} = -1$$

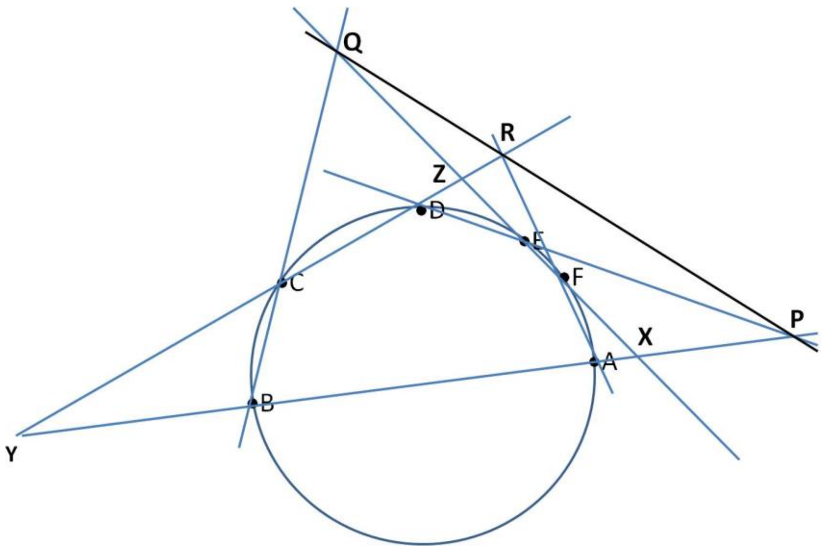
Dengan persamaan yang terakhir ini bermakna bahwa ketiga titik *K*, *L* dan *M* adalah segaris.

8.6. Teorema Pascal

Berikut ini juga bentuk lain dari teorema Pappus, akan tetapi titik-titik yang dihubungkan berbeda dengan yang diteorema 8.5.1, teorema ini lebih dikenal dengan teorema Pascal, akan tetapi pembuktiannya juga tetap menggunakan teorema Menelaus.,

Teorema 8.6.1 (Teorema Pascal) : Misalkan A, B, C, D, E dan F adalah 6 buah titik pada lingkaran (tidak perlu berurutan. Misalkan $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$ dan $R = CD \cap FA$. Maka P, Q dan R adalah segaris

Bukti : perhatikan gambar dibawah ini



Gambar 8.6.1

Misalkan $X = EF \cap AB$, $Y = AB \cap CD$ dan $Z = CD \cap EF$, perhatikan ΔXYZ dengan BC sebagai sumbu transversal, maka akan diperoleh

$$\frac{ZQ}{QX} \cdot \frac{XB}{BY} \cdot \frac{YC}{CZ} = -1$$

Kemudian secara berturut-turut juga untuk ΔXYZ dengan garis transversal DE dan FA, masing-masing akan diperoleh :

$$\frac{XP}{PY} \cdot \frac{YD}{DZ} \frac{ZE}{EX} = -1 \quad \text{dan}$$

$$\frac{YR}{RZ} \cdot \frac{ZF}{FX} \cdot \frac{XA}{AY} = -1$$

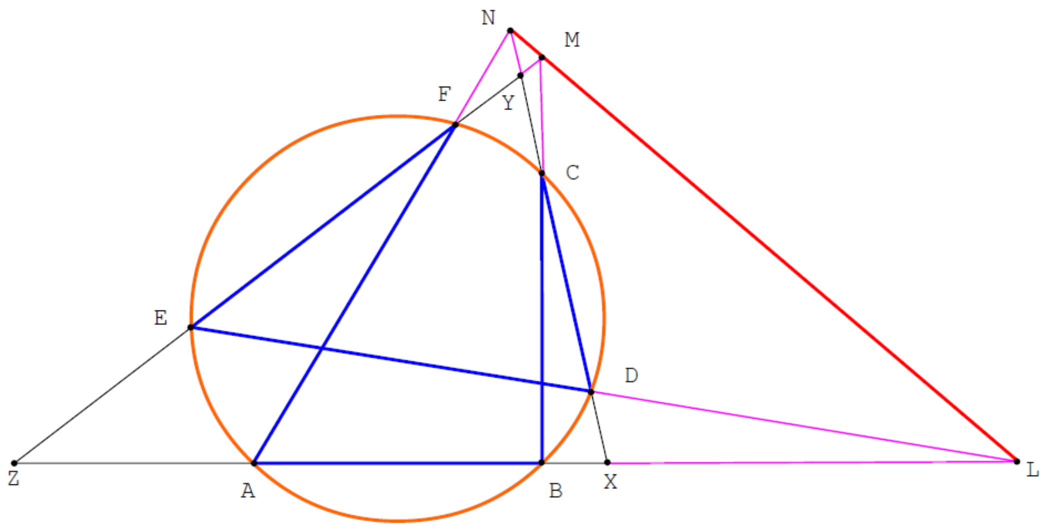
Jika dikalikan ketiga persamaan di atas, maka akan diperoleh

$$\frac{ZQ}{QX} \cdot \frac{XB}{BY} \cdot \frac{YC}{CZ} \cdot \frac{XP}{PY} \cdot \frac{YD}{DZ} \cdot \frac{ZE}{EX} \cdot \frac{YR}{RZ} \cdot \frac{ZF}{FX} \cdot \frac{XA}{AY} = \frac{ZQ}{QY} \cdot \frac{XP}{PY} \cdot \frac{YR}{RZ} = -1 \qquad (8.6.1\ )$$

Hal ini disebabkan karena *XA. XB* = *XE XF*, *YC. YD* = *YA. YA* dan *ZE. ZF* = *ZC. ZD*. Berdasarkan teorema Menelaus, maka persamaan 8.6.1 di atas bermakna bahwa *P*, *Q* dan *R* adalah segaris (kolinear)

Sekali lagi cara pemilihan titik *X*, *Y* dan *Z* dalam proses pembuktian teorema di atas tidak tunggal, Pembaca dapat memilih posisi lain dari *X*, *Y* dan *Z* sehingga teorema Menelaus masih dapat diterapkan dalam proses pembuktiannya. Selain cara pemilihat titik *X*, *Y* dan *Z*, titik pada lingkaran yang dihubungkan, juga boleh berbeda dari gambar di atas (perhatikan soal latihan no 3).

Kalau di atas posisi titik yang dihubungkan adalah setiap dua titik yang berdekatan, tapi berikut ini juga dapat kita tunjukkan sifat segaris dari ketiga titik potong bila yang dihubungkan adalah salahsatunya dua titik yang berdekatan dan yang lainnya adalah dengan titik yang berlawanan posisinya dengan titik tersebut. Perhatikan gambar 8.6.2



Gambar 8.6.2.

Gunakan teorema Menelaus untuk Δ*LDE*, maka akan diperoleh

$$\frac{XD}{DY} \cdot \frac{YE}{EZ} \cdot \frac{ZL}{LX} = -1$$

Kemudian untuk Δ*MCB*, maka akan diperoleh

$$\frac{XC}{CY} \cdot \frac{YM}{MZ} \cdot \frac{ZB}{BX} = -1$$

Selanjutnya untuk Δ*NFA*, maka akan diperoleh

$$\frac{XN}{NY} \cdot \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{AL}{AX} = -1$$

Maka dari ketiga persamaan di atas akan diperoleh

$$\frac{XD}{DY} \cdot \frac{YE}{EZ} \cdot \frac{ZL}{LX} \cdot \frac{XC}{CY} \cdot \frac{YM}{MZ} \cdot \frac{ZB}{BX} \cdot \frac{XN}{NY} \cdot \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{AL}{AX} = -1$$

Akan tetapi karena

$XD \,.\, XC = XB \,.\, XA;$

$$Y D \, . \, Y C = Y F \, . \, Y E$$

dan

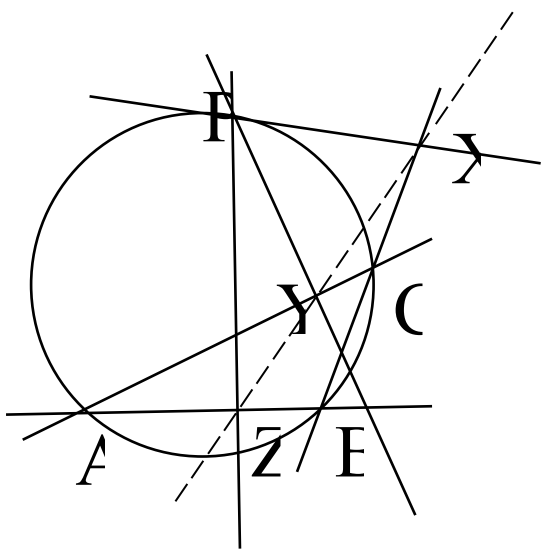
$$ZF \, . \, ZE = ZB \, . \, ZA$$

Dengan $XA = -AX$, $XB = -BX$, dan lain sebagainya, maka akhirnya akan diperoleh

$$\frac{XL}{LX} \cdot \frac{XN}{NY} \cdot \frac{YM}{MZ} = -1$$

Yang bermakna bahwa ketiga titik X, Y dan Z adalah segaris.

Diberikan sebarang ΔABC, kemudian dikontruksi lingkaran luar padanya, misalkan sebarang titik P berada pada lingkaran luar tersebut, dari titik P dibuat garis yang tegak lurus ke sisi BC, AC dan AB masing-masing adalah titik X, Y dan Z seperti gambar di bawah ini



gambar 8.6.3

Teorema* 8.6.2** : Ttitik X, Y dan Z seperti yang dikontruksi di atas adalah segaris. Garisnya itu disebut dengan ***garis Simson's (atau ***garis Wallace's***).

Bukti : Perhatikan bahwa $\angle PZB$ dan $\angle PXB$ adalah sudut siku-siku, sehingga diperoleh

$$\angle XPZ + \angle ZBX = 180^0.$$

Yang mengakibatkan segiempat $PXBZ$ adalah segiempat siklik. Jadi $\angle PXZ = \angle PBZ$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa segiempat $PXCY$ juga segiempat siklik dan juga $\angle PCA = \angle PCY = \angle PXY$.

Selanjutnya

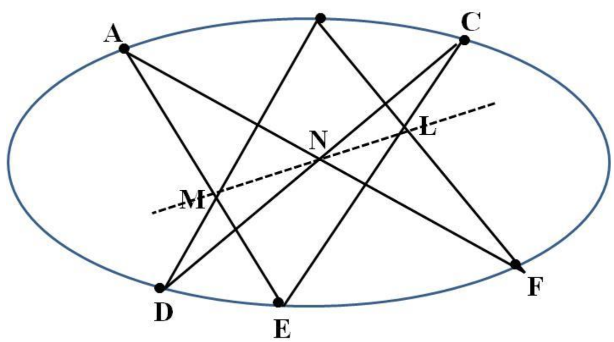
$$\angle PXZ = \angle PBZ = \angle PBA = \angle PCA = \angle PCY = \angle PXY$$

Maka jelas dari sini C, Y dan Z adalah segaris.

Kalau di atas menyatakan bagaimana perluasan teorema Pappus pada lingkaran, maka berikut ini akan dibahas teorema Pappus pada Ellips, yaitu sebagai berikut :

Teorema 8.6.3 : Misalkan 6 buah titik berada pada ellips (positinya tidak perlu berurutan) misalkan $N = AE \cap BD$ dan $M = AF \cap CD$ serta $L = BF \cap CE$, maka L, M dan N adalah segaris.

Bukti : Proses pembuktian ini sebenarnya hampir sama dengan pembuktian teorema pappus untuk lingkaran, jadi disini hanya sekedar untuk menunjukkan bahwa teorema pappus juga berlaku pada ellips. Untuk proses pembuktian selanjutnya dalam sebagai latihan bagi pembaca



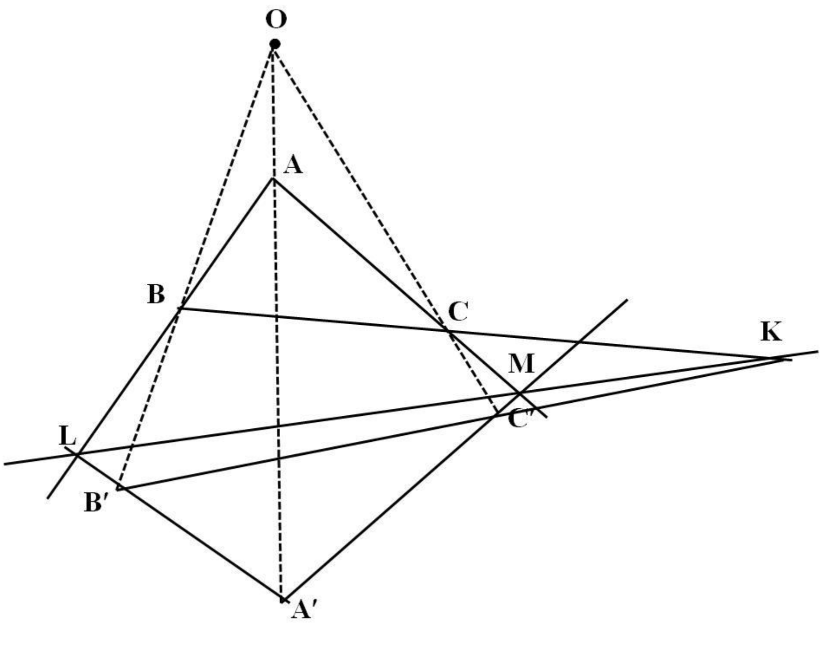
Gambar 8.6.4

8.7. Teorema Desargues's

Salah satu istilah lain yang sering muncul dalam eksistensi titik yang segaris adalah istilah persepktif (perspective), dalam berbagai buku juga sering disebut dengan istilah

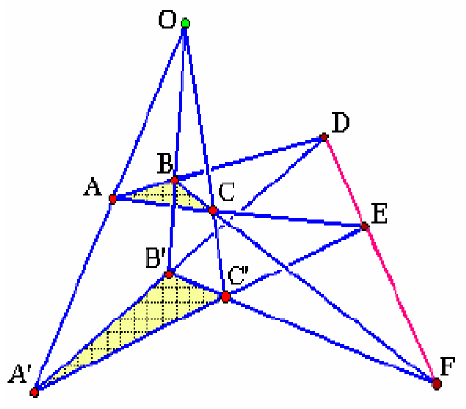
Homologic. Dua buah ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ dikatakan perspektif bila ketiga titik potong sisi yang berpasangan adalah segaris. Jadi bila K adalah titik potong BC dengan $B'C'$ dan L adalah titik potong AC dengan $A'C'$ serta M adalah titik potong sisi AB dengan $A'B'$, maka K, L dn M segaris. Dan garis yang menghubungkan KLM tersebut dikatakan sumbu perspektif (seperti gambar di bawah ini). Sedangkan titik O disebut pusat perspektif. Dan sering ditulis dalam bentuk teorema berikut, yang lebih dikenal dengan teorema Desargues's berikut ini.

Teorema 8.7.1 (Teorema Desargues's) : Jika dua buah segitiga adalah perspektif dari suatu titik, dan jika pasangan yang berhubungan adalah berpotongan, maka ketiga titik perpotongannya adalah segaris.



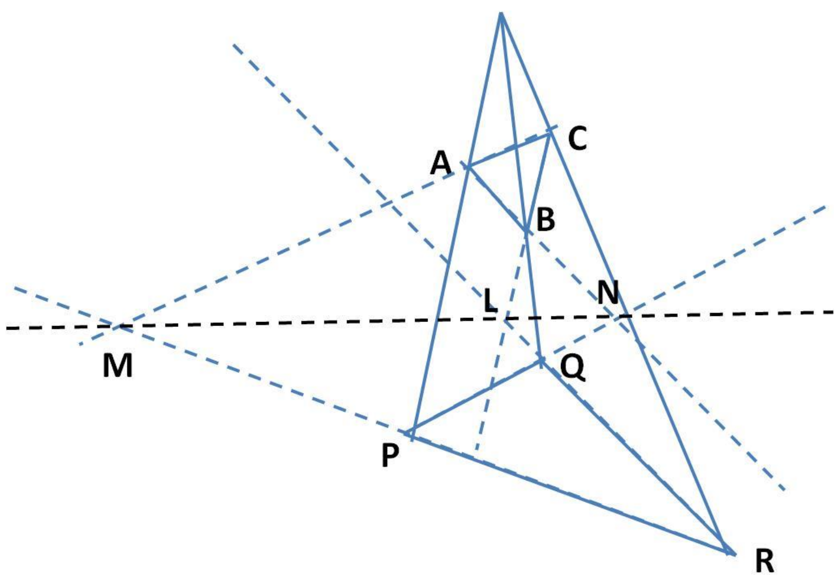
Gambar 8.7.1

Bentuk ilustrasi dari teorema di atas dapat dalam bermacam-macam bentuk, misalnya seperti gambar disebelah, yang mana ketiga titik potongnya berada pada sebelah yang sama dari segitiga tersebut. Garis perspektifnya adalah garis yang menghubungkan titik *D*, *E* dan *F*.



Gambar 8.7.2

Bukti teorema 8.7.1 (Teoerma Desargues's) : perhatikan gambar di bawah ini dan akan dibuktikan bahwa garis *L*, *M* dan *N* adalah segaris



Gambar 8.7.3

Perhatikan ΔOBC dan perpanjang sisi-sisinya, maka berdasarkan teorema Menelaus diperoleh

$$\frac{BL}{LC}.\frac{CR}{RO}.\frac{OQ}{QB} = -1$$

Kemudian perhatikan Δ OCA, sama seperti di atas akan diperoleh

$$\frac{CM}{MA}.\frac{AP}{PO}.\frac{OQ}{QA} = -1$$

Selanjutnya perhatikan ΔOAB, juga dengan cara yang serupa seperti di atas akan diperoleh

$$\frac{AN}{NB}.\frac{BQ}{QO}.\frac{OP}{PA} = -1$$

Dari ketiga persamaan di atas akan diperleh

$$\frac{BL}{LC}.\frac{CM}{MA}.\frac{AN}{NB} = -1$$

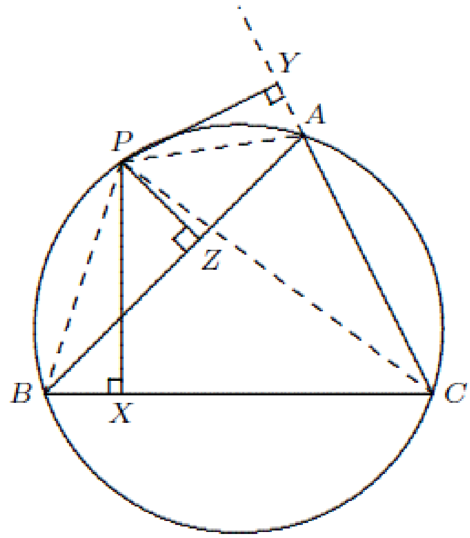
Yang bermakna bahwa ketiga titik *L*, *M* dan *N* adalah segaris.

Berikut ini akan dibahas kolinearitas (segaris) dari tiga buah titik pada lingkaran luar dari suatu ΔABC yang dikenal dengan garis Simson. Pembuktian segarisnya tidak dengan menggunakan teroema Ceva ataupun teorema Menelaus. Pembaca yang dapat mencoba membuktikannya dengan menggunakan teorema tersebut.

Teorema 8.7.2.*Teorema* (*garis Simson*). Jika *P* berada pada sebarang lingkaran luar segitiga ABC, Jika P diprokyeksikan pada ketiga sisi Δ *ABC*, maka ketiga titik proyeksinya tersebut adalah segaris.

Bukti : Perhatikan bahwa segiempat *PZAY*; *PXCY* dan *PACB* merupakan segiempat siklik.

Maka jelas $\angle PYZ = \angle PAZ = \angle PCX = \angle PYX$. Ini menunjukkan bahwa *Y*, *Z* dan *X* adalah segaris.

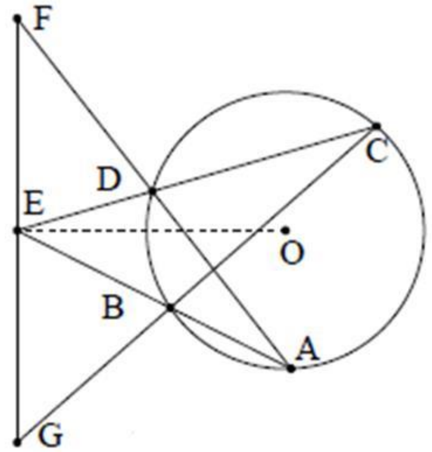


gambar 8.7.4

Dalam banyak hal garis Simson dari titik *D* terhadap Δ *ABC* disimbolkan dengan *D*(*ABC*) yang dengan *D* berada pada lingkaran luar dari ΔABC dan yang segaris tersebut adalah proyeksi dari titik *D* ke masing-masing sisi dari Δ*ABC* tersebut.

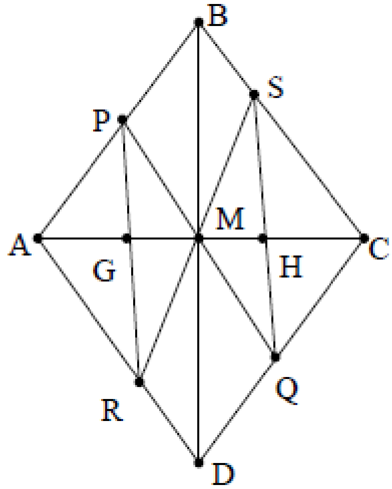
***Soal Latihan* 17.**

1. Jika *A*, *C* dan *E* tidak buah titik pada suatu garis, *B*, *D* dan *F* tiga buah titik pada garis lainnya. Jika dua buah garis *AB* dan *CD* masing-masing adalah sejajar ke garis *DE* dan *FA*. Tunjukkan *EF* sejaran dengan *BC*.
2. Jika *C* dan *F* sebarang titik pada sisi *AE* dan *BD* segiempat *ABCD*, misalkan *M* dan *N* masing-masing merupakan irisan *CD* dengan *FA* dan *EF* dengan *BC*. Jika *MN* berpotongan dengan *DA* dititik *P* dan berpotongan dengan *EB* dititik *Q*. Tunjukkan *AP* = *QB*.
3. Buktikan secara lengkap teorema 8.6.3
4. Jika titik A, C dan E berada pada sebuat garis dan titik B, D, F berada pada garis lainnya. Jika garis AB // DE dan CD // FA. Tunjukkan bahwa garis EF // BC.
5. Perhatikan gambar disebelah dengan *O* titik pusat lingkaran, Tunjukkan bahwa *GE* = *EF*.



6. Jika titik A, B, D, E, M dan N adalah enam buah titik sehingga garis AE, DM dan MB adalah kongkuren, begitu juga dengan garis AM, DB dan ME adalah kongkuren. Periksalah bagaimana dengan garis AB, DE, MN.
7. Ini disebut dengan teorema Butterfly untuk segiempat. Misalkan segi-empat *ABCD* dengan *AB* = *BC* dan *A*D = *D*C, *M* adalah titik tengah perpotongan diagonal *AC* dengan *BD*.

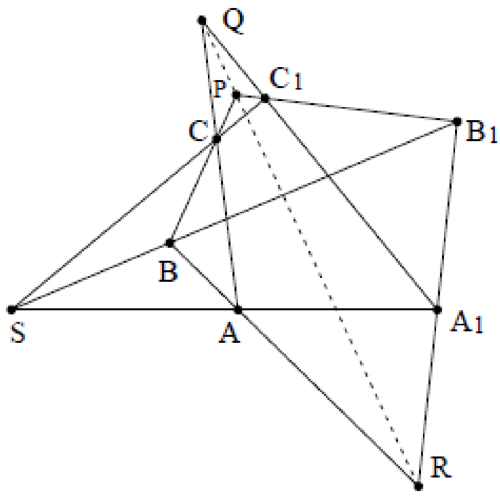
Tepat melalui *M* dibuat dua buah garis yang memotong sisi segi-empat di *P*, *Q*, *R* dan *S*. Misalkan $G = PR \cap AC$, $H = SQ \cap AC$. Tunjukkan $GM = MH$.



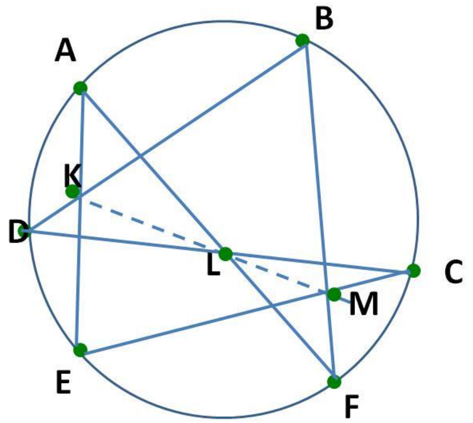
8. Misalkan segi-empat *ABCD*, dengan *M* adalah titik tengah perpotongan diagonal segiempatg yang berpotongan di titik tengah *AC* . Tepat melalui *M* dibuat dua buah garis yang memotong sisi segi-empat di *P*, *Q*, *R* dan *S*. Misalkan $G = PR \cap AC$, $H = SQ \cap AC$. Tunjukkan

$$\frac{MG}{AG} = \frac{MH}{CH} \cdot \frac{CM}{MA}$$

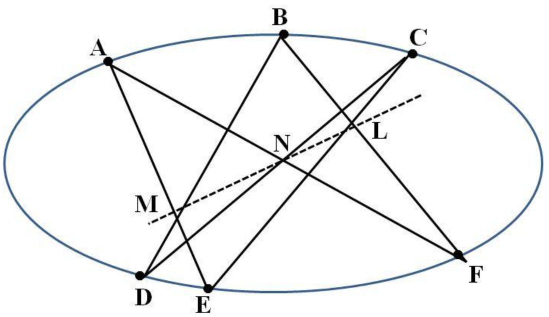
9. Soal nomor ini persis sama dengan teorema Desarques's akan tetapi bentuknya gambarnya saja yang berbeda. Tunjukkanlah *P*, *Q* dan *R* segaris



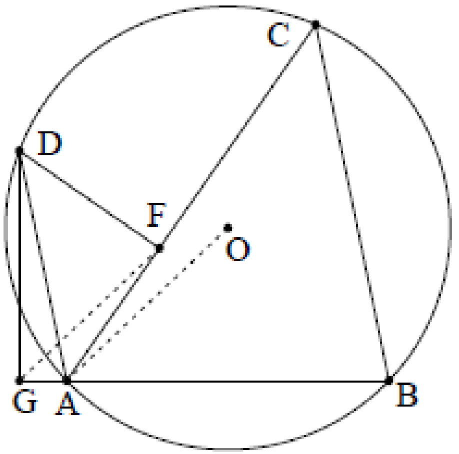
10. Perhatikan gambar disebelah, tunjukkan bahwa ketiga titik K, L dan M adalah segaris



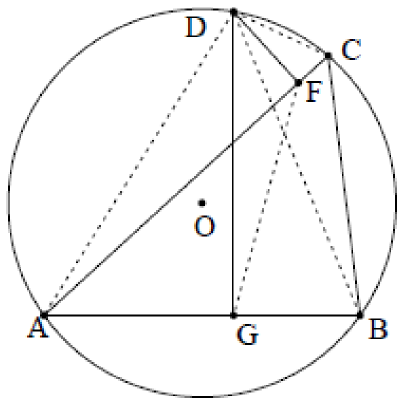
11. Pada gambar disebelah, misalkan X titik potong garis AF dengan BD dan Y adalah titik potong garis AF dengan CE, kemudian perpanjanglah garis BD dan CE sehingga bergtemu dititik Z. kemudian tunjukkanlah bahwa ketiga titik L, M dan N adalah segaris.



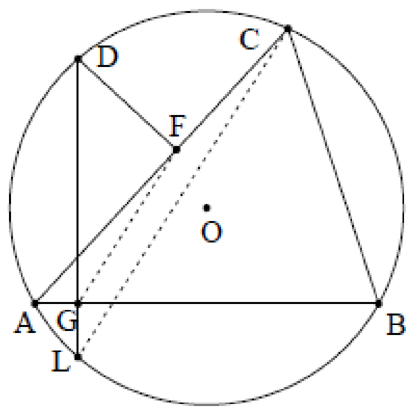
12. Jika O merupakan titik pusat lingkaran luar ΔABC dan titik D berada pada lingkaran, garis DA // BC. Tunjukkan $D(ABC)$ sejajar dengan OA.



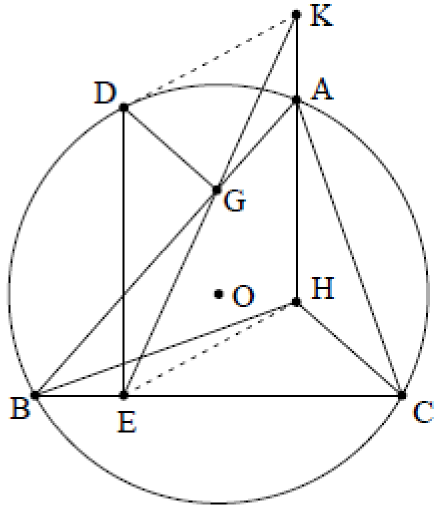
13. Sempurnakan gambar disebelah yang mana *O* titik pusat lingkaran luar ΔABC dan *E*, *F* dan *G* masing-masing adalah proyeksi dari titik D ke sisi *BC*, *AC* dan *AB* yaitu garis Simson *D*(*ABC*). Tunjukkan Δ*DFG* ~ Δ*DBC*.



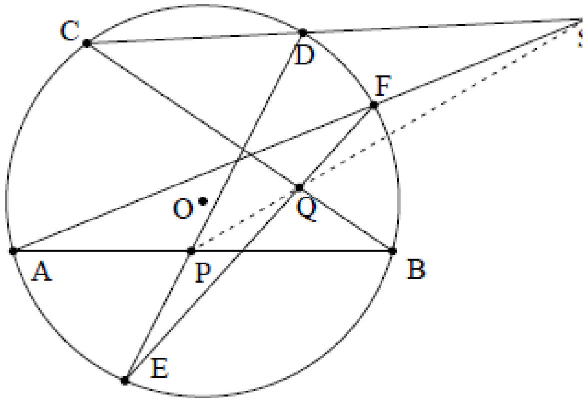
14. *). Sempurnakan gambar disebelah. Jika garis *D*(*ABC*) diperpanjang, maka ia akan memotong sisi *BC*, *CA* dan *AB* di titik *N*, *M* dan *L*. Tunjukkan bahwa ketiga garis *A*N, *B*M dan *CL* sejajar dengan garis Simsons's *D*(*ABC*).

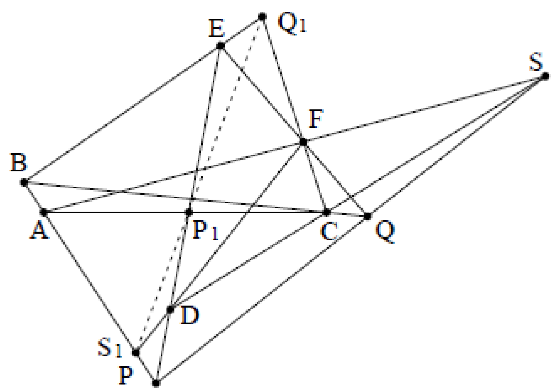


15. **). Jika $D(ABC)$ memotong BC di E. sedangkan H orthocenter dari ΔABC. Jika G proyeksi D pada AB, garis EG memotong HA di K. Tunjukkan $DK \parallel EH$.



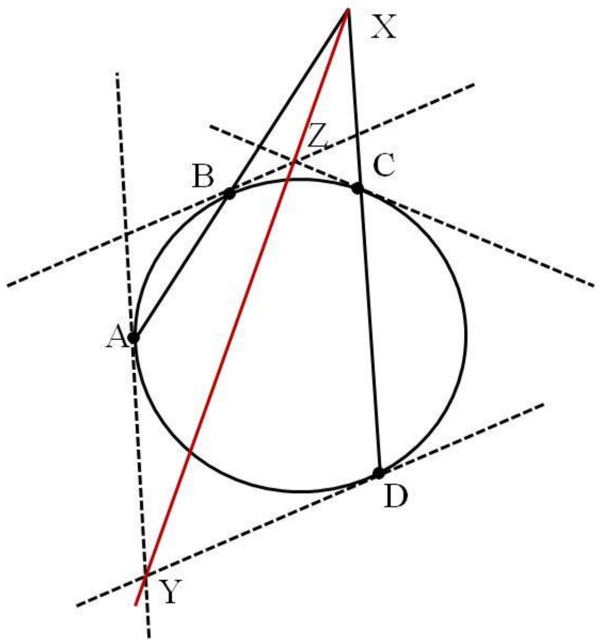
16. Soal berikut disebut dengan teorema Pascal yang diperumum. Misalkan A, B, C, D, F dan E enam buah titik (kalau teorema pascal titiknya di lingkaran, seperti gambar kiri di bawah.). $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$ dan $S = CD \cap FA$, dari teorema Pascal Jelas P, Q dan S segaris. Perhatikan gambar kanan bawah, jika $P_1 = AC \cap DE$, $Q_1 = BE \cap CF$ dan $S_1 = AB \cap FD$. Tunjukkan bahwa P_1, Q_1 dan S_1 segaris.



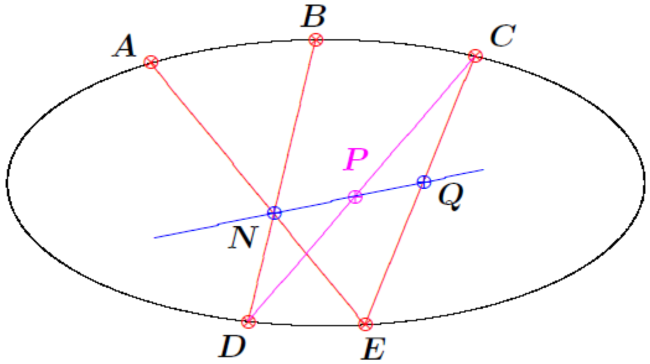


17. *). Misalkan titik A, B, C dan D berada pada lingkaran, sebut $X = AB \cap CD$ dan Y titik potong garis singgung dititik A dan D serta Z adalah titik potong garis singgung

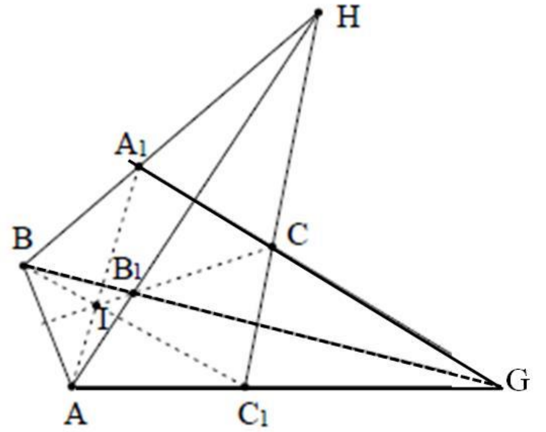
di titik *B* dan *C*. Tunjukkan *X*, *Y* dan *Z* segaris.



18. **). Misalkan titik *A, B, C, D* dan *E* berada pada elips, kemudian misalkan $N = AE \cap BD$, kemudian ambil sebarang titik *P* pada garis *CD* dan misalkan pula $Q = NP \cap CE$ (seperti pada gambar di bawah. Jika $X = AP \cap BQ$. Tunjukkan bahwa *X* berada pada elips.



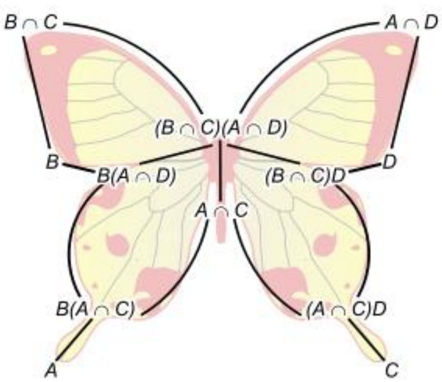
19. Perhatikan hexagon $AC_1BA_1CB_1$, dan BB_1, C_1A, A_1C adalah kongkuren di G dan BA_1, AB_1 *dan* C_1C *kontkuren di H. Buktikan* AA_1, B_1C dan C_1B juga kongkuren.

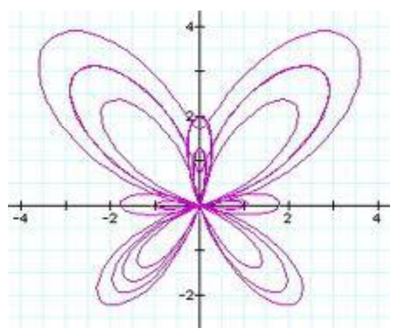


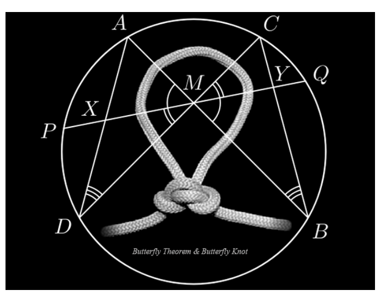
BAB 6

Teorema Butterfly

Dalam kehidupan sederhana (kebanyakan), memang kondisi butterfly (kupu-kupu) tidak banyak dijumpai, akan tetapi dalam dunia akademik ternyata baik illmuwan/akademisi yang bekeraja dengan fungsi dan mendisaian sesuatu banyak yang bekerja dalam bentuk butterfly. Perhatikanlah gambar di bawah ini.







BAB IX

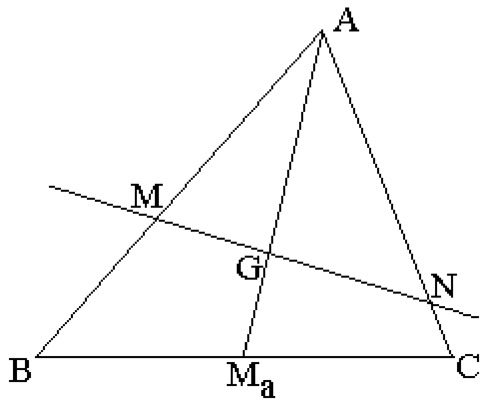
Teorema Butterfly

6.1. *Teorema Butterfly*

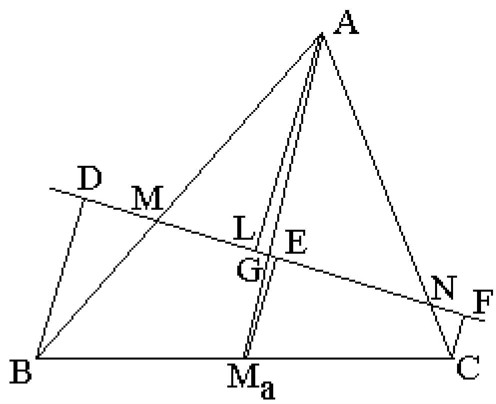
Masih sangat banyak teorema dalam geometri bidang yang berkaitan dengan segitiga, apakah itu terkait dengan centroid, Orthocenter, incenter dan circumcenter, disini akan dibuktikan beberapa teorema yang terkait dengan hal tersebut

Teorema 6.1.1. Misalkan G adalah centroid dari ΔABC, melalui G dibuat suatu garis yang memotong sisi AM di titik M dan memotong AC di titik M, maka berlaku

$$\frac{BM}{MA}+\frac{CN}{NA}=1$$



Gambar 6.1.1



Gambar 6.1.2

Bukti : Misalkan M_a titik tengah dari BC, perpanjang garis MN dan buat garis dari titik B yang tegak lurus dengan pada perpanjangan garis MN. Buat juga dari titik M_a dan titik C garis yang tegak lurus dengan perpanjangan garis MN, katakana titik potongnya masing masing adalah D, E dan F (perhatikan gambar 6.1.1), maka berlaku

$$M_aE = \frac{BD + CF}{2} \qquad (6.1.1)$$

Selanjutnya buat garis AL yang tegak lurus dengan MN, maka $\Delta ALG \sim \Delta\, M_aEG$, dan $GA = 2.M_aG$, selanjutnya $LA = 2.M_aE$, jadi

$$LA = BD + CF \qquad (6.1.2)$$

Selanjutnya Δ BDM ~ Δ ALM, begitu juga dengan Δ CFN ~ Δ ALN, sehingga diperoleh

$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = \frac{BD}{LA} + \frac{CF}{LA}$$

$$= \frac{BD + CF}{LA}$$

$$= \frac{LA}{LA} = 1$$

♥

Perhatikan pada proses pembuktian di atas, bahwa $BD + CF = LA$ diperoleh dari persamaan (6.1.2). Selanjutnya kita misalkan sebaliknya jika

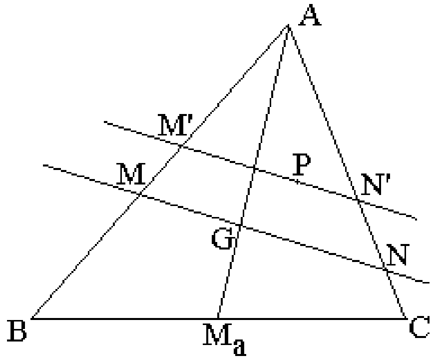
$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = 1$$

Untuk itu misalkan pula titik P sehingga juga berlaku

$$\frac{BM'}{M'A} + \frac{CN'}{N'A} = 1 \qquad (6.1.3)$$

Yang mana P juga memotong AM dan AC, katakana di M' dan N', akan ditunjukikan bahwa $P = G$, untuk itu misalkan P berbeda dengan G. Misalkan MN tepat melalui G dan sejajar dengan $M'N'$ (perhatikan gambar 6.1.3).

Karena $BM < BM'$, $CN < CN'$ sebaliknya penyebutnya diperkecil yaitu $MA > M'A$ dan $NA > N'A$ kondisi ini mengakibatkan



Gambar 6.1.3

$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} < \frac{BM'}{M'A} + \frac{CN'}{N'A} \qquad (6.1.4)$$

Berdasarkan (6.1.3) mengakibatkan

$$\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} < 1$$

yang kontradiksi dengan asumsi awal, jadi mestilah $P = G$.

Teorema Butterfly

Teorema butterfly merupakan suatu teorema tentang titik tengah pada tali busur suatu lingkaran, yang didalamnya terdapat lima buah tali busur yang saling berpotongan sehingga dapat membentuk sebuah sayap kupu-kupu. Adapun sayap yang terbentuk adalah merupakan dua buah segitiga yang sebangun.

Di dalam Teorema Butterfly yang dibahas dalam [3], digambarkan bahwa misalkan M adalah titik tengah dari sebuah tali busur PQdari sebuah lingkaran, terdapat pula dua tali busur yang lain AB dan CD. Titik A dan D dihubungkan sehingga AD memotong PQ di X dan juga titik B dan C dihubungkan sehingga BC memotong PQ di Y, maka M adalah juga titik tengah dari XY. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut.

Perhatikan ΔADM dan ΔBCM pada gambar 6.1.4, kedua segitiga tersebut merupakan

dua segitiga yang sebangun yang terbentuk dari perpotongan - perpotongan tali busur PQ, AB , CD, AD , dan BC , sehingga kedua segitiga tersebut menyerupai sayap kupu - kupu. Untuk melihat $\Delta ADM \sim \Delta BCM$ maka dapat dibuktikan dengan langkah sebagai berikut:

Dari

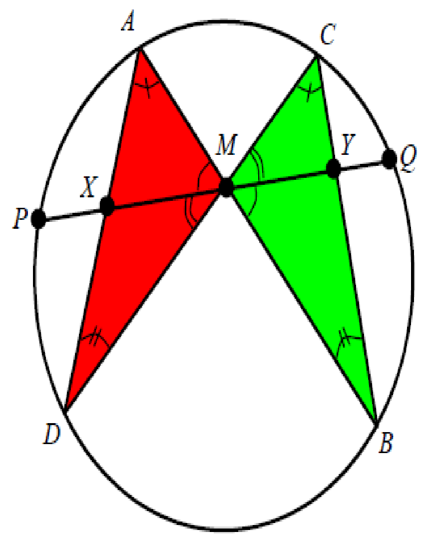
$$\angle DAB \cong \angle BCD \text{ (Sd)}$$

$$\angle ADC \cong \angle CBA \text{ (Sd)} \qquad ...(6.1.5)$$

Sehingga dari Akibat Teoremai kesebangunan *Sd-Sd* diperoleh

$\Delta ADM \sim \Delta BCM$ ■

Tak hanya sekedar itu, pada sub bab berikut ini akan dibuktikan bahwa *M* adalah juga titik tengah dari *XY* atau *MX* = *MY* dengan menggunakan beberapa alternatif bukti.



Gambar 6.1.4.

Alternatif Bukti Dari Teorema Butterfly

Dalam sub bab ini akan dibuktikan Teorema Butterfly dengan beberapa alternatif, yaitu dengan menggunakan kongruensi antara dua segitiga, kesebangunan antara dua segitiga, aturan sinus, dan perbandingan luas segitiga.

Teorema* 6.1.2 *Teorema Butterfly, misalkan *M* adalah titik tengah dari sebuah tali busur *PQ* dari sebuah lingkaran, terdapat pula dua tali busur yang lain *AB* dan *CD*, *AD* memotong *PQ* di *X* dan *BC* memotong *PQ* di *Y*, maka *M* adalah juga titik tengah dari *XY*

Bukti:

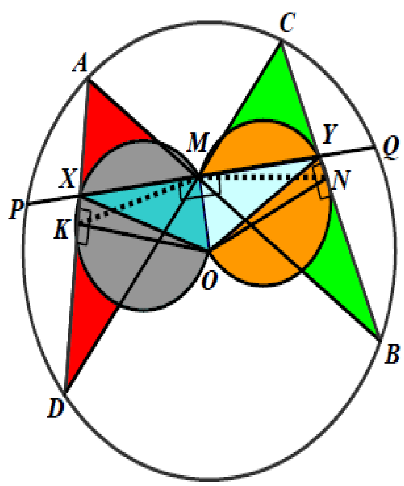
Alternatif 1 *Dengan kongruensi antara dua segitiga.*

Perhatikan gambar 6.1.5, misalkan *O* adalah pusat lingkaran, dan *OM* adalah garis tegak lurus yang ditarik dari titik pusat *O* ke *M* sehingga $OM \perp XY$. Akan ditunjukkan *MX* = *MY* dengan cara membuktikan

$$\Delta MOX \cong \Delta MOY$$

dengan langkah sebagai berikut:

1. Tarik garis yang tegak lurus yaitu OK dan ON dari O sehingga $OK \perp AD$ dan $ON \perp BC$ sehingga diperoleh bahwa K dan N berturut-turut adalah titik tengah dari AD dan BC sehingga :



Gambar 6.1.5

$$AD = AK + DK \text{ dan } BC = CN + BN \qquad \dots(6.1.6)$$

2. Perhatikan bahwa
   $\Delta ADM \sim \Delta CBM$
   sehingga

$$\frac{AD}{AM} = \frac{BC}{CM} \qquad (6.1.7)$$

3. Perhatikan ΔAKM dan ΔCNM . Substitusi persamaan (6.1.6) ke persamaan (6.1.7) diperoleh

$$\frac{AK + DK}{AM} = \frac{CM + BM}{CM} \qquad (6.1.8)$$

Karena $AK = DK$ dan $CN = BN$ maka dari persamaan (6.1.8) diperoleh

$$\frac{2.AK}{AM} = \frac{2.CN}{CM}$$

$$\frac{AK}{AM} = \frac{CN}{CM} \square$$

Sehingga diperoleh

$$\Delta AKM \sim \Delta CNM$$

Sehingga

$$\angle AKM = \angle CNM \qquad \text{. . . . (6.1.9)}$$

4. Perhatikan $\square OKXM$ dan $\square ONYM$. Oleh karena $OM \perp XY$, $OK \perp AD$, dan $ON \perp BC$ maka $\angle XMO$ dan $\angle XKO$, dan $\angle YMO$ dan $\angle YNO$ adalah sudut siku-siku, sehingga sepasang sudut yang berhadapan adalah merupakan sudut pelurus yaitu:

   Pada $OKXM$

   $$\angle XKO + \angle XMO = 180^0 ,$$

   sehingga dari Teorema tali busur diperoleh bahwa $\square OKXM$ adalah segiempat tali busur sehingga diperoleh

   $$\angle KM \cong \angle XOM \qquad \text{. . . . (6.1.10)}$$

   Kemudian pada $\square ONYM$

   $\angle YNO + \angle YMO = 180^0$ sehingga $\square ONYM$ adalah juga segiempat tali busur, maka diperoleh juga

   $$\angle YNM \cong \angle YOM \qquad \text{. . . .(6.1.11)}$$

   Oleh karena titik X dan Y berturut-turut terletak diantara AK dan CN , maka persamaan (6.1.10) dan (6.1.11) diperoleh

$\angle AKM \cong \angle XOM$ ....(6.1.12)

$\angle CNM \cong \angle YOM$ ....(6.1.13)

5. Perhatikan ΔXOM dan ΔYOM . Dari persamaan (6.1.9), (6.1.12), dan (6.1.13) maka diperoleh

   $\angle XOM \cong \angle YOM$ (Sd)

   Dan MO kongruen diri sendiri yaitu

   $MO = MO$ (S)

   Dan juga karena $OM \perp XY$ maka

   $\angle XMO \cong \angle YMO$ (Sd)

   Maka dari Postulat *Sd*-*S*-*Sd* diperoleh bahwa

   $\Delta XOM \cong \Delta YOM$

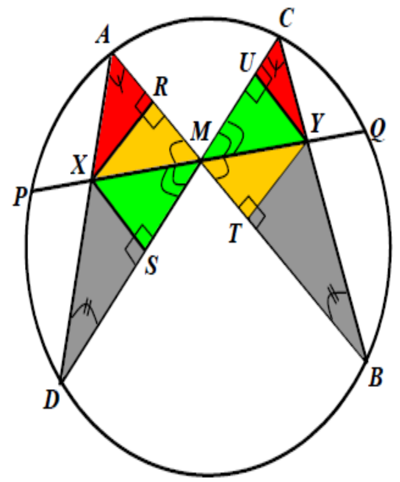
   Sehingga diperoleh sisi yang berkorespondensi kongruen yaitu

   $MX \cong MY$

   Oleh karena $MX \cong MY$ maka $MX = MY$, sehingga M titik tengah dari XY ♥

***Alternatif* 2.** *Dengan kesebangunan antara dua segitiga*.

Perhatikan gambar 6.1.6, misalkan ditarik garis yang tegak lurus dari X ke AB dititik R dan ke CD dititik S. Misalkan juga ditarik garis yang tegak lurus dari Y ke AB di titik T dan ke CD di titik U, sehingga diperoleh beberapa segitiga yang siku-siku, yaitu ΔMRX, ΔMSX, ΔMTY, ΔMUY, ΔARX, ΔCUY, ΔDSX, ΔBTY. Misalkan :



Gambar 6.1.6.

$MP = MQ = a$, $MX = x$ dan $MY = y$ dan juga $XR = x_1$, $YT = y_2$ $XS = x_2$ dan YU = y_2, Akan dibuktikan $MX = MY$ dengan langkah berikut:

Pada ΔMRX dan ΔMTY .

Karena kedua segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku maka

$$\angle MRX \cong \angle MTY$$

Yang mengakibatkan

$$\angle XMR \cong \angle YMT$$

Sehingga dari Akibat kesebangunan Sd-Sd diperoleh

$$\Delta MRX \sim \Delta MTY$$

Sehingga diperoleh perbandingan sisi-sisinya yaitu

$$\frac{MX}{MY} = \frac{XR}{YT}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} \qquad \text{. . . .(6.1.14)}$$

Pada ΔMSX dan ΔMUY

Karena kedua segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku maka

$$\angle MSX = \angle MUY$$

Sehingga kembali dari Akibat kesebangunan Sd-Sd diperoleh

$$\Delta MSX \sim \Delta MUY$$

Sehingga diperoleh perbandingan sisi-sisinya yaitu

$$\frac{MX}{MY} = \frac{XS}{YU}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2} \qquad \text{. . . .(6.1.15)}$$

Pada ΔARX dan ΔCUY

Karena kedua segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku maka

$$\angle ARX = \angle CUY$$

Sehingga dari Akibat kesebangunan Sd-Sd diperoleh

$$\Delta ARX \sim \Delta CUY$$

Sehingga diperoleh perbandingan sisi-sisinya yaitu

$$\frac{XR}{YU} = \frac{AX}{CY}$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{AX}{CY} \qquad (6.1.16)$$

Pada ΔDSX dan ΔBTY. Karena kedua segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku maka

$$\angle DSX = \angle BTY$$

Sehingga dari Akibat kesebangunan Sd-Sd diperoleh

$$\Delta DSX \sim \Delta BTY$$

Sehingga diperoleh perbandingan sisi-sisinya yaitu

$$\frac{XS}{YT} = \frac{XD}{YB}$$

$$\frac{x_2}{y_1} = \frac{XD}{YB} \qquad ....(6.1.17)$$

Kalikan persamaan (6.1.14) dan (6.1.15)

$$\frac{x}{y}.\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}.\frac{x_2}{y_2}$$

$$\frac{x^2}{y^2}. = \frac{x_1.x_2}{y_1.y_2}. \qquad .... (6.1.18)$$

Kalikan persamaan (6.1.16) dan (6.1.17)

$$\frac{x_1}{y_2}.\frac{x_2}{y_1} = \frac{AX}{CY}.\frac{XD}{YB} \qquad (6.1.19)$$

Dari persamaan (6.1.18) dan (6.1.19) diperoleh

$$\frac{x^2}{y^2}. = \frac{AX}{CY}.\frac{XD}{YB}. \qquad ..... (6.1.20)$$

Pada tali busur AD , BC dan PQ.

Tali busur AD dan PQ berpotongan di X sehingga

$$AX\ .\ XD = PX\ .\ XQ \qquad \text{. . . . . (6.1.21)}$$

Dan tali busur BC dan PQ berpotongan di Y sehingga

$$CY\ .YB = PY\ .YQ \qquad \text{. . . . . . (6.1.22)}$$

substitusi persamaan (6.1.21) dan (6.1.22) ke persamaan (6.1.20) diperoleh

$$\frac{x^2}{y^2}. = \frac{PX}{PY}.\frac{XQ}{YQ}.$$

$$\frac{x^2}{y^2}. = \frac{(a-x)}{(a+y)}.\frac{(a+x)}{(a-y)}.$$

$$\frac{x^2}{y^2}. = \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}.$$

$$x^2\left(a^2-y^2\right) = y^2\left(a^2-x^2\right)$$

$$x^2a^2 - x^2y^2 = y^2a^2 - y^2x^2$$

$$\frac{1}{a^2}\left(x^2a^2 - x^2y^2\right) = \frac{1}{a^2}\left(y^2a^2 - y^2x^2\right)$$

$$x^2 - \frac{x^2y^2}{a^2} = y^2 - \frac{x^2y^2}{a^2}$$

$$x^2 = y^2$$

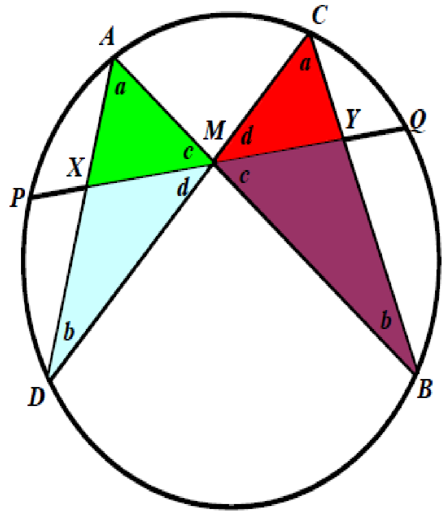
$$\left(x^2 - y^2\right) = 0$$

$$(x-y).(x+y)=0$$

Maka diperoleh akar-akar persamaannya yaitu $x = y$ dan $x = -y$. Karena x dan y merupakan panjang suatu segmen garis dan bernilai positif maka diambil $x = y$ atau $MX = MY$. ♥

***Alternatif* 3.** *Dengan Aturan Sinus*

Perhatikan gambar 6.1.7. Akan dibuktikan $MX = MY$ dengan menggunakan Aturan sinus untuk :



Gambar 6.1.7.

Pada ΔXAM.

$$\frac{\sin(a)}{MX}.=\frac{\sin(c)}{XA}..$$

$$\sin(a).=\frac{MX.\sin(c)}{XA}.. \qquad (6.1.23)$$

Pada ΔYCM .

$$\frac{\sin(a)}{MY}.=\frac{\sin(d)}{CY}..$$

$$\sin(a).=\frac{MY.\sin(d)}{CY}.. \qquad ..... (6.1.24)$$

Pada ΔYMB.

$$\frac{\sin(b)}{MY}.=\frac{\sin(c)}{YB}..$$

$$\sin(b).=\frac{MY.\sin(c)}{YB}.. \qquad ..... (6.1.25)$$

Pada ΔXMD.

$$\frac{\sin(b)}{MX}. = \frac{\sin(d)}{XD}..$$

$$\sin(b). = \frac{MX.\sin(d)}{XD}.. \qquad \text{. . . . . (6.1.26)}$$

Dari persamaan (6.1.23) dan (6.1.24)

$$\frac{MX.\sin(c)}{XA}. = .\frac{MY.\sin(d)}{CY} \qquad (6.1.27)$$

Substitusi persamaan (6.1.25) dan (6.1.26) ke persamaan (6.1.27), diperoleh

$$\frac{MX\left(\frac{YB\sin(b)}{MY}\right)}{XA} = \frac{MY\left(\frac{XD\sin(b)}{MX}\right)}{CY}$$

$$\frac{CY.MX.YB.\sin(b)}{MY} = \frac{XA.MY.XD,\sin(b)}{MX} \qquad \text{. . . . . (6.1.28)}$$

Kalikan kedua ruas pada persamaan (6.1.28) dengan $\frac{1}{\sin(b)}$ sehingga diperoleh

$$\frac{CY.MX.YB.}{MY} = \frac{XA.MY.XD}{MX}$$

$$CY.MX^2.YB = XA.MY^2.XD$$

$$\frac{.MX^2.}{MY^2} = \frac{XA..XD}{CY.YB} \qquad \text{. . . . . (6.1.29)}$$

Perhatikan tali busur AD , BC , dan PQ. Karena tali busur AD dan PQ berpotongan di X, maka

$$XA.\,XD = PX\,.QX$$

Dan juga tali busur *BC* dan *PQ* berpotongan di *Y*, maka

$CY\,.YB = PY\,.QY$

Sehingga dari persamaan (6.1.28) diproleh

$$\frac{.MX^{2}.}{MY^{2}} = \frac{PX.QX}{PY.QY} \qquad \text{. . . . . (6.1.30)}$$

Dan pada tali busur *PQ,*

$$PX = (MP - MX) \quad QX = (MQ + MX) \quad PY = (MQ - MY)$$

Sehingga dari persamaan (6.1.30) diperoleh

$$\frac{.(MX)^{2}.}{(MY)^{2}} = \frac{(MP-MX).(MQ+MX)}{(MQ-MY).(MP+MY)}$$

$$(MQ-MY).(MP+MY)(MX)^{2} = (MY)^{2}(MP-MX).(MQ+MX)$$

$$\frac{(MP-MX).(MQ+MX)..}{(MX)^{2}} = \frac{(MQ-MY).(MP+MY)}{(MY)^{2}}$$

$$\frac{MP.MQ - MP.MX - MX.MQ + MX)^{2}..}{(MX)^{2}} = \frac{MQ.MP - MQ.MY - MY.MP + (MY)^{2}}{(MY)^{2}}$$

Karena *MP* = *MQ* maka diperoleh

$$\frac{(MP)^{2} - .(MX)^{2}..}{(MX)^{2}} = \frac{(MP)^{2} - .(MY)^{2}}{(MY)^{2}}$$

$$\frac{(MP)^{2}..}{(MX)^{2}} - 1 = \frac{(MP)^{2}}{(MY)^{2}} - 1$$

$$\frac{(MP)^{2}.}{(MX)^{2}} = \frac{(MP)^{2}}{(MY)^{2}}$$

$$\frac{(MY)^2.}{(MX)^2}=1$$

$$(MX)^2=(MY^2)$$

MX = MY

Jadi terbukti bahwa *M* adalah titik tengah dari *XY* ♥

***Alternatif* 4.** *Dengan perbandingan luas segitiga*

Perhatikan gambar 6.1.8, dengan menggunakan perbandingan luas segitiga yang mempunyai sepasang sudut yang kongruen akan dibuktikan

$$MX = MY\ .$$

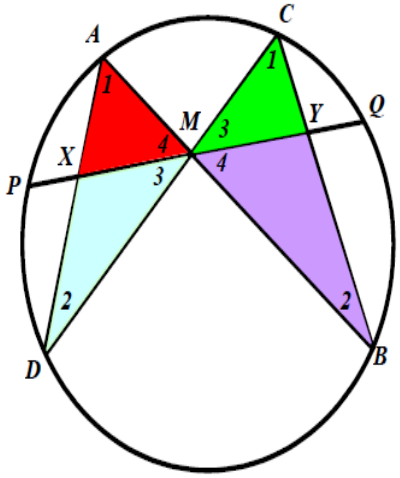
Pada ΔXAM dan ΔYCM

diperoleh

$$\angle XAM \cong \angle\ YCM$$

Sehingga perbandingan luasnya adalah

$$\frac{L\ \Delta XAM}{L\ \Delta MCY}=\frac{AX.AM}{CM.CY} \qquad (6.1.31)$$



Gambar 6.1.8.

Pada ΔCMY dan ΔDMX, diperoleh

$$\angle CMY \cong \angle DMX$$

Sehingga perbandingan luasnya adalah

$$\frac{L\ \Delta CMY}{L\ \Delta DMX} = \frac{CM.MY}{DM.MX} \qquad \text{. . . . (6.1.32)}$$

Pada ΔXDM dan ΔMBY, diperoleh

$$\angle XDM \cong \angle MBY$$

Sehingga perbandingan luasnya adalah

$$\frac{L\ \Delta XDM}{L\ \Delta MBY} = \frac{DX.DM}{BM.BY} \qquad \text{. . . . (6.1.33)}$$

Pada ΔBMY dan ΔAMX, diperoleh

$$\angle BMY \cong \angle AMX$$

Sehingga perbandingan luasnya adalah

$$\frac{L\ \Delta BMY}{L\ \Delta AMX}=\frac{BM.MY}{AM.MX} \qquad .....(6.1.34)$$

Kalikan persamaan (6.1.31), (6.1.32), (6.1.33), dan (6.1.34)

$$\frac{L\ \Delta XAM}{L\ \Delta MCY}\cdot\frac{L\ \Delta CMY}{L\ \Delta DMX}\cdot\frac{L\ \Delta XDM}{L\ \Delta MBY}\cdot\frac{L\ \Delta BMY}{L\ \Delta AMX}=\frac{AX.AM}{CM.CY}\cdot\frac{CM.MY}{DM.MX}\cdot\frac{DX.DM}{BM.BY}\cdot\frac{BM.MY}{AM.MX}$$

$$\frac{L\ \Delta XAM}{L\ \Delta MCY}\cdot\frac{L\ \Delta CMY}{L\ \Delta DMX}\cdot\frac{L\ \Delta XDM}{L\ \Delta MBY}\cdot\frac{L\ \Delta BMY}{L\ \Delta AMX}=\frac{AX.DX.(MY)^2}{.CY.BY.(MX)^2}. \qquad (6.1.35)$$

Oleh karena

$L\Delta XAM = L\Delta AMX$, $L\Delta CMY = L\Delta MCY$, $L\Delta XDM = L\Delta DMX$,

dan

$L\Delta BMY = L\Delta MBY$

maka pada ruas kiri persamaan (6.1.35) diperoleh

$$\frac{AX.DX.(MY)^2}{.CY.BY.(MX)^2}.=1$$

$$AX.DX.(MY)^2 = CY.BY.(MX)^2$$

$$\frac{AX.DX.}{.CY.BY.}.=\frac{(MX)^2}{(MY)^2} \qquad .....(6.1.36)$$

Karena tali busur *AD* dan *PQ* berpotongan di *X*, maka

$AX\ .\ DX = PX\ .QX$

Dan juga tali busur *BC* dan *PQ* berpotongan di *Y*, maka

$CY\ .\ BY = PY\ .QY$

Sehingga dari persamaan (6.1.36) diperoleh

$$\frac{PX.QX.}{.PY.QY.}. = \frac{(MX)^2}{(MY)^2} \qquad \text{. . . . .(6.1.37)}$$

Karena titik *X* dan *Y* berada diantara *PQ* maka,

$PX = (MP- MX)$, $QX = (MQ + MX)$,

$PY = (QM - MY)$, $QY = (MP + MY)$

Sehingga dari persamaan (6.1.37) diperoleh

$$\frac{(MP - MX).(MQ + MX).}{.(QM - MY).(MP + MY).}. = \frac{(MX)^2}{(MY)^2}$$

$$\frac{(MP - MX).(MQ + MX).}{(MX)^2..}. = \frac{(QM - MY).(MP + MY)}{(MY)^2}$$

Karena *MP* = *MQ*, maka diperoleh

$$\frac{(MP)^2. - (MX)^2.}{(MX)^2..}. = \frac{(MP)^2. - (MY)^2}{(MY)^2}$$

$$\frac{(MP)^2.}{(MX)^2..} - 1. = \frac{(MP)^2.}{(MY)^2} - 1$$

$$\frac{(MP)^2.}{(MX)^2..} = \frac{(MP)^2.}{(MY)^2}$$

$$\frac{(MY)^2.}{(MX)^2..} = 1$$

$$(MY)^2 = (MX)^2$$

$MX = MY$

Jadi M adalah juga titik tengah dari XY . ♥

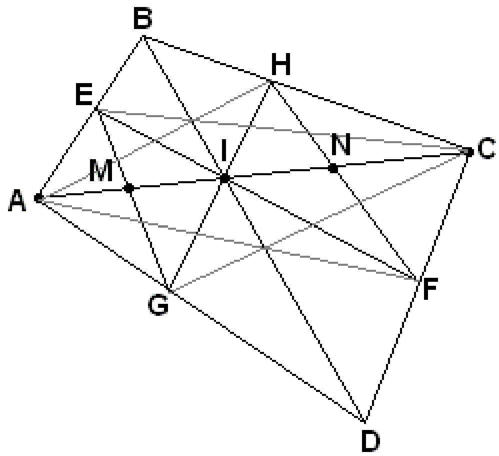
6.2. *Teorema Butterfly untuk segiempat.*

Kalau di atas adalah teorema butterfly yang diberlakukan pada suatu lingkaran. Sebenarnya pada lingkaran ini masih banyak bentuk teorema butterfly yang lain, misalnya bagaimana kalau garisnya kita kembangkan kearah luar lingkaran atau dalam suatu lingkaran terdapat dua butterfly atau pada dua buah lingkaran yang sepusat terdapat satu butterfly yang sama. Berikut ini akan diberikan bentuk lain dari teorema butterfly yaitu bagaimana butterfly kalau diberlakukan pada suatu segiempat.

***Teorema* 6.2.1.** Misalkan $ABCD$ suatu segiempat konvek. I merupakan titik potong diagonal AC dengan BD. Buat dua buah garis EF dan HG sehingga memotong sisi-sisi segiempat di titik E, F, G dan H. Misalkan M dan N perpotongan EG dan FH. Maka berlaku

$$\frac{1}{IM} - \frac{1}{IA} = \frac{1}{IN} - \frac{1}{IC}$$

Bukti : Berdasarkan soal latihan 14 bab 6, nomor 12 dan 14 maka diperoleh :



gambar 6.2.1

$$\frac{AM}{IM} = \frac{L\Delta AEG}{L\Delta IEG}$$

$$\frac{IN}{CN} = \frac{L\Delta IHF}{L\Delta CHF}$$

$$\frac{IC}{IA} = \frac{L\Delta CBD}{L\Delta ABD}$$

$$\frac{IE}{IF}.\frac{IG}{IH} = \frac{L\Delta IEG}{L\Delta IHF}$$

$$\frac{CH}{BC}.\frac{CF}{CD} = \frac{L\Delta CHF}{L\Delta CBD}$$

$$\frac{AB}{AE}.\frac{AD}{AG} = \frac{L\Delta ABD}{L\Delta AEG}$$

$$\frac{IF}{IE}. = \frac{L\Delta AFC}{L\Delta AEC} \qquad \frac{BC}{CH} = \frac{L\Delta ABC}{L\Delta AHC}$$

$$\frac{IH}{IG}. = \frac{L\Delta AHC}{L\Delta AGC} \qquad \frac{AE}{AE} = \frac{L\Delta AEC}{L\Delta ABC}$$

$$\frac{CD}{CF} = \frac{L\Delta CAD}{L\Delta AFC} \qquad \frac{AG}{AD} = \frac{L\Delta AEG}{L\Delta CAD}$$

Kalau kita kalikan kesemua persamaan di atas maka akan diperoleh

$$\frac{AM}{IM}.\frac{IN}{CN}.\frac{IC}{IA} = 1$$

Yang akan menghasilkan bentuk

$$\frac{1}{IM} - \frac{1}{IA} = \frac{1}{IN} - \frac{1}{IC}$$

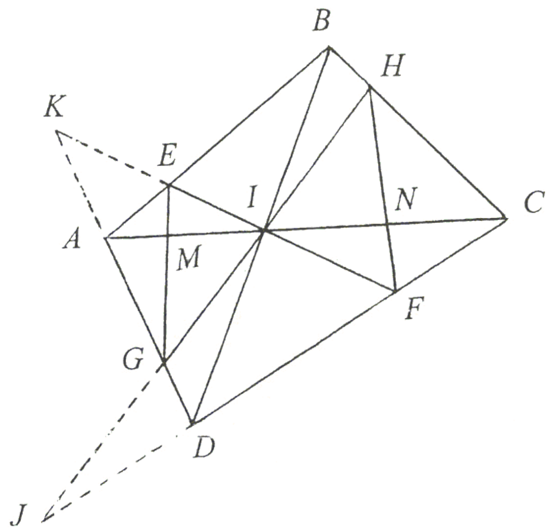
Kalau bukti teorema 6.2.1 di atas, kita gunakan konsep luas, akan tetapi kita mesti didukung oleh dua buah konsep lain yang pada pembahasan di atas kebetulan dimasukkan dalam soal nomor 12 dan 15 pada bab 6. Berikut ini akan dibuktikan teorema butterfly pada segiempat dengan menggunakan konsep dari Teorema Menelaus. Tentunya gambar yang digunakan dalam proses pembuktiannya akan berbeda (perhatikan gambar 6.2.2).

***Cara* 2 *Bukti Teorema* 6.2.2.**

Perhatikan ΔBAD dan ΔCAD dengan garis transfersal *EIF*, maka berdasarkan teorema Menelaus diperoleh :

$$\frac{BE}{EK}.\frac{AK}{KD}.\frac{DI}{IB} = -1$$

$$\frac{CF}{FD}.\frac{DK}{KA}.\frac{AI}{IC} = -1$$



gambar 6.2.2

kalau kedua persamaan di atas dikalikan maka akan diperoleh

$$\frac{BE}{EK}.\frac{DI}{IB}\frac{CF}{FD}.\frac{AI}{IC} = 1$$

atau

$$IA.ID.\frac{BE}{EA} = IC.IB.\frac{FD}{CF}. \qquad \text{. . . . (6.2.1)}$$

Dengan cara yang sama untuk sumbu transversal *HIG* terhadap ΔBDC dan ΔADC dipereoleh

$$\frac{AG}{GD}.\frac{DI}{IB}\frac{BH}{HC}.\frac{CI}{IA}= 1$$

Atau

$$ID.IC.\frac{BH}{HC}=IB.IA.\frac{DG}{GA} \qquad .\ .\ .\ .\ (6.2.2)$$

Perhatikan bahwa baik (6.2.1) atau (6.2.2) melibatkan *IM*, *MA*, *IN*, atau *NC*. Hubungan antar segmen garis ini dan lainnya pada gambar akan ditetapkan sebagai berikut (perhatikan gambar 6.2.3.

Misalkan L dan P merupakan perpotongan garis *FH* dan *EG* terhadap *BG*. Kemudian perhadikan ΔCDI dengan transversal garis *FH*, maka diperoleh

$$\frac{DF}{FC}.\frac{CN}{NI}.\frac{IL}{LD}= -1$$

Atau

$$\frac{DF}{FC}=-\frac{IN}{NC}.\frac{LD}{DI} \qquad .\ .\ .\ .\ .(6.2.3)$$

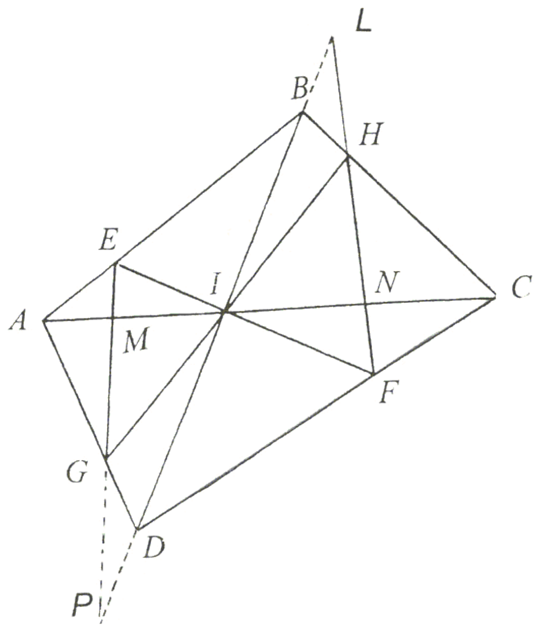
dengan cara yang sama untuk ΔIBC akan diperoleh

$$\frac{BH}{HC}.\frac{CN}{NI}.\frac{IL}{LB} = -1$$

atau

$$\frac{BH}{HC} = -\frac{NI}{CN}.\frac{LB}{LI} \qquad (6.2.4)$$

maka



gambar 6.2.3

$$IB.\frac{DF}{FC} + DI.\frac{BH}{HC} = IB.\frac{IN}{NC}.\frac{LD}{IL} + DI.\frac{NI}{CN}.\frac{LB}{IL}$$

$$= \frac{NI}{CN}.\frac{IB.ID+DI.LB}{IL}$$

$$= \frac{NI}{CN}.\frac{IB.(DI+IL)+DI.(IL-IB)}{IL}$$

$$= DB.\frac{NI}{CN} \qquad \ldots. (6.2.5)$$

Kemudian gunakan lagi teorema Menelaus untuk ΔAIB dan ΔADI, maka diperoleh

$$\frac{BE}{EA} = -\frac{MI}{AM}.\frac{PB}{IP} \qquad \ldots. (6.2.6)$$

dan

$$\frac{DG}{GA} = -\frac{MI}{AM}.\frac{PD}{IP} \qquad .\,.\,.\,.\,(6.2.7)$$

maka

$$IB.\frac{DG}{GA} + DI.\frac{BE}{EA} = \frac{MI}{MA}.\frac{IB.PD+PB.ID}{IP}$$

$$= \frac{MI}{MA}.\frac{BI.(IP-ID)+ID.(PI+IB)}{IP}$$

$$= BD.\frac{IM}{MA} \qquad .\,.\,.\,.\,.(6.2.8)$$

Kalaikan persamaan (6.2.5) dengan *IC*, maka diperoleh

$$IC.IB.\frac{DF}{FC} + IC.DI.\frac{BH}{HC} = IC.DB.\frac{NI}{CN} \qquad .\,.\,.\,.\,.\,(6.2.9)$$

Kemudian kalikan pula persamaan (6.2.8) dengan *IA*, maka diperoleh

$$IA.IB.\frac{DG}{GA} + IA.DI.\frac{BE}{EA} = IA.BD.\frac{IM}{MA} \qquad .\,.\,.\,.\,.\,.\,(6.2.10)$$

Akhirnya bila dikurangkan persamaan (6.2.10) dengan (6.2.9) serta dari persamaan (6.2.1) dan (6.2.2) akan diperoleh

$$BD.\left(\frac{IC.IN}{NC} + \frac{IA.IN}{MA}\right) = 0$$

$$\frac{IA-IM}{IA.IM} = \frac{IC-IN}{IC.IN}$$

Yang selanjutnya menghasilkan

$$\frac{1}{IM} - \frac{1}{IA} = \frac{1}{IN} - \frac{1}{IC}$$

Teorema Butterfly Dengan Menelaus

Berikut ini diberikan sebagai tambahan untuk topic ini yaitu teorema butterfly dengan menggunakan Menelaus. Topik ini dikatakan sebagai tambahan, karena teorema agar teorema Menelaus bisa digunakan, maka butterfly akan dikontruksi pada dua buah garis lurus.

Teorema 6.2.3. diberikan dua buah garis l dan l', titik A berada pada garis l dan titik B pada garis l', ambil sebarang titik P pada garis AB, titik C dan F berada pada garis l dan titik D dan E pada garis l', misalkan $X = CE \cap AB$ dan $Y = FD \cap AB$. Maka $PA = PB$ menyebabkan $PX = PY$.

Bukti : Perhatikan ΔOFE dengan garis transversal CPD, maka dengan menggunakan teorema Menelaus diperoleh

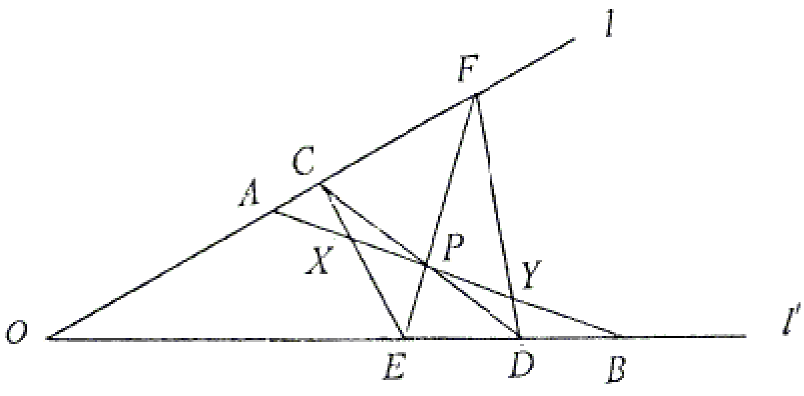
$$\frac{OC}{CF} \cdot \frac{FP}{PE} \cdot \frac{ED}{DO} = 1$$

Untuk ΔOAB dengan garis transversal masih CPD, maka diperoleh

$$\frac{OD}{DB} \cdot \frac{BP}{PA} \cdot \frac{AC}{CO} = 1$$

Kemudian untuk ΔBPE dengan garis transversal FYD diperoleh

$$\frac{FY}{YB} \cdot \frac{BD}{DE} \cdot \frac{EF}{FP} = 1$$



Gambar 6.2.4

Terahir untuk Δ*FAP* dengan garis transversal *CXE* diperoleh

$$\frac{PE}{EF} \cdot \frac{FC}{CA} \cdot \frac{AX}{XP} = 1$$

Apabila keempat persamaan di atas dikalikan, maka akan diperoleh

$$\frac{PY}{YB} \cdot \frac{AX}{XP} \cdot \frac{BP}{PA} = 1$$

Karena *PB* = *PA* yang mengakibatkan

$$\frac{YB}{PY} = \frac{AX}{XP}$$

$$\frac{YB+PY}{PY} = \frac{AX+XP}{XP}$$

$$PA.PY = PB.PX$$

Maka diporoleh *PY* = *PX*.

6.3. *Teorema Butterfly pada Hyperbola dan Elips*

Berikut ini akan diberikan bentuk sederhana dari teorema butterfly pada parabola, akan tetapi untuk menambah khasanah/pengayaan proses pembuktian. Maka buktinya akan diberikan seraca analitik. Pada dasarnya pembuktian secara analitik ini adalah cara yang lebih sederhana dalam proses pembuktian teorema butterfly pada hyperbola. Karena kalau kita ingin membuktikan dengan menggunakan konsep luas daerah, mungkin sedikit merepotkan namun tetap bisa dilakukan, sehingga proses pembuktian dengan menggunakan konsep luas atau cara lainnya dapat sebagai latihan bagi pembaca. Teroema butterfly yang diberikan disini adalah dalam untuk parabola dengan bentuk umum

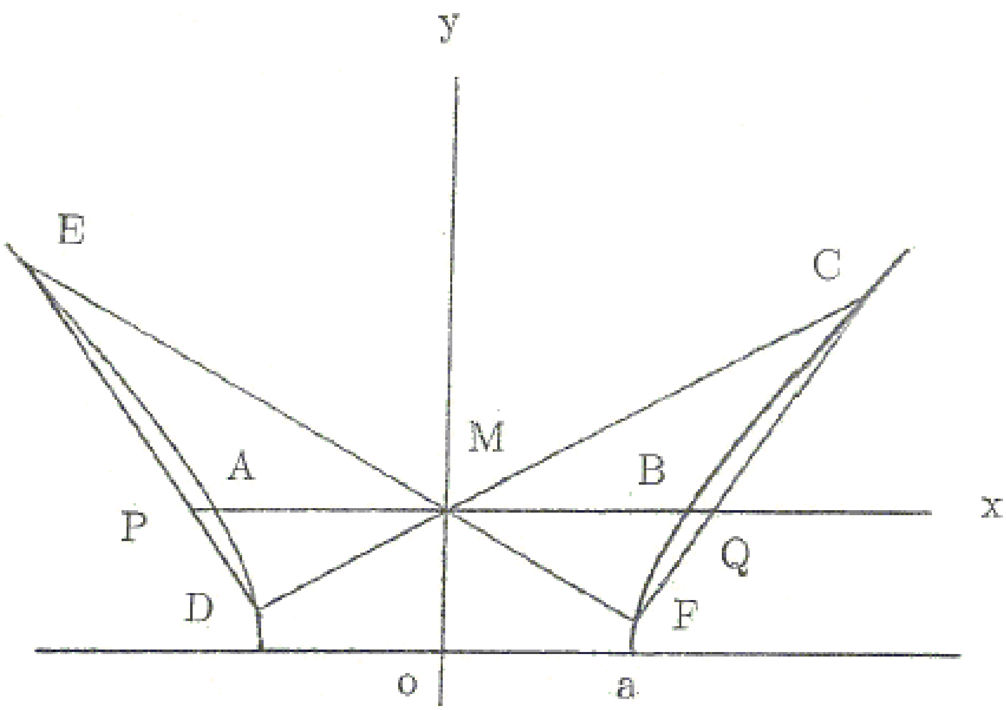
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

***Teorema* 6.3.1**. Misalkan $M(0,k)$ titik tengah dari busur AB yang sejajar dengan sumbu mayor. Melalui titik M dibuat dua buah garis CD dan EF yang memotong kedua busur parabola. CD memotong AB dititik P dan EF memotong AB dititik Q. Maka M adalah titik tengah dari PQ.

Bukti : perhatikan gambar 6.3.1 di bawah ini

Melalui titik M dibuat sumbu X dan sumbu Y, sehingga persamaan parabolanya menjadi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y+k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{.....(6.3.1)}$$



Gambar 6.3.1

Atau dapat juga ditulis dalam bentuk

$$b^2x^2 - a^2(y + k)^2 - a^2b^2 = 0 \qquad .....(6.3.2)$$

Misalkan koordinat baru dari titik-titik tersebut $M = (0,0)$, $C = (x_1, y_1)$, $D = (x_2, y_2)$, $E = (x_3, y_3)$, $F = (x_4, y_4)$, $P = (p, 0)$, $Q = (q, 0)$, sedangkan persamaan garis DC dan EF masing-masing adalah $y = m_1x$ dan $y = m_2x$. Subsitusikan m_1x pada persamaan (6.3.2) maka diperoleh

$$(b^2 - a^2m_1^2)\,x^2 - 2a^2m_1kx - a^2\,(b^2 + k^2) = 0 \qquad ..... \ (6.3.3)$$

Persamaan (6.3.3) merupakan persamaan kuadrat. Misalkan akarnya adalah x_1 dan x_2. Karena $y = m_1x$ adalah persamaan garis yang melalui DC, maka x_1 dan x_2 merupakan absis dari koordinat titik C dan D. yang mana

$$x_1 + x_2 = \frac{-2a^2 m_1 k}{(b^2 - a^2 m_1^2)} \qquad \text{dan} \qquad x_1 . x_2 = \frac{-a^2(b^2 + k^2)}{(b^2 - a^2 m_1^2)}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{m x_1 . x_2}{x_1 + x_2} = \frac{-(b^2 + k^2)}{2k} \qquad \text{. . . . . (6.3.4)}$$

Dengan cara yang sama kalau disubsitusikan $y = m_2 x$ ke persamaan (6.3.3) maka akan diperoleh

$$\frac{m x_3 . x_4}{x_3 + x_4} = \frac{-(b^2 + k^2)}{2k} \qquad \text{. . . . . . (6.3.5)}$$

Yang mana x_3 dan x_4 adalah absis dari koordinat titik E dan F. Dari persamaan (6.3.4) dan (6.3.5) diperoleh

$$\frac{-x_2 . x_3}{m_1 x_2 - m_2 x_3} = \frac{x_1 . x_4}{m_1 x_1 - m_2 x_4} \qquad \text{. . . . . .(6.3.6)}$$

Karena C, Q dan F adalah segaris (collinear), jadi kemiringan dari QC dan GQ adalah sama, jadi

$$\frac{y_1}{x_1 - q} = \frac{-y_4}{q - x_4} \qquad \text{. . . . . . (6.3.7)}$$

Sehingga

$$\frac{q - x_1}{q - x_4} = \frac{y_1}{y_4} = \frac{m_1 x_1}{m_2 x_4} \qquad \text{. . . . . . (6.3.8)}$$

Dengan $q \neq x_1$ dan $q \neq x_4$. Maka penyelesaian persamaan (6.3.8) untuk q adalah

$$q = \frac{(m_1 - m_2)x_1x_4}{m_1x_1 - m_2x_4} \qquad \text{......}(6.3.9)$$

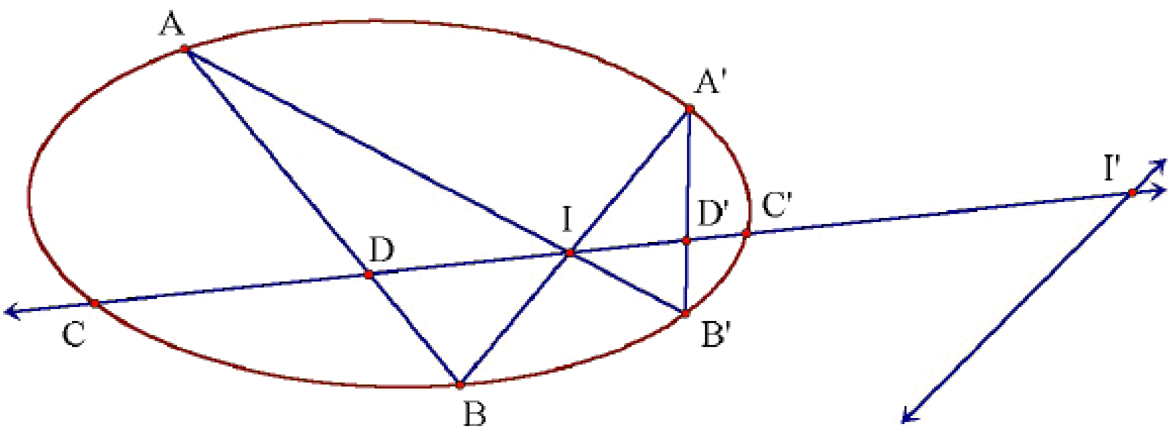
Dengan cara yang sama untuk kemiringan dari *PE* dan *DP* diperleh

$$p = \frac{(m_1 - m_2)x_2x_3}{m_1x_2 - m_2x_3} \qquad \text{......}(6.3.10)$$

Dari (6.3.9) dan (6.3.10) dan dengan memasukkan ke dalam persamaan (6.3.6) diperoleh $p = q$, yang bermakna $PM = MQ$.

Teorema Butterfly Pada Elips

Buatlah sebarang garis AB' dan garis $A'B$ pada sebarang elips dan misalkan I merupakan titik potong dari garis AB' dan $A'B$. kemudian melalui I dibuat garis yang memotong elips pada titik C dan C'. katakana D dan D' masing-masing titik potong garis CC' dengan garis AB dan $A'B'$, untuk lebih lengkapnya perhatikan gambar 6.3.2 di bawah ini.



Gambar 6.3.2

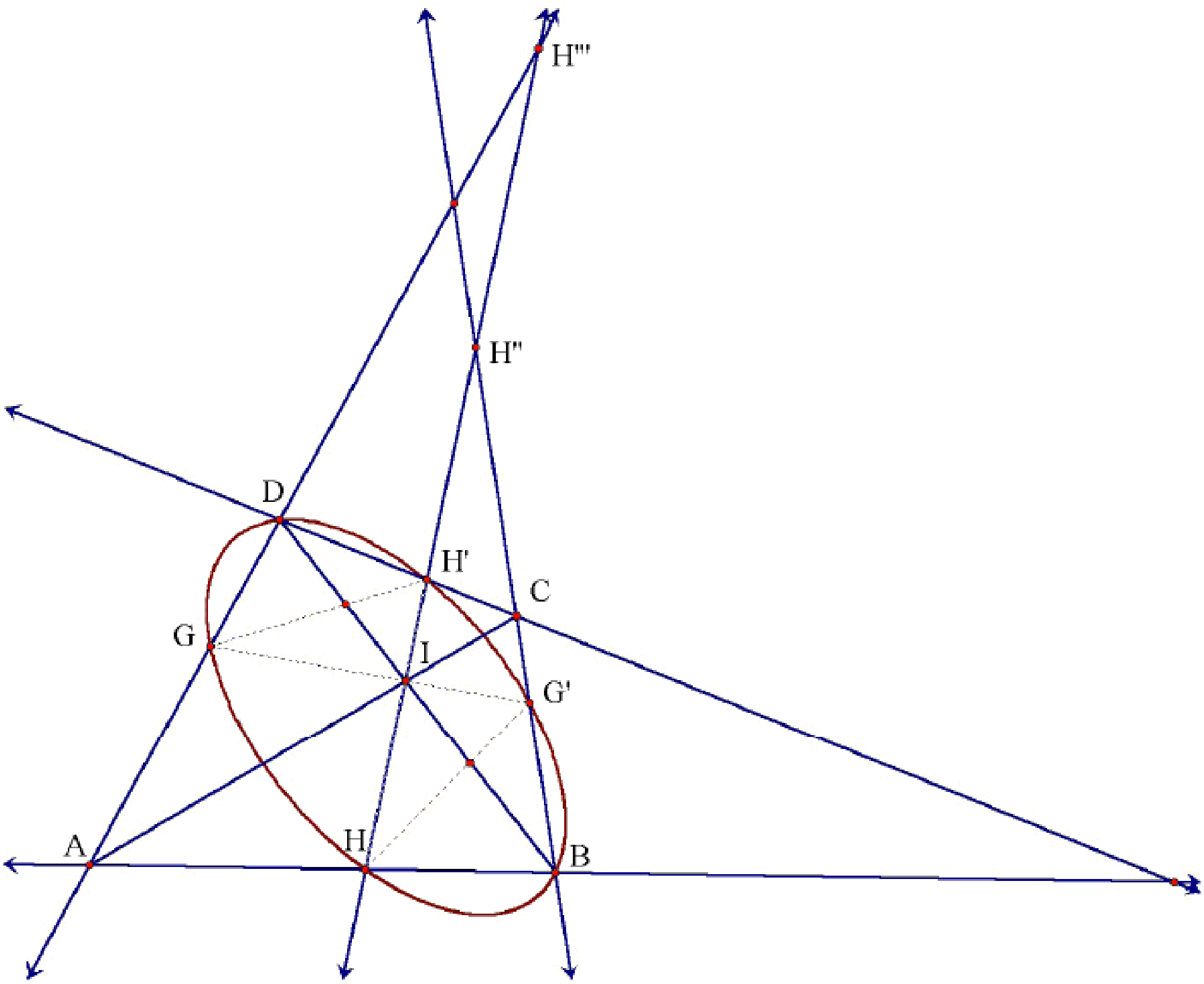
Jadi I tidak merupakan titik tengah dari garis manapun, maka yang dapat dilakukan adalah mengkontruksi kesamaan seperti kesamaan teorema butterfly pada segiempat. Maka tugas selanjutnya adalah menentukkan titik I' pada perpanjangan CC', yang mana I adalah titik tengah dari CI'. Maka bentuk kesamaan dari teorema Butterfly pada elips di atas adalah

$$\frac{1}{IC} + \frac{1}{IC'} = \frac{1}{ID} + \frac{1}{ID'} \qquad \ldots\ldots (6.3.11)$$

atau

$$\frac{1}{IC} - \frac{1}{IC'} = \frac{1}{ID} - \frac{1}{ID'} \qquad \ldots\ldots (6.3.12)$$

Hanya untuk pemikiran saja, di bawah ini diberikan gambar perumuman terorema Butterfly pada Elips. Akan tetapi pembahasannya tidak diberikan dalam buku ini. Gambar ini diberikan hanya untuk memotivasi pembaca agar dapat membahas lebih jauh tentang pengembangan teorema Butterfly pada elips tersebut

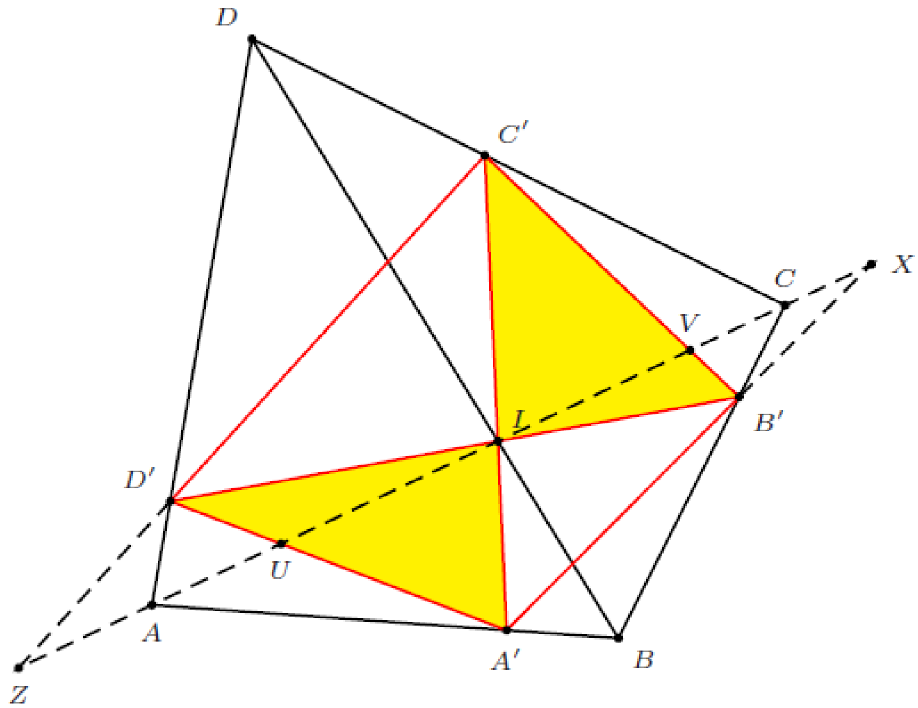


Gambar 6.3.3

Soal-latihan 17.

1. Berikan bukti alternatif lain lain dari teorema 6.2.1
2. Jika titik A =(0,0), B = (10,2), C = (12,6) dan D =(6, 12). Buat titik E sehingga $AE = ED$ dan titik F sehingga $BF = FC$, titik G sehingga $AG = \frac{1}{2} GB$ dan titik H sehingga $CH = \frac{1}{2} HD$. Tunjukkan secara analitik bahwa teorema Butterfly berlaku untuk segiempat *AMCD.*
3. Pada parabola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$, dibuat titik $A = \left(\sqrt{32}, 5\right) dan\ B = (-\sqrt{32}, 5)$ sedangkan titik $C = (x_c, y_c)$, $D = (x_d, y_d)$, $E = (x_e, y_e)$ dan $F = (x_f, y_f)$. tentukan secara analitik koordinat titik P dan Q sehingga teorema Butterfly berlaku pada parabola tersebut. Dan hitung juga panjang *PM.*
4. Perhatikan kembali gambar 6.1.6. Jika perpajangan garis AC dan BD memotong garis PQ di titik K dan L, tunjukkan bahwa M juga merupakan titik tengah dari KL.
5. Andaikan ABCD segiempat siklis, AC dan BD berpotongan di M. Terdapat 2 titik X ∈ AB dan Y ∈ CD sedemikian sehingga XM = MY dan X,M,Y kolinear. Jika XY diperpanjang ke kanan dan kiri hingga memotong lingkaran luar ABCD di P_1 dan P_2, maka $P_1M = P_2M$. kalau ia buatikan dan kalau tidak beri contoh penyangkalnya

6. Jika titik P berada di luar lingkaran dan dari titik P dibuat garis yang menyinggung lingkaran tersebut dititik T dan B. Jika AB adalah diameter lingkaran dan $TH \perp AB$. Tunjukkan bahwa AP merupakan bisector TH.
7. Misalkan jari-jari lingkaran dalam ΔABC adalah I, titik singgung lingkaran tersebut pada sisi BC adalah X, misalkan A' titik tengah sisi BC, tunjukkan bahwa perpanjangan $A'I$ merupakan bisector dari AX.
8. Buktikan kasus khusus teorema Butterfly jika AD // BC.
9. Buktikan teorema Butterfly dengan menggunakan teorema Desarques's
10. Buktikan teoema Butterfly dengan menggunakan cross rasio.
11. *). Buktikan teorema Butterfly pada lingkaran dengan menggunakan teorema Menelaus.
12. *). Pada gambar di bawah. Titik A', B', C' dan D' masing-masing berada pada sisi AB, BC, CD dan DA dari segiempat $ABCD$. Sedangkan I adalah titik potong garis AC dan BD dan juga merupakan titik potong diagonal $A'C'$ dan $B'D'$. Tunjukkan bahwa
    a. $\frac{|AU|}{|UI|} \cdot \frac{|IV|}{|VC|} = \frac{|AI|}{|IC|}$
    b. $\frac{|XA|}{|AI|} \cdot \frac{|IC|}{|GZ|} = \frac{|XI|}{|IZ|}$
    c. $\frac{|XU|}{|UI|} \cdot \frac{|IV|}{|VZ|} = \frac{|XI|}{|IZ|}$

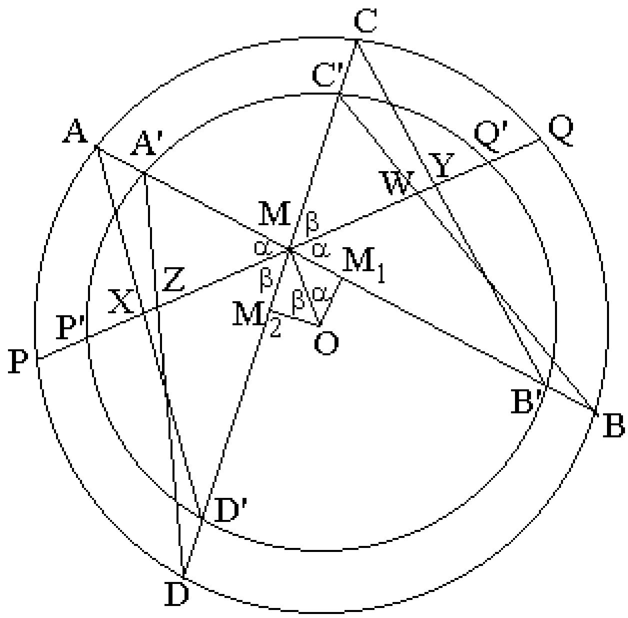


13. **). Buktikan kesamaan (6.3.11) dan (6.3.12) yaitu merupakan kesamaan Butterfly pada elips.
14. *). Misalkan Δ ABC sebarang segitiga, jika M dan N merupakan bisector dari titik B dan C yang memotong AC dan AB.Jika D adalah garis potong MN dengan lingkaran luas ΔABC, tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}$$

15. *). Misalkan dua buah lingkaran mempunyai pusat yang sama di O, sebuah garis memotong lingkaran di titip P. Q dan P', Q' jika M merupakan titik tangah bersama dari PQ dan $P'Q'$, melalui M dibuat dua buah garis $AA'B'B$ dan CC$'D'D$. Hubungkan AD', $A'D$, BC' dan $B'C$ (seperti pada gambar di bawah, maka terbentuklah butterfly). Misalkan X, Y, Z dan W masing-masing merupakan titik potong dari $PP'Q'Q$ dengan AD', $B'C$, $A'D$ dan BC'. Tunjukkan bahwa berlaku :

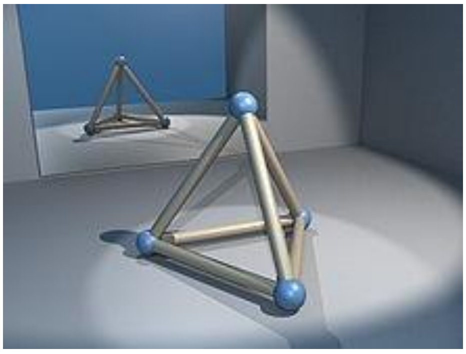
$$\frac{1}{MX} + \frac{1}{MZ} = \frac{1}{MY} + \frac{1}{MW}$$

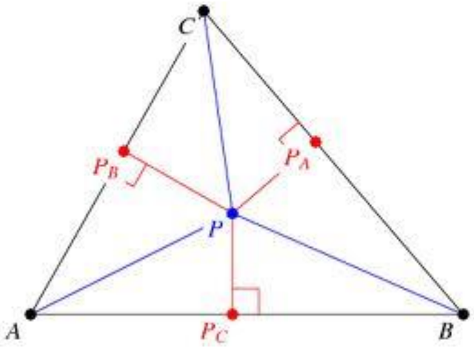


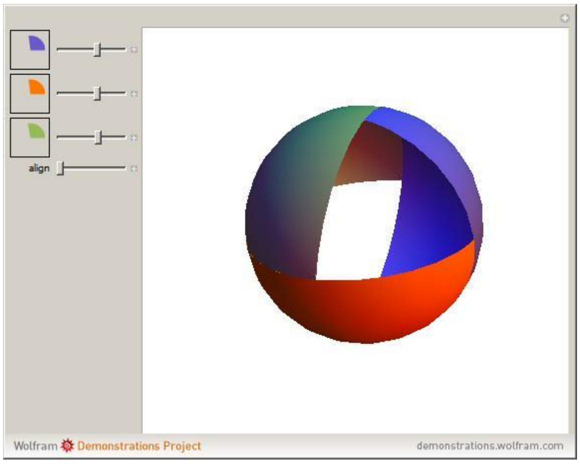
BAB X

Ketaksamaan Erdos-Mordell's

Dalam kehidupan sehari, hari memang tidak banyak dijumpai bentuk ketaksamaan Erdos-Mordel, akan tetapi dalam penerapannya pada berbagai bidang ilmu banyak digunakan ketaksamaan Erdos-Mordell tersebut, misalnya dalam mekanika, astronomi dan lain sebagainya.







BAB X

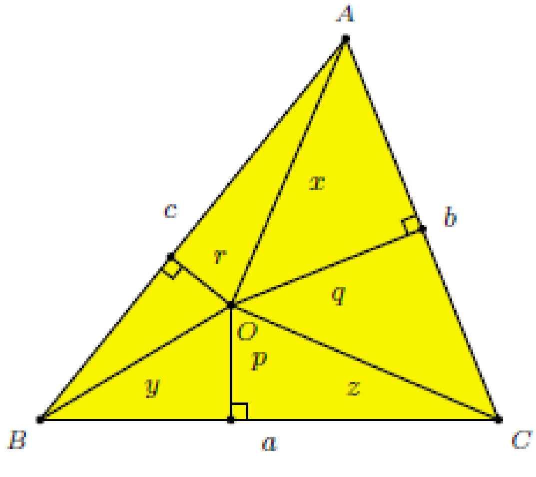
Ketaksamaan Erdos-Mordell's

10.1. *Ketaksamaan Erdos-Mordel*

Berikut ini diberikan ketaksamaan Erdos-Mordel yang merupakan pengembangan dari teorema Carnot I. akan tetapi sebelum membahas tentang ketaksamaan Erdos-Mordell, perhatikan lema pendukung berikut yang buktinya akan dibahas dalam beberapa cara

Lema 10.1.1. Misalkan *ABC* sebarang segitiga dan *O* sebarang titik dalam segitiga *ABC*, jika jarak dari *O* ke sisi *BC*, *AC*, *AB* masing-masing adalah *p*, *q*, *r* dan jarak *O* ke titik *A*, *B*, *C* masing-masing adalah *x*, *y*, *z* (seperti gambar 10.1.1). Maka berlaku

$$ax \geq br + cq, \quad by \geq ar + cp \quad \text{dan} \quad cz \geq aq + bp \tag{10.1.1}$$



Gambar 10.1.1

***Bukti : Cara* I.** Perhatikan gambar 10.1.2a, bentuk segitiga *ABC* yang lain yang panjang sisinya kelipatan *x* dari panjang sisi segitiga pada gambar 10.1.2a. sehingga diperoleh seperti pada gambar 10.1.2b. Dari gambar 10.1.1, sebut $\angle OAB = \alpha_1$, $\angle OAC = \alpha_2$, seperti pada gambar 10.1.2a. Kemudian buat segitiga *ADC* yang siku-siku di *D* dengan $\angle OAB = \alpha_1$ selanjutnya buat Δ *AEB* yang siku-siku di *E* dengan $\angle OAC = \alpha_2$. Sehingga diperoleh :

$$\Delta AEB \sim \Delta OB'A$$

dan

$$\Delta ADC \sim \Delta OC'A.$$

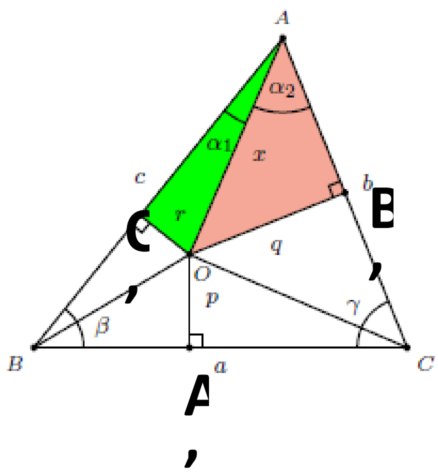
sehingga diperoleh

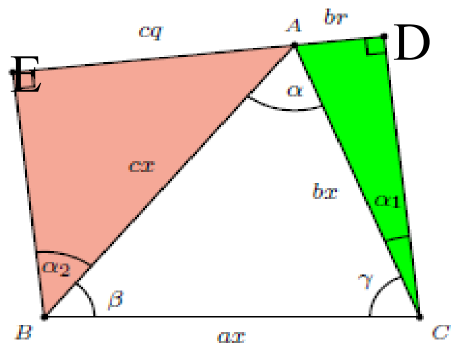
$$\frac{AE}{OB'} = \frac{AB}{OA}\text{ , jadi }\frac{AE}{q} = \frac{cx}{x}\text{ yang menghasilkan } AE = cq$$

dan

$$\frac{AD}{OC'} = \frac{AC}{OA}\text{ , jadi }\frac{AD}{r} = \frac{bx}{x}\text{ yang menghasilkan } AD = br,$$

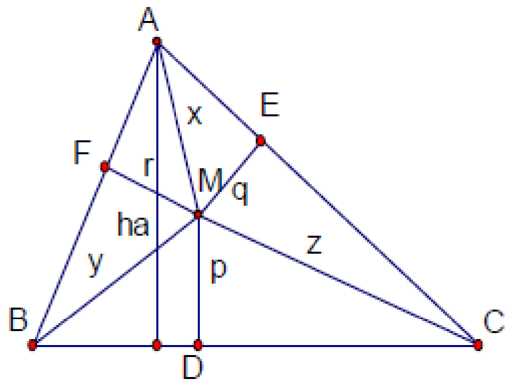
maka diperolehlah a$x \geq$ br + cq dan dengan cara yang sama akan diperoleh b$y \geq$ ar + cp dan c$z \geq$ aq + bp.





Gambar 10.1.2a Gambar 10.1.2b

Cara II. Perhatikan gambar 10.1.3 berikut Misalkan pula sebarang titik yang diambil di dalam ΔAMC adalah *M*. Misalkan masing-masing panjang sisi *BC*, *A*C dan *AB* adalah *a*, *b* dan *c*. dan sebut jarak dari titik *A* ke *BC* adalah h_a yang merupakan tinggi ΔABC.



Gambar 10.1.3

Jika L menyatakan luas segitiga ABC, maka

$$2L = a.h_a \qquad (10.1.2)$$

Karena

LΔABC = LΔMBC+ LΔMCA+LΔ MAB

Jadi dari persamaan (10.1.2) diperoleh

$2L = a.h_a = a.p + b.q + c.r$

Selanjutnya karan $h_a \leq x + p$ maka

$$a(x + p) \geq a.h_a$$

jadi

$$a.x + a.p \geq a.p + b.q + c.r$$

sehingga

$$a.x \geq b.q + c.r$$

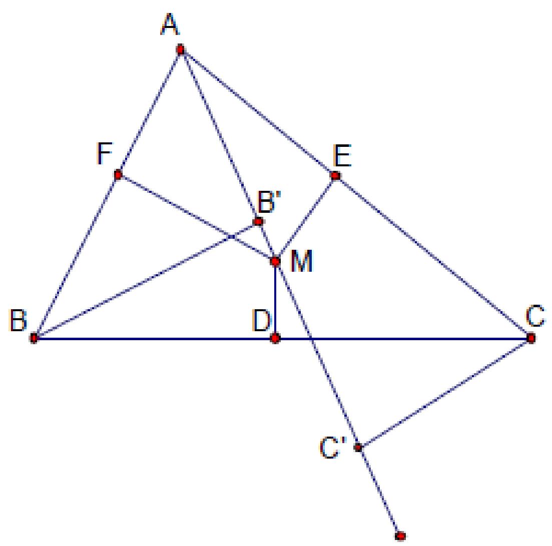
dengan cara yang sama diperoleh

$by \geq ar + cp$ dan

$cz \geq aq + bp$ ♥

***Cara* III.** Perhatikan gambar 10.1.4 berikut).

Sama seperti pada bukti cara II. Misalkan Misalkan masing-masing panjang sisi *BC*, *A*C dan *AB* adalah *a*, *b* dan *c*. dan sebut jarak dari titik *A* ke *BC* adalah h_a yang merupakan tinggi ΔABC. Misalkan pula sebarang titik yang diambil di dalam ΔAMC adalah *M*. Jila L menyatakan luas ΔABC. Kemudian buat garis *AM* dan diperpanjang seperlunya. Dari titik B buat garis yang tegak lurus ke *AM* serta dari titik *C* buat juga garis yang tegak lurus ke perpanjangan garis *AM*, Katakana titik potongnya masing-masing adalah *B′* dan C′. Proses ini mengakibatkan.



Gambar 10.1.4.

$\Delta\, AFM \sim \Delta AB'B$ dan $\Delta AEM \sim \Delta AC'C$

Jadi

$$\frac{r}{x} = \frac{BB'}{c} \text{ Maka } rc = xBB'$$

dan

$$\frac{q}{x} = \frac{CC'}{b} \text{ Maka } q.b = xCC'$$

Yang selanjutnya menghasilkan

$$r.c + q.b = x(BB' + CC')$$

$$r.c + q.b \leq x.a$$

dengan cara yang sama akan diperoleh

$by \geq ar + cp$ dan

$cz \geq aq + bp$ ♥

Sebenarnya masing sangat banyak cara membuktikan lema di atas (akan dibahas dalam soal latihan). Berikut ini dengan menggunakan lema di atas dapat dibuktikan ketaksamaan Erdos-Mordell sebagai berikut

***Teorema* 10.1.1. (*Ketaksamaan Erdos-Mordell*).**

Misalkan O sebarang titik dalam ΔABC, jika jarak dari O ke sisi BC, AC, AB masing-masing adalah p, q, r dan jarak O ke titik A, B, C masing-masing adalah x, y, z (seperti gambar 10.1.1 di atas). Maka berlaku

$$x + y + z \geq 2\,(p + q + r) \qquad (10.1.3)$$

Bukti : Berdasarkan lema di atas maka

$$x + y + z \geq \frac{br + cq}{a} + \frac{ar + cp}{b} + \frac{aq + bp}{c}$$

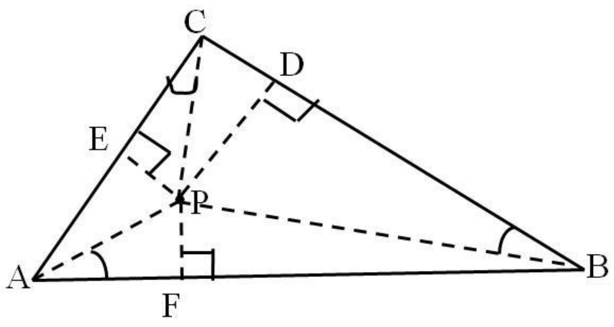
$$\geq \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)p + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)q + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)r$$

Dengan menggunakan rata-rata aritmatik geometri, maka masing-masing koefisien dari p, q dan r lebih kecil dari 2, maka diperoleh

$$x + y + z \geq 2\,(p + q + r)$$ ♥

***Teladan* 10.1.1.** Misalkan *ABC* sebarang segitiga dan titik *P* berada dalam segitiga *ABC*. Tunjukkan paling kurang satu dari $\angle PAB$, $\angle PBC$ dan $\angle PCA$ lebih kecil atau sama dengan 30^0.

Penyelesaian **:**



perhatikan gambar 10.1.5 di bawah ini dan Perhatikan bahwa *PF* tegak lurus dengan *AB*, *PE* tegak lurus dengan *BC* dan *PE* tegak lurus dengan *AC* andaikan semua . $\angle PAB$, $\angle PBC$ dan $\angle PCA$ lebih besar dari 30^0. Kemudian pandang.

Gambar 10.1.5

$$PA + PB + PC = \frac{PF}{sin \angle PAB} + \frac{PD}{sin \angle PBC} + \frac{PE}{sin \angle PCA}$$

$$< \frac{PF}{sin\, 30^0} + \frac{PD}{sin\, 30^0} + \frac{PE}{sin\, 30^0}$$

$$= \frac{PF}{1/2} + \frac{PD}{1/2} + \frac{PE}{1/2}$$

= 2 (*PD*+ *PD* + *PF*).

Ketaksamaan di atas bertentangan dengan ketaksamaan Erdos-Mordell. Jadi pegandaian salah, maka haruslah minimal salah satu dari $\angle$ *PAB*, $\angle$ *PBC* atau $\angle$ *PCA* lebih kecil atau sama dengan 30^0. ♥

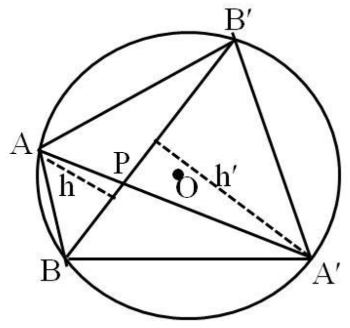
Kalau bukti ketaksamaan Erdos-Mordell ini selalu dengan menggunakan lema atau teorema lain sebelumnya, maka berikut ini akan diberikan bukti yang lelih sederhana dari ketaksamaan Erdos-Mordell yaitu dengan menggunakan perbandingan diagonal dari segiempat yang terbentuk dari dua buah tali busur pada suatu lingkaran.

***Lema* 10.1.2.** Jika pada suatu lingkaran tali busur *AA*′ dan *BB*′ berpotongan di titik P. Maka beralaku

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{AB.AB'}{A'B.A'B'}$$

Bukti : Misalkan R adalah jari-jari lingkaran dan h dan h' masing-masing merupakan tinggi dari $\Delta BAB'$ dan $\Delta BA'B'$, maka berlaku

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{h}{h'} = \frac{\frac{AB.AB'}{2R}}{\frac{A'B.A'B'}{2R}} = \frac{AB.AB'}{A'B.\,A'B'}$$



gambar 10.1.6

Bukti Lain ketaksamaan Erdos-Mordell.

Dengan menggunakan lema di atas, akan dibuktikan ketaksamaan Erdos-Mordell dengan cara yang cukup sederhana. Untuk memudahkan pemahaman penggunaan lema 10.1.2, maka akan digunakan gambar lain dalam proses pembuktiannya. Untuk itu perhatikan gambar 10.1.7 berikut ini

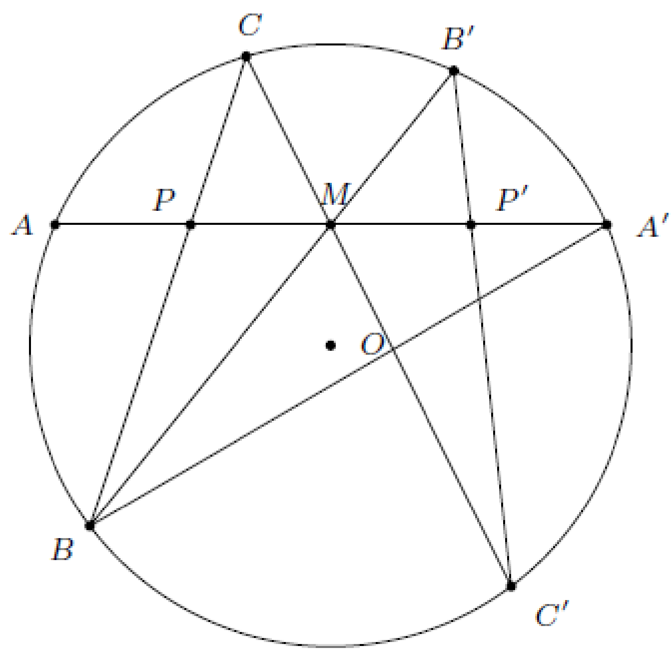
Untuk membuktikannya cukup kita tunjukkan bahwa

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{A'P'}{P'A}\,.$$

Dari lema 10.1.2 diperoleh

$$1 = \frac{AM}{MA'} = \frac{AB.AB'}{A'B.A'B'}$$

Yang menyebabkan



Gambar 10.1.7

$$\frac{A'B'}{AB'} = \frac{AB.}{A'B.} \qquad (10.1.2)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\frac{A'C'}{AC'} = \frac{AC.}{A'C.} \qquad (10.1.3)$$

Maka berdasarkan lema 10.1.2 dan persamaan (10.1.2) dan (10.1.3) diperoleh

$$\frac{A'P'}{P'A} = \frac{A'B'.}{AB'.} \cdot \frac{A'C'.}{AC'.} = \frac{AB}{A'B} \cdot \frac{AC}{A'C} = \frac{AP}{PA'}$$ ♥

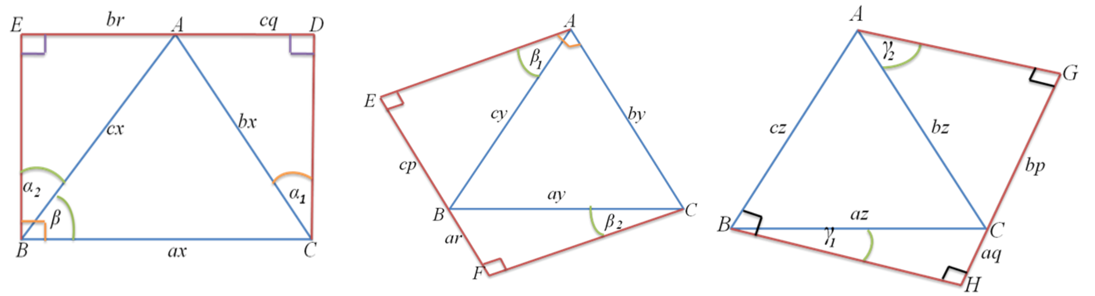
***Teladan* 10.1.2** Tunjukkan bahwa pada Lema 10.1.1, akan berlaku:

$$x = \frac{br+cq}{a}, = \frac{ar+cp}{b}, \text{ dan } \qquad z = \frac{aq+bp}{c}$$

jika dan hanya jika O adalah pusat dari lingkaran luar ΔABC dan dinotasikan $\bar{R}$ adalah jari-jari lingkaran luar segitiga, maka $\bar{R} = x = y = z$.□

Penyelesaian : ⇒. Misalkan $= \frac{br+cq}{a}$, $y = \frac{ar+cp}{b}$, dan $z = \frac{aq+bp}{c}$, maka akan dibuktikan bahwa O titik pusat lingkaran luar ΔABC atau $\bar{R} = x = y = z$.

Pandang ΔAOQ pada gambar 10.1.8, akan berlaku $\angle AOQ + \alpha_2 \ = 90^0$. Karena diketahui bahwa $ax = br + cq$, maka ED = BC, sehingga BC tegak lurus terhadap EB dan CD.



Gambar 10.1.8.

jika $ax = br + cq$, maka berlaku:

$$\beta + \alpha_2 = 90^0 \quad (10.1.4)$$

$$\gamma + \alpha_1 = 90^0 \quad (10.1.5)$$

Jika $by = ar + cp$, maka berlaku:

$$\alpha + \beta_1 = 90^0 \quad (10.1.6)$$

$$\gamma + \beta_2 = 90^0 \qquad (10.1.7)$$

Jika $cz = aq + bp$, maka berlaku:

$$\alpha + \gamma_2 = 90^0 \qquad (10.1.8)$$

$$\beta + \gamma_1 = 90^0 \qquad (10.1.9)$$

Pada gambar 10.1.8 berlaku:

$$\angle AOQ + \alpha_2 = 90^0 \qquad (10.1.10)$$

$$\angle COQ + \gamma_1 = 90^0 \qquad (10.1.11)$$

Dari persamaan (10.1.10) dan persamaan (10.1.4) diperoleh:

$$\angle AOQ = \beta \qquad (10.1.12)$$

Dari persamaan (10.1.9) dan persamaan (10.1.11) diperoleh:

$$\angle COQ = \beta \qquad (10.1.13)$$

Dari persamaan (10.1.12) dan persamaan (10.1.13) diperoleh:

$$\angle AOQ = \angle COQ$$

Karena:

$$\angle AOQ \cong \angle COQ$$

$$OQ \cong OQ$$

$$\angle AQO \cong \angle CQO$$

Diperoleh $\Delta AOQ \cong \Delta COQ$ akibatnya $x = z$. Dengan cara yang sama akan diperoleh $x = y$. Karena $x = z$ dan $x = y$ dapat disimpulkan bahwa $x = y = z$, sehingga terbuktilah bahwa *O* merupakan titik pusat lingkaran luar Δ*ABC* atau $\bar{R} = x = y = z$.

⇐. Jika diketahui *O* adalah pusat dari lingkaran luar Δ*ABC*, dinotasikan $AO = x$, $BO = y$, $CO = z$, dan $\bar{R}$ merupakan jari-jari lingkaran luar Δ*ABC* atau $x = y = z = \bar{R}$, maka akan dibuktikan berlaku:

$$x = \frac{br+cq}{a}, = \frac{ar+cp}{b}, \text{ dan } z = \frac{aq+bp}{c} \qquad (10.1.14).$$

Diketahui *O* adalah pusat dari lingkaran *L*Δ*ABC*. Jika dinotasikan $AO = x$, $BO = y$, $CO = z$ maka pada Δ*ABC* akan terdiri dari tiga segitiga dalam yaitu Δ*AOC*, Δ*BOC*, dan Δ*AOB*. Karena $x = y = z$, sehingga tiga segitiga dalam tersebut masing-masing adalah segitiga sama kaki. Sehingga akan diperoleh bahwa:

$$\alpha_2 = \gamma_1, \beta_1 = \gamma_2, \ \alpha_1 = \beta_2 \qquad (10.1.15)$$

Pada gambar 10.1.8 akan berlaku:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 180^0 \qquad (10.1.16)$$

Substitusikan persamaan (3.3.8) ke persamaan (3.3.9) akan diperoleh:

$$\alpha_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 180^0$$

$$\alpha_1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 90^0 \qquad (10.1.44)$$

dan

$$\beta_2 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \alpha_2 + \beta_1 = 180^0$$

$$\beta_2 + \alpha_2 + \beta_1 = 90^0 \qquad (10.1.45)$$

Dari persamaan (10.1.13) dan (10.1.14) akan diperoleh juga bahwa untuk □*EBCD* pada gambar 10.1.8 empat sudutnya adalah siku-siku. Sehingga akan berlaku $ax = br + cq$

atau $= \frac{br+cq}{a}$. Dengan cara yang sama akan diperoleh juga bahwa $= \frac{ar+cp}{b}$, dan $z = \frac{aq+bp}{c}$.

Jadi terbukti bahwa pada suatu segitiga *ABC*, akan diperoleh persamaan $ax = br + cq$, $by = ar + cp$,dan $cz = aq + bp$ jika dan hanya jika *O* adalah pusat dari lingkaran luar ΔABC. Koefisien *p, q* dan *r* pada Ketaksamaan *Erdős-Mordell* akan sama dengan 2 jika dan hanya jika $a = b = c$, atau dengan kata lain ΔABC sama sisi.■

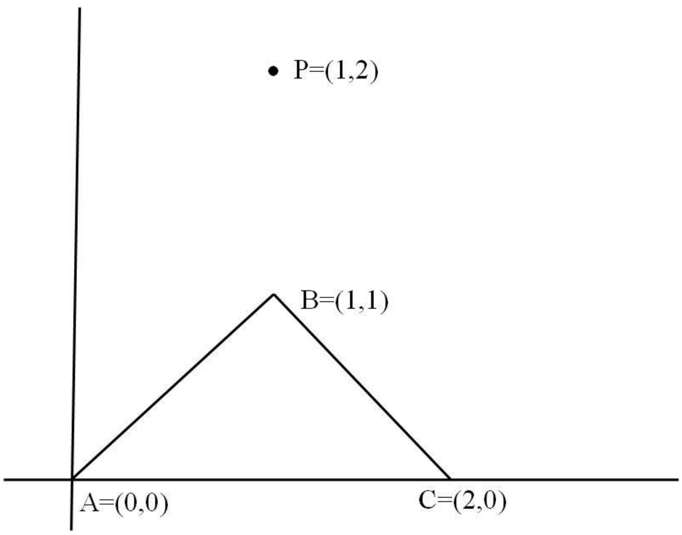
Teladan 10.1.3. Jika dinotasikan $\bar{r}$ sebagai jari-jari lingkaran dalam dan $\bar{R}$ sebagai jari-jari lingkaran luar ΔABC maka pada ΔABC akan berlaku $\bar{R} \geq 2\bar{r}$.□

Penyelesaian : Dari teladan 10.1.2 diketahui bahwa $x = y = z = \bar{R}$. Substitusikan bentuk ini ke Ketaksamaan *Erdős-Mordell*. Akan diperoleh $\bar{R} + \bar{R} + \bar{R} \geq 2(p + q + r)$. Teorema Carnot menyatakan bahwa $\bar{R} + \bar{r} = p + q + r$. Untuk segitiga lancip pusat lingkaran berada di dalam ΔABC, sedangkan untuk segitiga tumpul pusat lingkaran luar akan berada di luar segitiga. Substitusikan $\bar{R} + \bar{r} = p + q + r$ ke persamaan $\bar{R} + \bar{R} + \bar{R} \geq 2(p + q + r)$, akan diperoleh $\bar{R} + \bar{R} + \bar{R} \geq 2(\bar{R} + \bar{r})$ atau $\bar{R} \geq 2\bar{r}$. ♥

***Teladan* 10.1.4**. Diberikan ΔABC dengan $A = (0,0)$, $B = (1,1)$ dan $C = (2,0)$. Periksalah apa yang terjadi jika *P* berada di luar ΔABC.

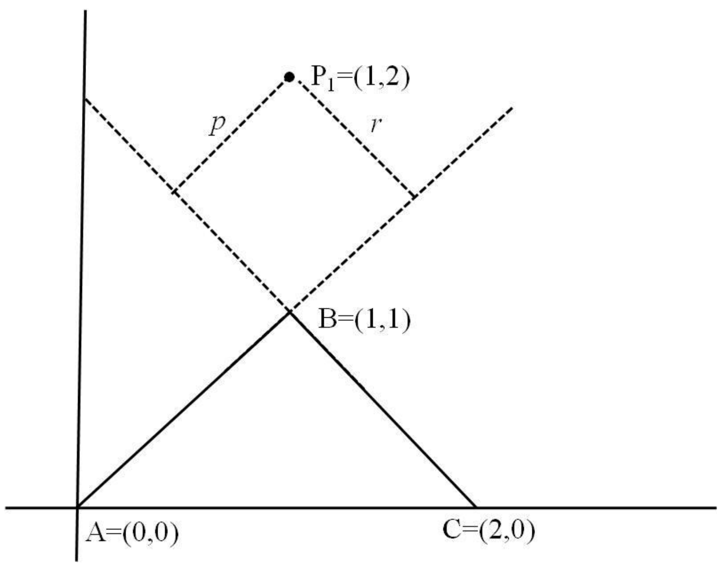
Penyelesaian : Perhatikan gambar 10.1.9a.

Kita misalkan titik P dua buah titik yang berada di luar ΔABC. Katakanlah $P_1(1,2)$ dan $P_2(0,1)$. Perhatikan titik P_1 (untuk titik P_2 sebagai latihan bagi pembaca. Buat garis yang tegal lurus ke sisi perpanjangan AB dan perpanjangan CB seperti gambar 10.1.9b.



Gambar 10.1.9a

Jika dimisalkan jarak dari titik P_1 ke titik A, B dan C masing-masing adalah x, y dan z sedangkan jarak dari titik P_1 ke sisi BC, AC dan AB adalah p, q dan r.



gambar 10.1.9b

Maka diperoleh

$$x = z = \sqrt{5} \text{ dan } y = 1.$$

jadi

$$x + y + z = 1 + 2\sqrt{5} \approx 5{,}47$$

sedangkan

$$p = r = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ dan } q = 2$$

sehinga

$$p + q + r = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41$$

maka diperoleh tidak berlaku

$$x + y + z \geq 2(P + q + r).$$

Apakah ini berarti ketaksamaan Erdos-Mordel tidak berlaku ?. Untuk menjawabnya. Kita perhatikan bahwa dalam teorema ketaksamaan Erdos-Mordell disebutkan bahwa titik P berada dalam ΔABC. Padahal pada teladan 10.1.2 di atas, titik P kita ambil berada diluar ΔABC. Agar ketaksamaan Erdos-Mordell tetap berlaku di definisikan jaraknya sebagai berikut

- Nilai p adalah negatip, karena P_1 dengan A berada pada bidang yang berbeda terhadap sisi BC.
- Nilai q adalah positip karena P_1 dengan B berada pada bidang yang sama terhadap sisi AC.
- Nilai r adalah negatip karena P dengan C berada pada bidang yang berbeda terhadap sisi AB.

Sehingga kalau aturan ini kita terapkan, maka ketaksamaan Erdos-Mordel tetap berlaku pada teladan 10.1.2 di atas, yaitu

$$x + y + z = 1 + 2\sqrt{5} \approx 5{,}47 \geq 1{,}18 \approx 2\left(2 - \sqrt{2}\right) = 2(p + q + r)$$

10.2. *Ketaksamaan Bertanda Erdos-Mordel*.

Secara umum yang dibahas pada teladan 10.1.2 di atas, dikenal dengan istilah *jarak bertanda* pada ketaksamaan Erdos-Mordel. Persoalannya adalah kalau umumnya titik P berada dalam segitiga atau pada sisi-sisi dari segitiga, maka bagaimana kalau titik P tersebut berada diluar segitiga tersebut. Seperti yang telah ditunjukkan pada teladan 10.1.2 bahwa jika titik P berada diluar segitiga, maka jarak dari titik p ke garis sisi-sisi segitiga tersebut tidak selalu positip akan tetapi dapat bernilai negatip tergantung dari posisi antara titik P dengan sisi-sisi yang ditentukan jaraknya dari titik P. Maka apabila jarak dari titik P ke sisi-sisi (atau perpanjangannya) diberi nilai sebagai berikut

- ***Positip*** jika titik P dengan A berada pada bidang yang sama terhadap sisi BC.
- ***Negatip*** jika P dengan A berada pada bidang yang berbeda terhadap sisi BC.

Secara umum bentuk ketaksamaan Erdos-Mordel untuk jarak bertanda tersebut adalah sebagai berikut.

***Teorema* 10.1.2** : Diberikan ΔABC, dan titik P berada pada bidang yang sama dengan segitiga tersebut, misalkan panjang sisi dari segitiga tersebut adalah a, b dan c sedangkan jarak dari titik P ke sisi BC, AC dan AB adalah p, q dan r, jarak dari titik P ke titik A, B dan C, masing-masing adalah x, y dan z. Jika

- p adalah posisip jika P dengan A berada pada bidang yang sama terhadap BC dan sebaiknya bernilai negatip
- q adalah posisip jika P dengan B berada pada bidang yang sama terhadap AC dan sebaiknya bernilai negatip
- r adalah posisip jika P dengan C berada pada bidang yang sama terahadap AB dan sebaiknya bernilai negatip

Maka berlaku

$$x + y + z \geq p\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + q\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{c}\right) + r\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

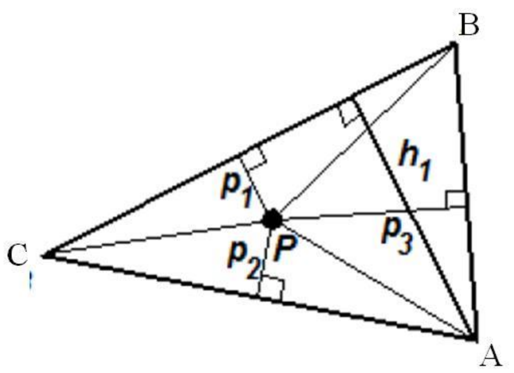
Bukti : Misalkan h_1, h_2 dan h_3 masing-masing garis tinggi dari titik *A*, *B* dan *C* ke sisi *BC*, *CA* dan *AB*. Sedangkan $p_{1,}$ p_2 dan p_3 merupakan jarak dari titik *P* ke sisi *BC*, *CA* dan *AB*. Kalau yang umum titik *P* berada di dalam ΔABC adalah seperti gambar 10.2.1a sedangkan kalau titik *P* berada di luar ΔABC adalah seperti gambar 10.2.1b.

Kalau titik *P* berada di dalam ΔABC (seperti gambar 10.2.1a), maka berlaku

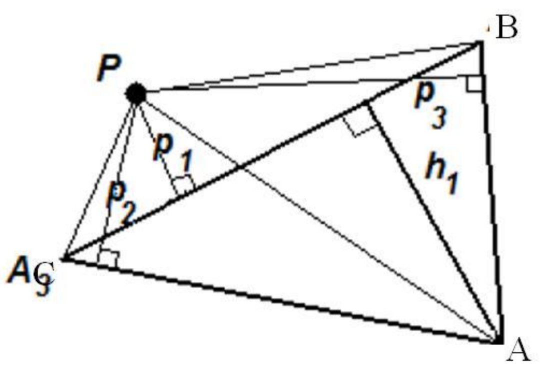
$$L\Delta ABC = L\Delta APB + L\Delta BPC + L\Delta APC \qquad (10.2.1.)$$

Jika titik *P* berada di luar ΔABC (seperti gambar 10.2.1.b), maka ketaksamaan

$$L\Delta ABC = - L\Delta APB + L\Delta BPC + L\Delta APC \qquad (10.2.2)$$



gambar 10.2.1.a



gambar 10.2.1b

Persamaan (10.2.2) di atas, mengatakan bahwa p_1 bertanda negatip ($p_1 < 0$). Jadi diperoleh

$$2.L\Delta ABC = \mathrm{ah}_1 = a.p_1 + b.p_2 + c.p_3.$$

Dengan catatan bahwa $PA + p_1 \geq h_1$ dan $p_1 < 0$. Jadi

$$a.PA + a.p_1 = a(PA + p_1) \geq a.h_1 = a.p_1 + b.p_2 + c.p_3.$$

yang berarti

$$a.PA \geq b.p_2 + c.p_3.$$

atau

$$PA \geq \frac{b.p_2 + c.p_3}{a} \tag{10.2.3}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$PB \geq \frac{a.p_1 + c.p_3}{b} \tag{10.2.4}$$

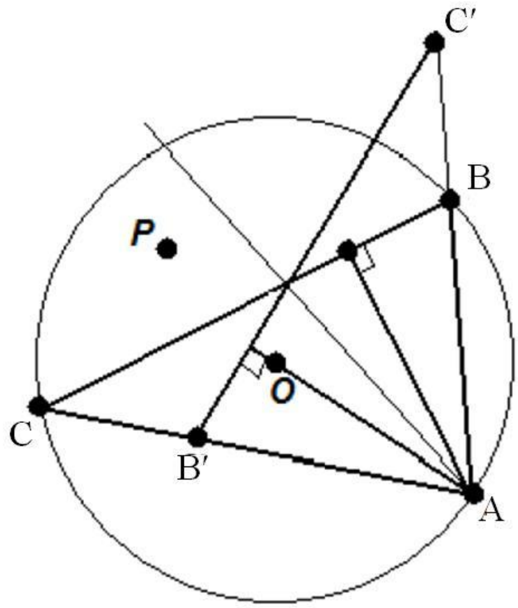
dan

$$PC \geq \frac{c.p_1 + b.p_2}{c} \tag{10.2.5}$$

Misalkan $\Delta A'B'C'$ bayangan dari ΔABC terhadap bisektor dari $\angle BAC$, yang mana bisektor dari $\angle BAC$ tersebut juga menjadi bisektor dari dua buah garis tinggi dari titik A (lihat soal 25 latihan 14 bab 7).

dengan menggunakan pertaksamaan 10.2.3 pada $\Delta AB'C'$. dengan menggunakan ketaksamaan $a.PA \geq b.p_2 + c.p_3$. akan diperoleh ketaksamaan

$$a.PA \geq c.p_2 + b.p_3.$$



gambar 10.2.2

yang berarti

$$PA \geq \frac{c.p_2}{a} + \frac{c.p_3}{a}$$

dengan cara yang sama akan diperoleh

$$PB \geq \frac{c.p_1}{b} + \frac{a.p_3}{b}$$

dan

$$PC \geq \frac{a.p_2}{c} + \frac{b.p_1}{c}$$

Dari ketiga persamaan di atas diperoleh

$$PA + PB + PC \geq \frac{c.p_2}{a} + \frac{c.p_3}{a} + \frac{c.p_1}{b} + \frac{a.p_3}{b} + \frac{a.p_2}{c} + \frac{b.p_1}{c}$$

$$= p_1\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + p_2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + p_3\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \quad \heartsuit$$

Dengan menggunakan rata-rata aritmatik-geometrik untuk ruas kanan ketaksamaan di atas, maka akan diperoleh

$$PA + PB + PC \geq p_1\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + p_2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + p_3\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)$$

$$\geq 2p_1\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}} + 2p_2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}} + 2p_3\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}$$

$$= 2p_1 + 2p_2 + 2p_3$$

$$= 2(p_1 + p_2 + p_3)$$

Sehingga diperoleh bentuk

$$PA + PB + PC \geq 2(p_1 + p_2 + p_3)$$

Yang mana bentuk pertaksamaan di atas pada dasarnya persis sama dengan pertidaksamaan pada teorema 10.1.1 yaitu pertidaksamaan (10.1.3) yaitu $x + y + z \geq 2(P + q + r)$, yang pada pertaksamaan (10.1.3) x, y dan z masing-masing adalah *PA*, *PB* dan *PC*. Yang perlu menjadi perhatian adalah apabila $p_1 < 0$, maka tidak mungkin akan berlaku :

$$p_1\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) \geq 2p_1\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}} \qquad (10.2.6)$$

Artinya ketaksamaan yaitu $x + y + z \geq 2(P + q + r)$, hanya berlaku jika titik *P* berada di dalam ΔABC, sedangkan jika titik *P* berada di luar ΔABC maka bentuk ketaksamaan Erdos-Mordellnya hanyalah seperti teorema 10.2.1. agar ketaksamaan $x + y + z \geq 2(P + q + r)$ tetap berlaku untuk sebarang titik *P* yang berada di luar ΔABC, maka (10.2.6) tidak boleh digunakan, sehingga perlu proses pembuktian yang lain yaitu sebagai berikut :

Teorema* 10.2.2** : ***Ketaksamaan Bertanda Erdos-Mordell.

Diberikan ΔABC, dan titik *P* berada pada bidang yang sama dengan segitiga tersebut, misalkan panjang sisi dari segitiga tersebut adalah a, b dan c sedangkan jarak dari titik *P* ke sisi *BC*, *AC* dan *AB* adalah *p*, *q* dan *r*, jarak dari titik *P* ke titik *A*, *B* dan *C*, masing-masing adalah *x*, *y* dan z. Jika

- p adalah posisip jika P dengan A berada pada bidang yang sama terhadap BC dan sebaiknya bernilai negatip
- q adalah posisip jika P dengan B berada pada bidang yang sama terhadap AC dan sebaiknya bernilai negatip
- r adalah posisip jika P dengan C berada pada bidang yang sama terahadap AB dan sebaiknya bernilai negatip

Maka berlaku

$$PA + PB + PC \geq 2(p_1 + p_2 + p_3) \qquad (10.2.7)$$

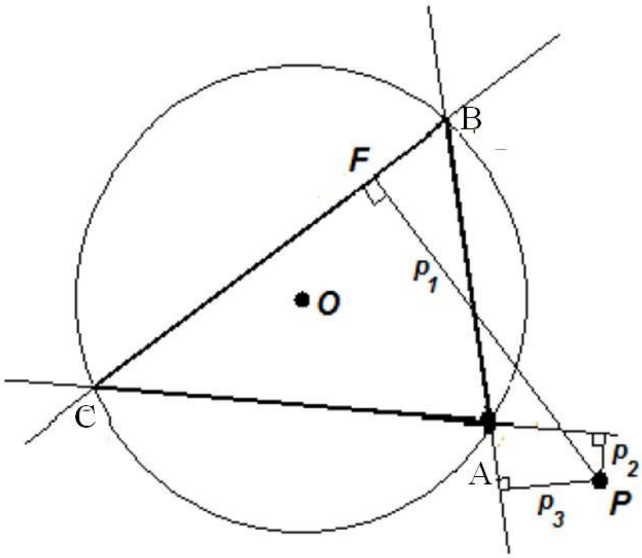
Bukti : Bukti dari teroema di atas akan dibagi dalam 3 kasus berikut

Kasus 1. Titik P berada pada sudut yang bertolak belakang (*vertical angle*) dengan salah satu sudut dari ΔABC.

Kasus 2. Titik P berada hanya pada salah satu sudut dalam (*interior angle*) dari ΔABC.

Kasus 3. Titi P berada pada perpanjangan sisi dari sisi-sisi ΔABC.

Bukti untuk kasus 1. Tanpa mengurangi keumuman misalkan titik P berada pada sudut vertical dari $\angle BAC$, dan misalkan F titik potong garis yang tegak lurus dari titik P ke sisi BC. Seperti pada gambar 10.2.3.



Gambar 10.2.3

Maka untuk kasus di atas, jelas bahwa $p_1 > 0$, $p_2 < 0$ dan $p_3 < 0$. Kemudian sebut $d_1 = p_1$, $d_2 = -p_2$ serta $d_2 = -p_3$. Perhatikan $\Delta\ PFB$ yang siku-siku di F, maka berlaku PA > d_1, Kemudian untuk ΔPFC akan berlaku $PC >\ d_1$, maka

$$PA + PB + PC \geq PB + PC \geq d_1 + d_1 = 2.d_1 \geq 2(d_1 - d_2 - d_3)$$

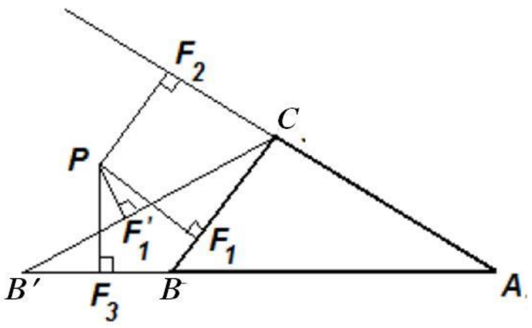
Karena $p_1 > 0$, $p_2 < 0$ dan $p_3 < 0$, dengan $d_1 = p_1$, $d_2 = -p_2$ serta $d_2 = -p_3$, maka

$$PA + PB + PC \geq 2(p_1 + p_2 + p_3).$$

Bukti kasus 2 : Tanpa mengurangi keumuman misalkan titik P hanya berada pada sudut dalam dari $\angle BAC$. Tanpa mengurangi keumuman misalkan P adalah titik pada sudut dalam dari $\angle BAC$.

Kasus 2*a*. Titik P berada di luar ΔABC dan merupakan titik pada sudut dalam dari $\angle BAC$, tetapi berada cukup jauh dari ΔABC sehingga semua garis tinggi dari titik P ke sisi-sisi ΔABC jatuh pada perpanjangan dari sisi-sisinya. Sebut $-d_1 = p_1 < 0$. Buat titik B' sehingga F_3 adalah titik tengah dari BB', buat garis tinggi dari titik P ke sisi CB' dan katakana titik potongnya di $F_1{}'$ perhatikan gambar 10.2.4

perhatikan $\Delta PB'B$ samakaki dengan PB' = PB, sehingga jarak dari P ke ΔABC sama dengan jarak P ke $\Delta AB'C$, kecuali jarak P ke sisi BC yang berbeda dengan jarak P ke sisi $B'C$, untuk itu tukar d_1 dengan d_1' dengan $d_1' = PF'$ yang menghasilkan $d_1' < d_1$ jadi



gambar 10.2.4

$$p_1 = -d_1 < -d_1' = p_1' \,.$$

Ingat jika P berada dalam $\Delta AB'C$, maka akan berlaku $p_1' < 0 < p_1'$ yang akan menyebabkan

$$p_1' + p_2 + p_3 > p_1 + p_2 + p_3$$

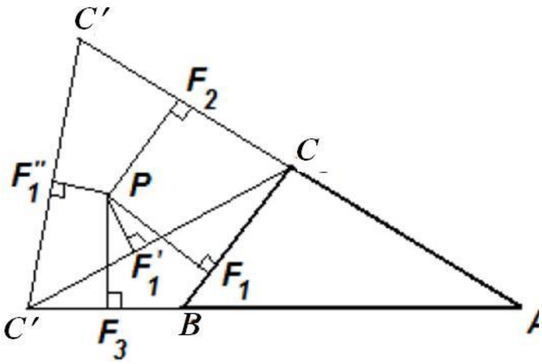
Berikutnya pilih C' dan F_2 menjadi titik tengah dari CC', hubungkan B' dengan C' dan katakan F_1'' titik potong garis tinggi dari titik P ke $B'C'$ (perhatikan gambar 10.2.5). Perhatikan $\Delta CPC'$ yang sama kaki dengan $PC = PC'$ sehingga jarak titik P ke sisi-sisi $\Delta AB'C'$ sama dengan jarak titik P ke sisi-sisi $\Delta AB'C$ kecuali di d_1' untuk itu gantikan lagi d_1' dengan $d_1'' = PF_1''$, yang juga $p_1' < p_1''$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} p_1'' + p_2 + p_3 &> p_1' + p_2 + p_3 \\ &> p_1 + p_2 + p_3 \end{aligned}$$

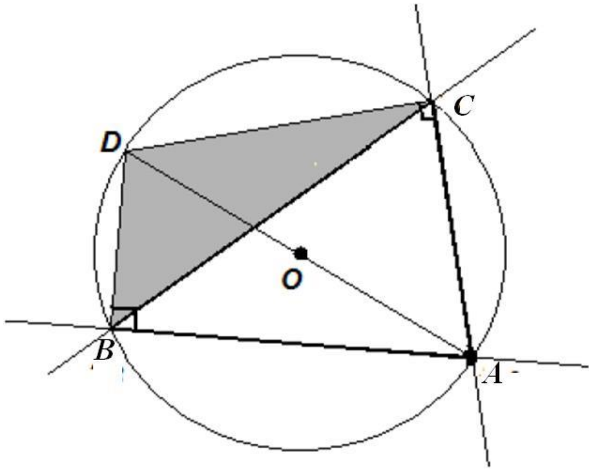
Ini mengatakan bahwa kalau ketaksamaan Erdos-mordel diberi tanda, maka berlaku :

$$PA + PB + PC \geq 2(p_1 + p_2 + p_3).$$

Yang berlaku untuk semua segitiga yang kakinya tegaklurus dari titik P, jadi juga mesti berlaku untuk segitiga yang semula.



gambar 10.2.5



gambar 10.2.

Untuk kasus lain dapat sebagai latihan bagi pembaca.

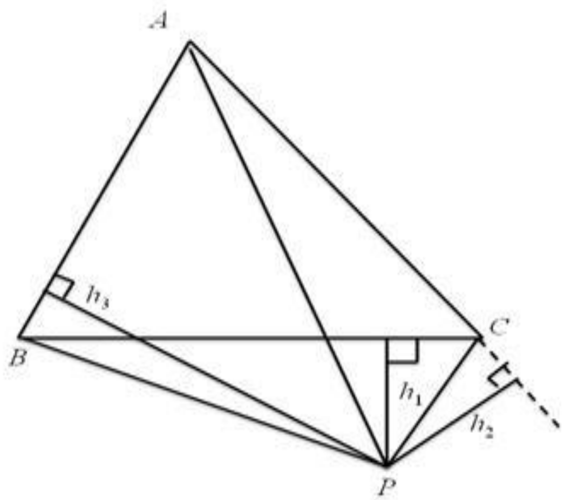
Kalau pada proses pembuktian di atas, jaraknya diberi tanda negatip atau positip bergantung kepada posisi titik *P* terhadap titik dan sisi di hadapan titik tersebut, maka berikut ini akan diberikan alternatif bukti ketaksamaan Erdos-Modell dengan menggunakan konsep segitiga yang dibentuk oleh titik P dan dua titik lainnya pada segitiga tersebut yaitu sebagai berikut: Perhatikan Gambar 11, untuk *P* sebarang titik di luar segitiga.

Pada Gambar 10.2.7, titik *P* di luar ΔABC. Misalkan h_1, h_2 dan h_3 berturut-turut adalah garis tinggi ΔPBC, ΔPCA dan ΔPAB. Sehingga diperoleh luas ΔABC sebagai berikut.

$$L\Delta ABC = L\Delta PCA + L\Delta PAB - L\Delta PBC$$

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2} h_2 \overline{CA} + \frac{1}{2} h_3 \overline{AB}$$

$$-\frac{1}{2} h_1 \overline{BC}$$



Gambar 10.2.7

$$= \frac{1}{2}(h_2\overline{CA} + h_3\overline{AB} - h_1\overline{BC})$$

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}(-h_1\overline{BC} + h_2\overline{CA} + h_3\overline{AB}). \qquad \ldots(10.2.8)$$

Untuk P sebarang titik *interior* segitiga, diperoleh $L\Delta ABC$, yaitu

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}(d_1\overline{BC} + d_2\overline{CA} + d_3\overline{AB}).$$

Tetapi untuk P titik di luar segitiga diperoleh $L\Delta ABC$ seperti pada persamaan (10.2.8), maka haruslah berlaku

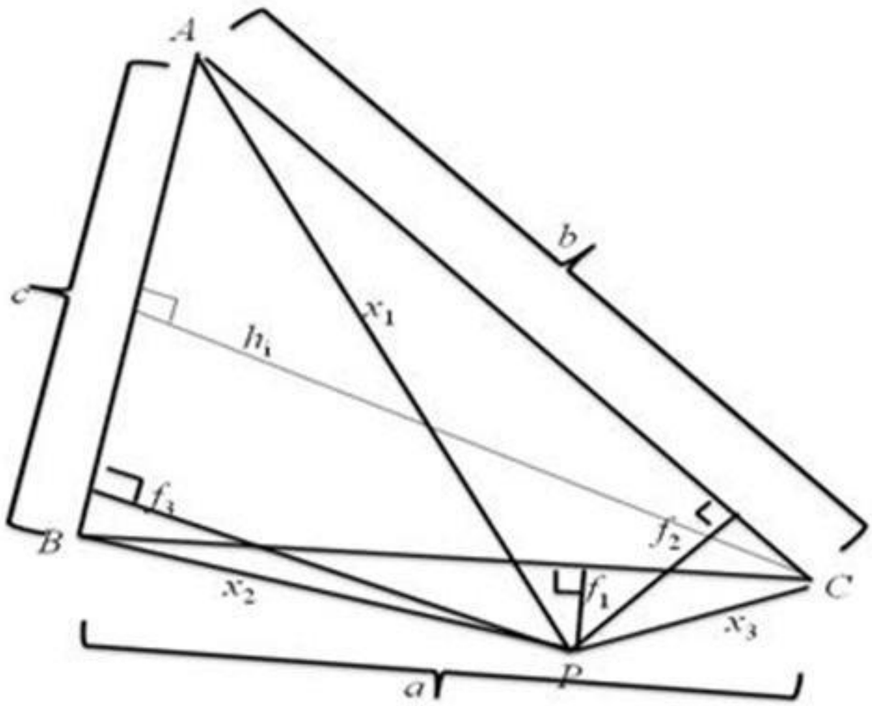
$$\frac{1}{2}(-h_1\overline{BC} + h_2\overline{CA} + h_3\overline{AB}) = \frac{1}{2}(d_1\overline{BC} + d_2\overline{CA} + d_3\overline{AB}). \qquad \ldots(10.2.9)$$

Dan diperoleh $-h_1 = d_1$, $h_2 = d_2$ dan $h_3 = d_3$.

Sehingga $L\Delta ABC$ pada persamaan (2.2.1) dengan P titik di luar segitiga seperti pada Gambar 11, haruslah d_1 bertanda negatif, sedangkan d_2 dan d_3 bertanda positif.

Teorema 10.2.3. Misalkan P sebarang titik di luar ΔABC. x_1, x_2, x_3 berturut-turut adalah jarak dari titik P ke titik-titik sudut A, B, C, dan d_1, d_2, d_3 berturut-turut adalah jarak dari titik P ke sisi-sisi BC, CA, AB, serta a, b dan c adalah panjang sisi-sisinya. Maka diperoleh Ketaksamaan *Erdős-Mordell*, yaitu:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2(d_1 + d_2 + d_3).$$



Gambar 10.2.8

Bukti: Pada Gambar 10.2.8, misalkan h_i adalah garis tinggi dari titik C ke sisi $\overline{AB}$. Maka diperoleh $L\Delta ABC$ sebagai berikut.

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\,h_i = \frac{1}{2}\,c h_i$$

$$2L\Delta ABC = ch_i. \qquad \ldots(10.2.10)$$

Pada Gambar 10.2.8, P titik di luar ΔABC. Misalkan f_1, f_2 dan f_3 berturut-turut adalah garis tinggi ΔBCP, ΔACP dan ΔABP. Sehingga diperoleh luas ΔABC sebagai berikut.

$$L\Delta ABC = L\Delta ACP + L\Delta ABP - L\Delta BCP$$

$$= \frac{1}{2} f_2\,\overline{CA} + \frac{1}{2} f_3\,\overline{AB} - \frac{1}{2} f_1\,\overline{BC}$$

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}(f_2\,CA + f_3\,AB - f_1\,BC)$$

$$= \frac{1}{2}(bf_2 + cf_3 - af_1)$$

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}(- af_1 + bf_2 + cf_3). \qquad \ldots(10.2.11)$$

Untuk P sebarang titik *interior* segitiga, diperoleh $L\Delta ABC$ sebagai berikut

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2}(ad_1 + bd_2 + cd_3). \qquad \ldots(10.2.11a)$$

Tetapi untuk P titik di luar segitiga diperoleh $L\Delta ABC$ seperti pada persamaan (10.2.11), maka haruslah berlaku

$$\frac{1}{2}(- af_1 + bf_2 + cf_3) = \frac{1}{2}(ad_1 + bd_2 + cd_3).$$

Dan diperoleh $- f_1 = d_1$, $f_2 = d_2$, dan $f_3 = d_3$.

Sehingga $L\Delta ABC$ pada persamaan (10.2.11a) dengan P titik di luar segitiga seperti pada Gambar 10.2.8, haruslah d_1 bertanda negatif, sedangkan d_2 dan d_3 bertanda positif.

Substitusikan persamaan (10.2.111) ke persamaan (10.2.10), maka

$$ch_i = ad_1 + bd_2 + cd_3. \qquad \ldots(10.2.12)$$

h_i adalah garis tinggi dari titik C ke sisi AB, sehingga $x_3 + d_3 \geq h_i$ dan diperoleh

$$c(x_3 + d_3) \geq ch_i$$

$$cx_3 + cd_3 \geq ch_i. \qquad \ldots(10.2.13)$$

Substitusikan persamaan (10.2.12) ke persamaan (10.2.13), maka

$$cx_3 + cd_3 \geq ad_1 + bd_2 + cd_3$$

$$cx_3 \geq ad_1 + bd_2 \qquad \ldots(10.2.14)$$

Karena $a = BC$, $b = CA$, dan $c = AB$, maka persamaan (10.2.14) menjadi

$$AB x_3 \geq BC\, d_1 + CA\, d_2. \qquad \ldots(10.2.15)$$

Kemudian, dengan memutar ABC 180^o terhadap bisektor $\angle C$ maka diperoleh $\Delta GHC \cong \Delta ABC$ seperti pada Gambar 16. Sehingga

$$GH = AB = c, \quad CG = CA = b,$$

dan

$$HC = BC = a.$$

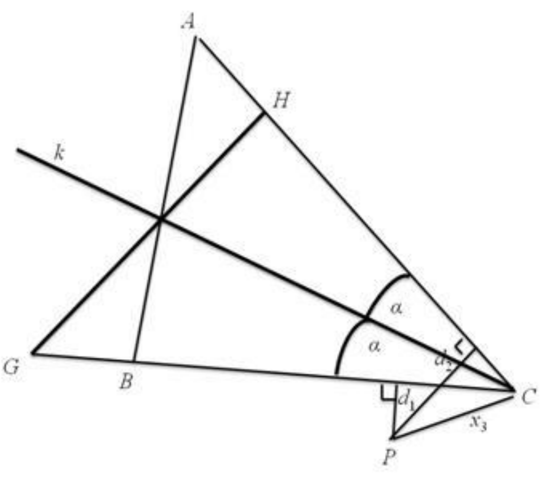
Dengan menggunakan persamaan (10.2.15) pada ΔGHC, berlaku

$$GH\, x_3 \geq CG\, d_1 + HC\, d_2$$

$$cx_3 \geq bd_1 + ad_2.$$

$$x_3 \geq \frac{b}{c} d_1 + \frac{a}{c} d_2 \qquad \ldots(10.2.15)$$

dengan d_1 bertanda negatif dan d_2 bertanda positif.



Gambar 10.2.9

Selanjutnya dengan cara yang sama, dengan memutar ΔABC 180^o terhadap bisektor $\angle A$ sehingga diperoleh

$$x_1 \geq \frac{c}{a} d_2 + \frac{b}{a} d_3 \qquad \ldots (10.2.16)$$

dengan d_2 dan d_3 bertanda positif.

Dan dengan memutar ΔABC 180^{o} terhadap bisektor $\angle B$ diperoleh

$$x_2 \geq \frac{c}{b} d_1 + \frac{a}{b} d_3 \qquad \ldots (10.2.17)$$

dengan d_1 bertanda negatif dan d_3 bertanda positif.

Dengan menjumlahkan persamaan (10.2.15), (10.2.16), dan (10.2.17), diperoleh

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2(d_1 + d_2 + d_3)$$

dengan d_1 bertanda negatif sedangkan d_2 dan d_3 bertanda positif. ♥

10.3. *Ketaksamaan Barrow's*

Kalau ketaksamaan Erdor Mordel di atas semuanya membanding jumlah jarak dari titik P ke titik sudut dari segitiga yang dibandingkan dengan 2 kali jarak dari jumlah jarak titik P terhadap sisi-sisi segititiga. Berikut ini akan diberikan bentuk lain dari ketaksamaan Erdos-Mordell yaitu membandingkan jumlah jarak titik P terhadap titik-titik sudut segitiga di bandingkan dengan jumlah jarak dari titik P terhadap titik-titik yang berada pada sisi-sisi segitiga tersebut. Untuk memudahkan penulisan maka pada teorema berikut ini akan digunakan lambang dan yang berbeda dengan notasi yang ada pada teorema-teorema di atas, baik untuk titik sudut segitiga maupun jaraknya.

Untuk membuktikan ketaksamaan Barrow's diperlukan dua buah lema, yang pada dasarnya lema ini persoalan dalam suatu segitiga, akan tetapi karena lema ini proses pembuktiannya lebih terkesan pada konsep trigonometri, maka pembuktiannya tidak akan diberikan dalam buku ini, namun bagi pembaca yang berminat dapat mencoba membuktikannya dengan menggunakan konsep trigonometri, sedangkan lema kedua nantinya dapat dibuktikan dengan menggunakan lema pertama.

***Lema* 10.3.1**. misalkan a, b dan c sisi-sisi dari ΔABC dengan sudutnya adalah α, β dan γ maka beralaku :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(bc.\cos\alpha + ac.\cos\beta + ab.\cos\gamma)$$

Bukti : lihat [sebagai latihan]

***Lema* 10.3.1**. misalkan a, b dan c sisi-sisi dari ΔABC dengan sudutnya adalah α, β dan γ maka beralaku :

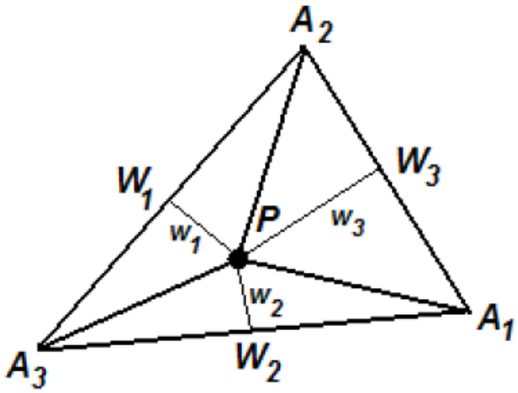
$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma \leq \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)$$

Bukti : lihat [sebagai latihan]

***Teorema* 10.3.1** : Diberikan $\Delta A_1A_2A_3$ dan titik P di dalam $\Delta A_1A_2A_3$' Misalkan W_i pada sisi-sisi dari $\Delta A_1A_2A_3$ yang berseberangan dengan A_i sehingga PW_j merupakan bisektor dari $\angle A_iPA_k$ dengan $i \neq j \neq k$. Jika $w_i = PW_i$. Maka berlaku

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 \geq 2(w_1 + w_2 + w_3).$$

Bukti : Misalkan sudut dari segitiga tersebut adalah α, β dan γ. Dengan $2\theta_1 = \angle A_2PA_3$, $2\theta_2 = \angle A_1PA_3$ dan $2\theta_3 = \angle A_1PA_2$. Maka berdasarkan soal no 24 latihan lati9han 14 ban 7 diperoleh



gambar 10.3.1

$$w_1 = \frac{2.PA_2.PA_3 \cos\theta_1}{PA_2+PA_3}$$

$$w_2 = \frac{2.PA_1.PA_3 \cos\theta_2}{PA_1+PA_3}$$

$$w_3 = \frac{2.PA_1.PA_2 \cos\theta_3}{PA_1+PA_2}$$

Maka diperoleh

$$w_1 + w_2 + w_3 = \frac{2.PA_2.PA_3 \cos\theta_1}{PA_2+PA_3} + \frac{2.PA_1.PA_3 \cos\theta_2}{PA_1+PA_3} + \frac{2.PA_1.PA_2 \cos\theta_3}{PA_1+PA_2}$$

$$= \left(\frac{2}{PA_2+PA_3}\right)(PA_2.PA_3 \cos\theta_1) +$$

$$\left(\frac{2}{PA_1+PA_3}\right)(PA_1.PA_3 \cos\theta_2) +$$

$$\left(\frac{2}{PA_1+PA_2}\right)(PA_1.PA_2 \cos\theta_3)$$

Dengan menggunakan rata-rata aritmatik-geometrik diperoleh

$$w_1 + w_2 + w_3 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{PA_2.PA_3}}\right)(PA_2.PA_3 \cos\theta_1) +$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{PA_1.PA_3}}\right)(PA_1.PA_3 \cos\theta_2) +$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{PA_1.PA_2}}\right)(PA_1.PA_2\cos\theta_3)$$

$$\leq \left(\sqrt{PA_2.PA_3}.\cos\theta_1\right) + \left(\sqrt{PA_1.PA_3}\,.\cos\theta_2\right) +$$

$$\left(\sqrt{PA_1.PA_2}\cos\theta_3\right)$$

Berdasarkan lema 10.3.2 dengan $= \sqrt{PA_2.PA_3}$, $b = \sqrt{PA_1.PA_3}$ dan $c = \sqrt{PA_1.PA_2}$

$$w_1 + w_2 + w_3 \leq \frac{\sqrt{PA_1.PA_3}.\sqrt{PA_1.PA_2}}{2\sqrt{PA_2.PA_3}} + \frac{\sqrt{PA_2.PA_3}\,.\sqrt{PA_1.PA_2}}{2\sqrt{PA_1.PA_3}} +$$

$$\frac{\sqrt{PA_2.PA_3}\,.\sqrt{PA_1.PA_3}}{2\sqrt{PA_1.PA_2}}$$

$$w_1 + w_2 + w_3 \leq \frac{PA_1}{2} + \frac{PA_2}{2} + \frac{PA_3}{2}$$

Maka diperoleh

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 \geq 2(w_1 + w_2 + w_3). \qquad \heartsuit$$

***Alternatif bukti teorema* 10.3.1.**

Karena konsep luas biasanya dirasakan lebih mudah memahaminya, maka berikut ini juga akan diberikan alternatif bukti teorema 10.3.1 dengan menggunakan konsep luar. Tetap dengan menggunakan seperti bukti di atas yaitu misalkan sudut dari segitiga tersebut adalah α, β dan γ. Dengan $2\theta_1 = \angle A_2PA_3$, $2\theta_2 = \angle A_1PA_3$ dan $2\theta_3 = \angle A_1PA_2$. Kembali perhatikan gambar 10.3.1, maka

$$L\Delta A_2PA_3 = \frac{PA_2.PA_3.\sin(2\theta_1)}{2}$$

$$= \frac{2.PA_2.PA_3.\sin\theta_1\cos\theta_1}{2}$$

$$= PA_2.PA_3.\sin\theta_1\cos\theta_1$$

Sedangkan

$$L\Delta A_2PA_3 = L\Delta A_2PW_1 + L\Delta A_3PW_1$$

Karena PW_1 bisektor dari $\angle A_2PA_3$, maka berlaku

$$L\Delta A_2PA_3 = \frac{PA_2.w_1.\sin(\theta_1)}{2} + \frac{PA_3.w_1.\sin(\theta_1)}{2}$$

$$L\Delta A_2PA_3 = \frac{(PA_2+PA_3).w_1.\sin(\theta_1)}{2}$$

Kembali dengan menggunakan rata-rata aritmatika-geometrik diperoleh

$$L\Delta A_2PA_3 = \frac{2.\sqrt{PA_2PA_3}.w_1.\sin(\theta_1)}{2}$$

$$L\Delta A_2PA_3 = w_1.\sqrt{PA_2PA_3}\,.\sin(\theta_1)$$

Karena $PA_2 = PA_3$, kita gunakan ketaksamaan di atas untuk ΔA_2PA_2, maka diperoleh

$$PA_2PA_3\,.\sin(\theta_1)\,.\cos(\theta_1) \geq w_1.\sqrt{PA_2PA_3}\,.\sin(\theta_1)$$

$$w_1 \leq \sqrt{PA_2PA_3}\,.\cos(\theta_1) \qquad (10.3.1)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$w_2 \leq \sqrt{PA_1PA_3}\,.\cos(\theta_2) \text{ dan } w_3 \leq \sqrt{PA_1PA_2}\,.\cos(\theta_3) \qquad (10.3.2)$$

Dengan $PA_1 = PA_2$ dan $PA_1 = PA_3$, maka

$$0 \leq \left(\sqrt{PA_1} - \sqrt{PA_2}\,.\cos(\theta_3) - \sqrt{PA_3}\,.\cos(\theta_2)\right)^2 +$$

$$\left(\sqrt{PA_2}\,.\sin(\theta_3) - \sqrt{PA_3}\,.\sin(\theta_2)\right)^2 \qquad (10.3.3)$$

$$= PA_1 + PA_2\cos^2(\theta_3) + PA_3\cos^2(\theta_2) +$$

$$-2\sqrt{PA_1PA_2}\,.\cos(\theta_3) - 2.\sqrt{PA_1PA_3}\,.\cos(\theta_2) + 2\sqrt{PA_2PA_3}\,.\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)$$

$$+ PA_2 \sin^2(\theta_3) + PA_3 \sin^2(\theta_2) - 2\sqrt{PA_2 PA_3}.\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)$$

$$= PA_1 + PA_2[\sin^2(\theta_3) + \cos^2(\theta_3)] + PA_3[\sin^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_2)] +$$

$$-2\sqrt{PA_1 PA_2}.\cos(\theta_3) - 2.\sqrt{PA_1 PA_3}.\cos(\theta_2) + 2\sqrt{PA_2 PA_3}.\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)$$

$$- 2\sqrt{PA_2 PA_3}.\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)$$

$$= PA_1 + PA_2 + PA_3 + -2\sqrt{PA_1 PA_2}.\cos(\theta_3) - 2.\sqrt{PA_1 PA_3}.\cos(\theta_2) +$$

$$2\sqrt{PA_2 PA_3}.\cos(\theta_2 + \theta_3)$$

Karena $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$, maka

$$0 \leq PA_1 + PA_2 + PA_3 - 2\sqrt{PA_1 PA_2}.\cos(\theta_3) - 2.\sqrt{PA_1 PA_3}.\cos(\theta_2) +$$

$$2\sqrt{PA_2 PA_3}.\cos(\pi - \theta_1)$$

$$\leq PA_1 + PA_2 + PA_3 - 2\sqrt{PA_1 PA_2}.\cos(\theta_3) - 2.\sqrt{PA_1 PA_3}.\cos(\theta_2) -$$

$$2\sqrt{PA_2 PA_3}.\cos(\theta_1)$$

Maka berdasarkan persamaan 10.3.2 diperoleh

$$0 \leq PA_1 + PA_2 + PA_3 - 2w_1 - 2w_2 - 2w_3 \qquad (10.3.4)$$

Yang menghasilkan

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 \geq 2w_1 + 2w_2 + 2w_3 \qquad \heartsuit$$

Berikut ini diberikan akibat dari teorema di atas, yang menyatakan hubungan garis tinggi dengan sisi-sisi yang mengapitnya serta cosines sudutnya.

***Akibat* 10.3.1.** : Diberikan $\Delta A_1A_2A_3$ dan W_i pada sisi-sisi dari $\Delta A_1A_2A_3$ yang berseberangan dengan A_i sehingga PW_j merupakan bisektor dari $\angle A_iPA_k$ dengan $i \neq j \neq k$. Jika $w_i = PW_i$. Misalkan juga $\alpha_i = \angle A_i$ dan h_i panjang garis tinggi dari titik A_i ke sisi dihadapannya. Maka berlaku

$$h_1 \leq \sqrt{a_2a_3}\, cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right), \quad h_2 \leq \sqrt{a_1a_3}\, cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \text{ dan } h_3 \leq \sqrt{a_1a_2}\, cos\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)$$

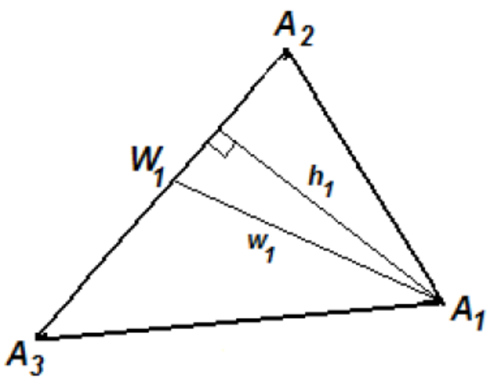
Bukti : Dari persamaan (10.3.2) diperoleh

$$w_1 \leq \sqrt{a_2a_3}\, cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)$$

$$w_2 \leq \sqrt{a_1a_3}\, cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)$$

$$h_3 \leq \sqrt{a_1a_2}\, cos\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)$$

karena $h_1 \leq w_1$, $h_2 \leq w_2$ dan $h_3 \leq w_3$, maka diperoleh persamaan yang diinginkan



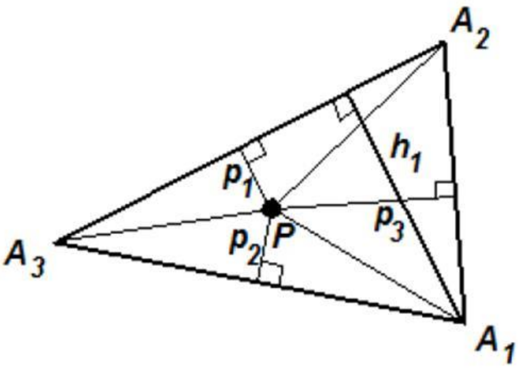
gambar 10.3.2

***Teladan* 10.3.1**, diberikan $\Delta A_1A_2A_3$ dan P titik dalamnya, jika a_1 menyatakan panjang sisi-sisi yang berada di depan sudut A_i. Jika p_i menyatakan jarak dari titik P ke sisi di hadapan sudut A_i. tunjukkan bahwa berlaku $a.PA$ + b.PB + $c.PC \geq 4L\Delta ABC$.

***Penyelesaian* :** Pertama-tama misalkan

$2LA_1A_2A_3 = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3.$

Jika h_i menyatakan panjang garis tinggi dari titik A_i, maka jelas berlaku



gambar 10.3.3

$PA_1 + p_1 \geq h_1$

kalau persamaan di atas di kali dengan a_1 maka diperoleh

$a_1PA_1 + a_1p_1 \geq a_1h_1 =$ $2L\Delta ABC.$

atau

$a_1PA_1 \geq 2L\Delta ABC - a_1p_1$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$A_2PA_2 \geq 2L\Delta ABC - a_2p_2$ dan

$A_3PA_3 \geq 2L\Delta ABC - a_3p_3$

Kalau ketiga persamaan di atas di jumlahkan maka akan diperoleh

$$a_1PA_1 + A_2PA_2 + A_3PA_3 \geq 2L\Delta ABC - a_1p_1 + 2L\Delta ABC - a_2p_2 + 2L\Delta ABC - a_3p_3$$

$$= 6\,L\Delta ABC - (a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3)$$

$$= 6\,L\Delta ABC - 2\,L\Delta ABC$$

$$= 4\,L\Delta ABC$$ ♥

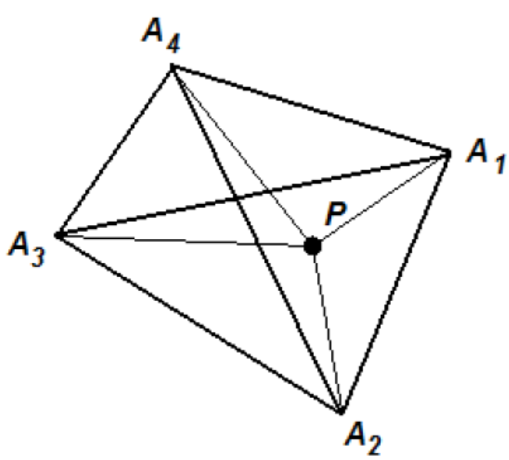
10.4. *Ketaksamaan Erdos-Mordel Untuk Segi-empat.*

Kalau pada ke tiga sub-bab di atas ketaksamaan Erdos-Mordel diberlakukan pada segitiga, dengan titik P berada di dalam maupun di luar segitiga. Bentuk lain ketaksamaan Erdos-Mordelnya adalah kita bandingkan dengan jumlah jarak titik P dengan sebarang titik yang yang berada pada ketiga sisi segitiga tersebut. Akan tetapi berikut ini, bentuk ketaksamaan Erdos-Mordel kita kembangkan untuk sebarang titik di dalam sebarang segiempat.

***Teorema* 10.4.1**. Misalkan $A_1A_2A_3A_4$ sebarang segiempat dengan titik P berada di dalam segiempat tersebut. Misalkan p_{ij} jarak dari titik P ke sisi A_iA_j dan misalkan pula $p_{ij;\ ijk}$ jarak bertanda dari titik P ke sisi A_iA_j untuk $\Delta A_iA_jA_k$. Maka berlaku

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 \geq 4/3\ (p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{14})$$

Bukti : Perhatikan gambar 10.4.1 di sebelah dan pandang titik P terhadap $\Delta A_1A_2A_3$, $\Delta A_2A_3A_4$, $\Delta A_3A_4A_1$ dan $\Delta A_4A_1A_2$. Maka berdasarkan teorema 10.2.2. untuk ke empat segitiga di atas, maka untuk masing-masing segitiga dengan titik P yang seudah ditetapkan akan diperoleh hasil sebagai berikut



gambar 10.4.1

Untuk $\Delta A_1A_2A_3$: $$PA_1 + PA_2 + PA_3 \geq 2(p_{12;\ 123}.p_{23;123}.p_{13;123})$$

Untuk $\Delta A_2A_3A_4$: $PA_2 + PA_3 + PA_4 \geq 2(p_{23;\,234}.p_{34;234}.p_{24;234})$

Untuk $\Delta A_1A_3A_4$: $PA_1 + PA_3 + PA_4 \geq 2(p_{34;\,14}.p_{14;134}.p_{13;134})$

Untuk $\Delta A_1A_2A_4$: $PA_1 + PA_2 + PA_4 \geq 2(p_{12;\,124}.p_{24;124}.p_{14;124})$

Perhatikan hal berikut *p*

$p_{13;\,123} = -p_{13;134}$, karena *P* minimal merupakan titik dalam dari $\Delta A_1A_2A_3$ dan $\Delta A_1A_3A_4$.

$P_{24;\,124} = -p_{24;234}$, karena *P* minimal merupakan titik dalam dari $\Delta A_1A_2A_4$ dan $\Delta A_2A_3A_4$.

$p_{12;\,123} = p_{12;124} = p_{12}$, karena *P* minimal mesti berada pada sisi yang sama terhadap A_1A_2 ditinjau dari A_3 dan A_4.

$p_{23;\,123} = p_{23;234} = p_{23}$, karena *P* minimal mesti berada pada sisi yang sama terhadap A_2A_3 ditinjau dari A_1 dan A_4.

$P_{34;\,134} = p_{34;234} = p_{34}$, karena *P* minimal mesti berada pada sisi yang sama terhadap A_3A_4 ditinjau dari A_1 dan A_2.

$p_{14;\,124} = p_{14;144} = p_{14}$, karena *P* minimal mesti berada pada sisi yang sama A_1A_4 ditinjau dari A_2 dan A_3.

Maka ketaksamaannya menjadi

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 \geq 2p_{12} + 2p_{23} - 2p_{13;134}$$

$$PA_2 + PA_3 + PA_4 \geq 2p_{23} + 2p_{34} + 2p_{24;234}$$

$$PA_1 + PA_3 + PA_4 \geq 2p_{34} + 2p_{14} + 2p_{13;134}$$

$$PA_1 + PA_2 + PA_4 \geq 2p_{14} + 2p_{12} - 2p_{24;234}$$

Kalau ke emapat persamaan di atas dijumlahkan, maka akan diperoleh

$$3(PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4) = 3PA_1 + 3PA_2 + 3PA_3 + 3PA_4$$

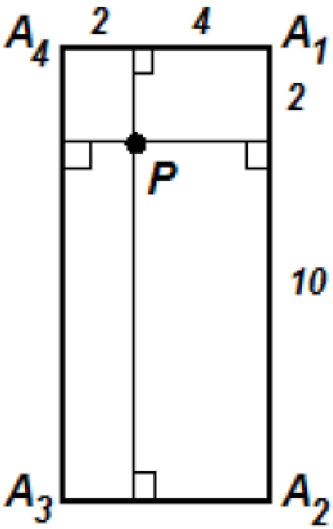
$$\geq 4p_{12} + 4p_{23} + 4p_{34} + 4p_{14}$$

$$= 4(p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{14})$$

Jadi

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 \geq \frac{4}{3}(p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{14}) \qquad \heartsuit$$

Teladan **1.4.1.** Perhatikan segiempat $A_1A_2A_3A_4$ seperti gambar disebelah. Maka diperoleh $p_{12} = 4$, $p_{23} = 10$, $p_{34} = 2$ dan $p_{14} = 2$.



Gambar 10.4.2

Dan juga

$$PA_1 = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$PA_2 = \sqrt{4^2 + 10^2} = 2\sqrt{29}$$

$$PA_3 = \sqrt{2^2 + 10^2} = 2\sqrt{26}$$

$$PA_4 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

Jadi

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{29} + 2\sqrt{26} + 2\sqrt{2} \approx 28.27$$

dan

$$p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{14} = 18$$

Maka

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 \approx 28,27 > 26.46 \approx 18\sqrt{2} \approx \sqrt{2}(p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{14})$$

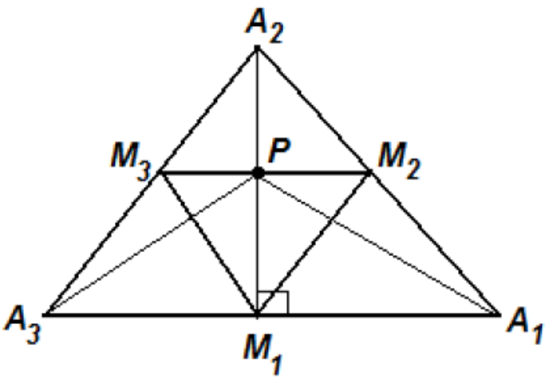
Dan juga sudah pasti

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 28,27 > 24 = \frac{4}{3}.18 = \frac{4}{3}(p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{14}) \quad ♥$$

***Soal-latihan* 19.**

16. Pada contoh 10.1.2 di atas, bahas untuk titik *P* = (1,1).
17. Periksalah apakah yang berlaku tentang ketaksamaan Erdos-Mordel jika titik *P* berada pada salah satu sisi dari ΔABC.
18. Periksalah apakah yang berlaku tentang ketaksamaan Erdos-Mordel jika titik *P* berada pada salah satu titik sudut dari ΔABC
19. Bilakah tanda kesamaan pada teoema 10.2.2 berlaku dan buktikan dugaan anda
20. Bilakah tanda kesamaan pada teorema 10.3.1 beralaku dan buktikan dugaan anda.
21. Periksalah apa yang terjadi jika pada teorema 10.3.1 $PA_1 = PA_2 = PA_3$.

22. Pada gambar disebelah, $\Delta A_1A_2A_3$ adalah segitiga sama-sisi dengan panjang sisi 12 cm. M_1 titik tengah dari A_1A_3, M_2 titik tengah dari A_1A_2 dan M_3 titik tengah dari A_2A_3. Dengan M_3M_2 // A_3A_1 sedangkan P titik tengah dari M_2M_3. Periksalah apakah ketaksamaan Erdos-Mordel atau berlaku pada segitiga tersebut.



23. Misalkan ΔABC dengan panjang sisi adalah a, b dan c, P adalah titik di dalam ΔABC, Jika r,s dan t adalah jarak dari titik P ke sisi BC, AC dan AB. Tunjukkaan berlaku

$$r.PA + s.PB + t.PC \geq 2(rs + st + tr)$$

24. Untuk kondisi yang sama dengan soal no 8 di atas, tunjukkan bahwa

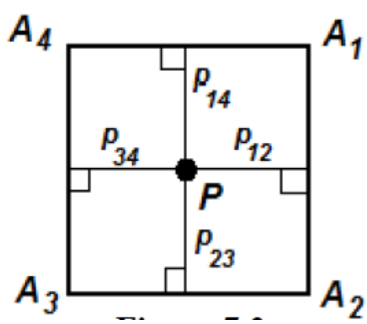
$$PA.PB.PC \geq 8.r.s.t$$

25. Misalkan ΔABC dengan panjang sisi adalah a, b dan c, P adalah titik di dalam ΔABC, tunjukkan bahwa berlaku $a.PA + b.PB + c.PC \geq 4L\Delta ABC$.

$$PA_1.PA_2.PA_3 \geq (p_2 + p_3)(p_1 + p_3)(p_1 + p_2).$$

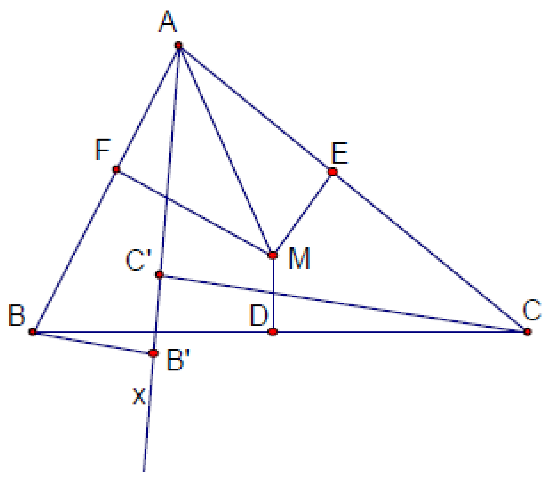
26. Jelaskan dengan bukti, bilakan tanda kesamaan berlaku pada teorema 10.4.1

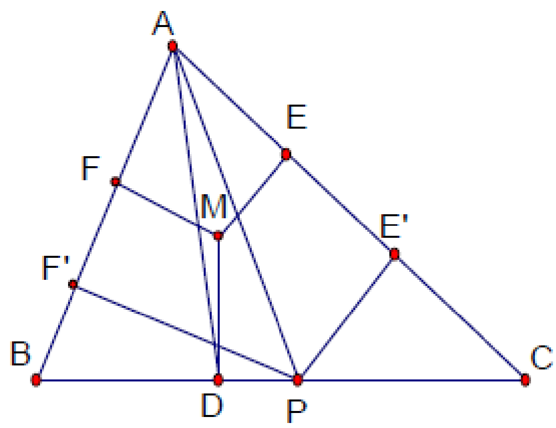
27. Perhatikan gambar disebelah, periksalah apakah pertaksamaan 10.2.0, teorema 10.3.1 dan teorema 10.4.1 beralaku untuk gambar disebelah.



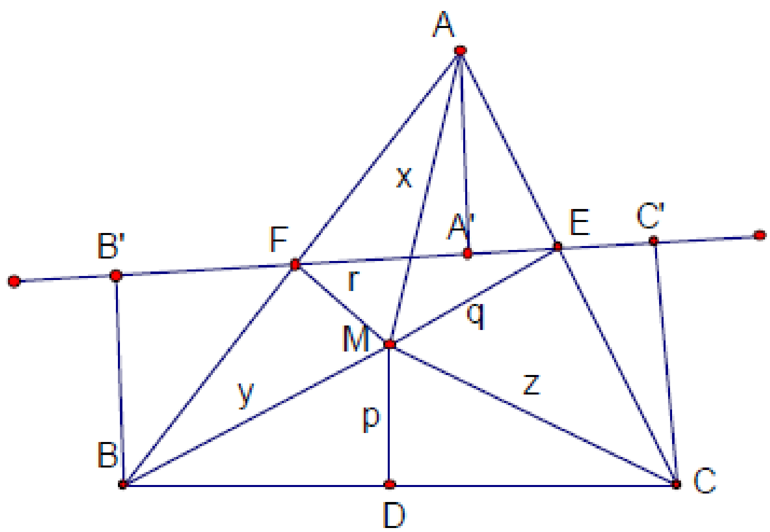
28. Buktikan teoema 10.2.2 untuk kasus yang belum dibuktikan.

29. Dengan menggunakan bantuan gambar di bawah, buktikan lema 10.1.1 yang mana setiap satu gambar untuk satu cara pembuktian

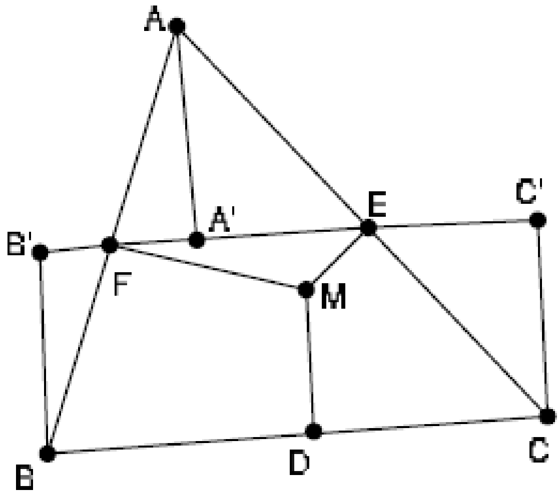




30. Dengan bantuan aturan sinus,buktikan lagi lema 10.1.1 dengan bantuan gambar di bawah ini



31. Dengan menggunakan aturan sinus dan gambar di bawah ini, buktikanlah ketaksamaan Erdos-Mordel



Pentunjuk : gunakan

$$B'C' = c.\cos AFA' + b.\cos AEA' = c.\sin MFA' + b.\sin MEA'$$

dan

$$\frac{\sin MFA'}{p_2} = \frac{\sin MEA'}{p_3} = \frac{\sin A}{EF} = \frac{1}{x_1}$$

32. Misalkan P sebarang titik di dalam segitiga *ABC* sehingga *PD*, *PE* dan *PF* masing-masing tegak lurus dengan sisi *BC*, *CA* dan *AB*, Jika panjang sisi *BC*, *CA* dan *AB* masing-masing dinotasikan dengan *a*, *b* dan *c*. Buktikan bahwa :

$$\frac{PB.PC}{bc} + \frac{PA.PC}{ac} + \frac{PA.PB}{ab} \geq 1$$

33. **). Misalkan P sebarang titik di dalam ΔABC sehingga *PD*, *PE* dan *PF* masing-masing tegak lurus dengan sisi *BC*, *CA* dan *AB*, Jika panjang sisi *BC*, *CA* dan *AB* masing-masing dinotasikan dengan *a*, *b* dan *c*. bila *x*, y dan *z* adalah sebarang bilangan real yang memenuhi

$xy + yz + xz \geq 0$

Tunjukkan bahwa :

$$(y+z)\frac{PA}{a}+(z+x)\frac{PB}{b}+(x+y)\frac{PC}{c}\geq 2\sqrt{xy+yz+zx}$$

34. *). Jika titik P sebarang titik di dalam ΔABC dengan panjang sisi a, b dan c. Buktikan bahwa berlaku :

$$\frac{PA}{a}+\frac{PB}{b}+\frac{PC}{c}\geq\sqrt{3}$$

35. *). Misalkan L menyatakan luas ΔABC, dan P sebarang titik di dalam ΔABC, buktikan bahwa berlaku

$$a.PA + b.PB + c.PC \geq 4L$$

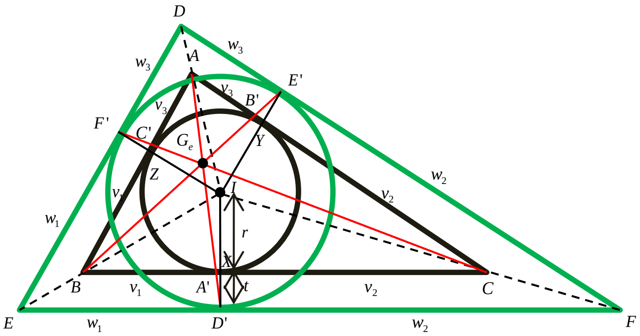
36. **). Misalkan P sebarang titik dalam ΔABC dan r menyatakan jari-jari lingkaran dalam, tunukkan bahwa berlaku :

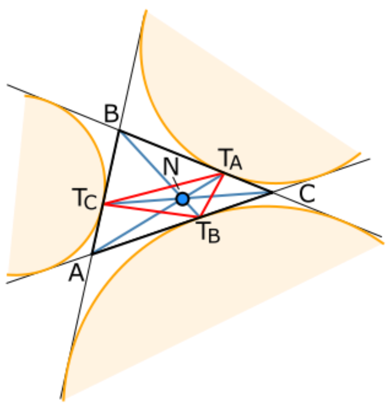
$$PA + PB + PC \geq 6r.$$

BAB XI

PENGEMBANGAN SEGITIGA

Pengembangan berbagai teorema dalam segitiga khususnya untuk titik Gergonne dan titik Nagel, tidak banyak dipergunakan dalam kehidupan sehari-hari. Akan tetapi ini lebih banyak digunakan untuk pengembangan geometri itu sendiri. Begitu juga dengan berbagai perbandingan luas di lahirkan dari pengkontruksian titik Gergonne dan titik Nagel. Teorema dengan berbagai alternatif lebih ditujukan untuk pengembangan daya analisis dari Mahasiswa/i. Begitu juga dengan proses pembuktian berbagai panjang sisi yang dilahirkan dari pengkontruksian yang dibuat.





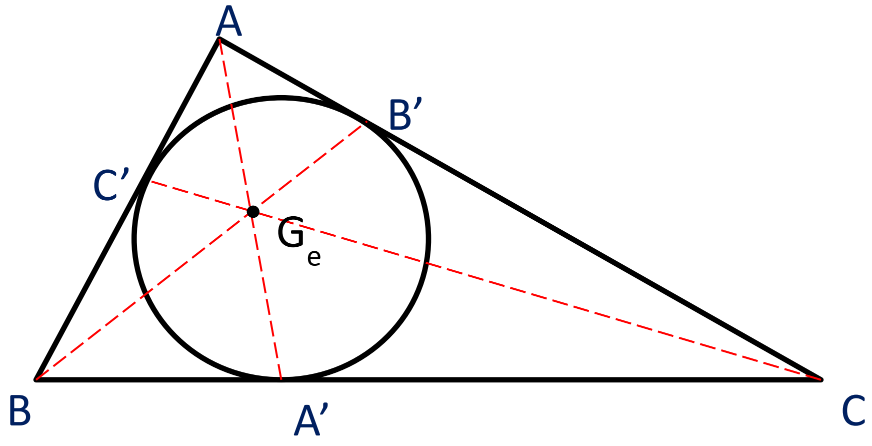
BAB XI

PENGEMBANGAN SEGITIGA

11.1 Titik Gergonne Pada Suatu Segitiga

Titik Gergonne pada segitiga adalah titik yang terbentuk dari tiga garis yang dihubungkan dari ketiga sudut segitiga ke titik singgung antara lingkaran dalam dan sisi segitiga. Pada sebarang segitiga, dapat dibentuk titik pusat lingkaran dalam segitiga yang merupakan titik perpotongan bisektor dari ketiga sudut segitiga (*incenter*), selanjutnya dapat dibentuk lingkaran dalam (*incircle*) yang menyinggung ketiga sisi segitiga sehingga akan terdapat tiga titik singgung. Apabila dibentuk garis dari ketiga sudut segitiga terhadap titik singgung dihadapannya, maka ketiga garis tersebut akan berpotongan pada satu titik (*concurent*) disebut titik Gergonne**.** Jadi, titik Gergonne (*Gergonne point*) adalah titik yang berasal dari perpotongan garis dari sudut puncak segitiga terhadap sisi singgung lingkaran dalam. untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 11.1.1.

Pada Gambar 11.1.1, ΔABC memuat lingkaran dalam yang terbentuk dari titik *incenter* dan terdapat titik singgung lingkaran terhadap sisi segitiga, sehingga dapat dibentuk garis ketiga sudut segitiga terhadap titik singgung di hadapannya yaitu, dari titik A terhadap titik A' pada sisi BC, dari titik B terhadap titik B' pada sisi AC dan dari C terhadap titik C' pada sisi AB. Ketiga segmen garis AA', BB', dan CC' tersebut berpotongan di satu titik [4]. Adapun teorema yang menjelaskan tentang titik Gergonne adalah berikut ini.



Gambar 11.1.1.

Teorema 11.1.1 (Teorema Gergonne) Di dalam segitiga, garis yang dibentuk dari titik-titik puncak ΔABC yang dihubungkan dengan titik singgung lingkaran dalam pada sisi di hadapannya adalah konkuren.

Bukti: Konkurensi titik Gergonne dalam segitiga dibuktikan dengan menggunakan empat cara yaitu menggunakan garis singgung lingkaran, semiperimeter segitiga, segitiga kongruen, dan lingkaran kosentrik. Berikut ini dibahas berbagai cara membuktikan konkurensi titik Gergonne sebagai berikut:

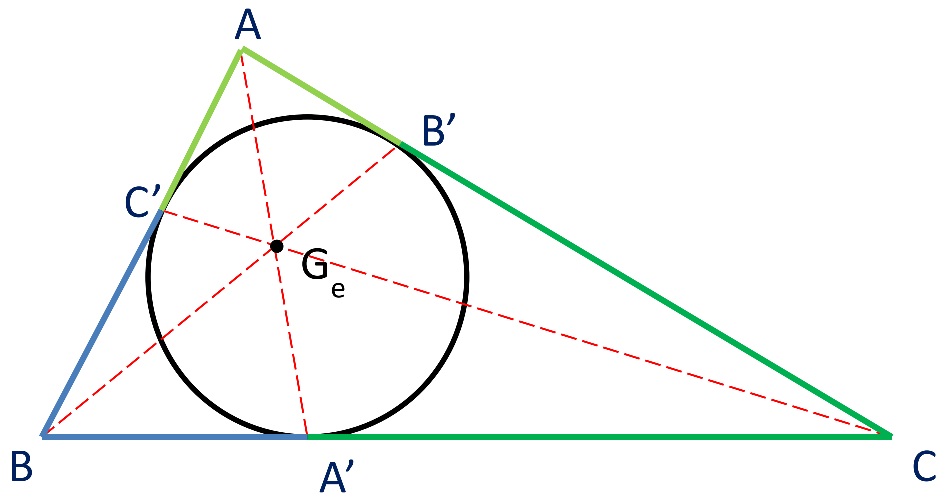
Cara 1. Dengan menggunakan garis singgung pada lingkaran.

Perhatikan Gambar 15, akan dibuktikan AA', BB', dan CC' konkuren di titik Gergonne. Dengan menggunakan Teorema 2.2.2, dapat ditentukan beberapa garis singgung pada lingkaran dalam ΔABC yang memiliki panjang yang sama yaitu:

$$B'A = AC' \qquad (11.1.1)$$

$$BA' = C'B \tag{11.1.2}$$

$$A'C = CB' \tag{11.1.3}$$



Gambar 11.1.2.

Dengan mengalikan persamaan (11.1.1), (11.1.2), dan (11.1.3) diperoleh

$$B'A \cdot BA' \cdot A'C = AC' \cdot C'B \cdot CB'$$

Kemudian dengan menggunakan Teorema 2.1.1, persamaan tersebut menjadi

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{B'A} \cdot \frac{BA'}{C'B} \cdot \frac{CB'}{A'C}$$

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1. \tag{11.1.4}$$

Karena persamaan (11.1.4) memenuhi teorema Ceva, maka terbukti titik Gergonne dari ΔABC adalah konkuren. ■

Cara 2. Dengan menggunakan semiperimeter pada ΔABC.

Perhatikan Gambar 11.1.3, akan dibuktikan AA', BB', dan CC' konkuren di titik Gergonne, dengan menggunakan semiperimeter pada ΔABC.

Misalkan $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, dan $BA' = x$.

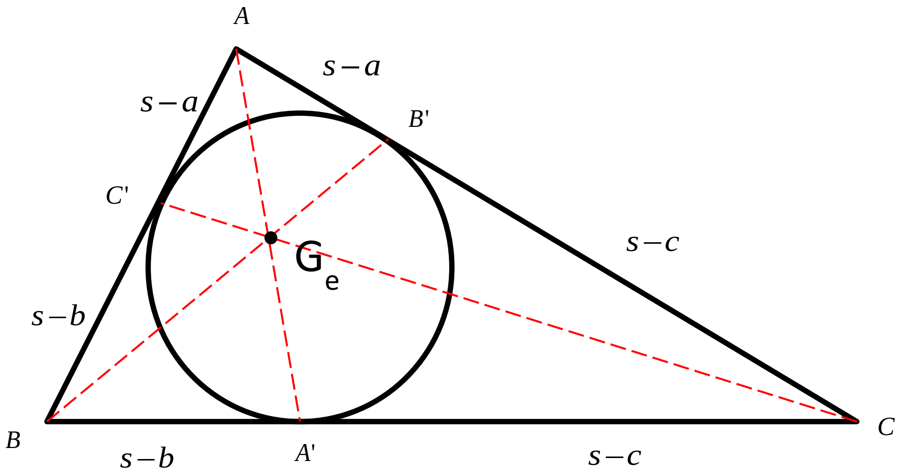
Pada ΔABC terdapat garis-garis singgung pada lingkaran yaitu

$$BA' = C'B = x \tag{11.1.5}$$

$$CA' = CB' = a - x \tag{11.1.6}$$

dan

$$AC' = AB' = c - x \tag{11.1.7}$$



Gambar 11.1.3

karena keliling ΔABC adalah

$$BA' + A'C + CB' + B'A + AC' + C'B = AB + AC + BC \tag{11.1.8}$$

maka subsitusikan persamaan (11.1.5), (11.1.6), dan (11.1.7) ke persamaan (11.1.8) sehingga diperoleh

$$x + (a - x) + (a - x) + (c - x) + (c - x) + x = c + a + b$$

$$2a + 2c - 2x = a + b + c$$

$$2x = 2a + 2c - a - b - c$$

$$x = \frac{1}{2}(a + c - b)$$

$$x = \frac{1}{2}(a + c - b) - b + b$$

$$x = s - b$$

sehingga

$$BA' = s - b \tag{11.1.9}$$

dengan cara yang sama memperoleh persamaan (11.1.9), maka

$$AB' = s - a \tag{11.1.10}$$

$$CB' = s - c \tag{11.1.11}$$

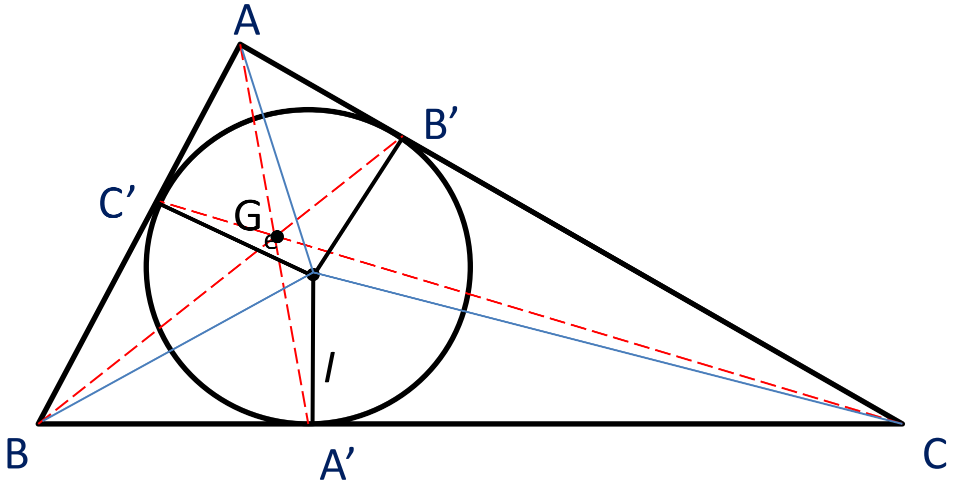
dengan menggunakan Teorema 2.1.1 dan persamaan (11.1.9), (11.1.10), dan (11.1.11) sehingga diperoleh

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{s-a}{s-b} \cdot \frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-c}{s-a}$$

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1. \tag{11.1.12}$$

Karena persamaan (11.1.12) memenuhi teorema Ceva (Teorema 2.1.1), maka terbukti AA', BB', dan CC' konkuren di titik Gergonne. ■

Cara 3. Menggunakan segitiga kongruen.



Gambar 11.1.4.

Akan ditunjukkan AA', BB' dan CC' konkuren di titik Gergonne. Perhatikan Gambar 11.1.4, dengan I merupakan *incenter* ΔABC, bentuk jari-jari lingkaran dari titik

I terhadap titik singgung. Kemudian perhatikan $\Delta IBA'$ dan $\Delta IBC'$, misalkan $\angle A'BC' = \theta$. Karena IB bisektor sudut, maka

$$\angle IBA' \cong \angle IBC' = \frac{\theta}{2}$$

Selanjutnya karena IA' merupakan jari-jari, sehingga diperoleh

$$\angle BIA' \cong \angle BIC' = 90 - \frac{\theta}{2}$$

maka pada $\Delta IBA'$ dan $\Delta IBC'$ diperoleh

$\angle IBA' \cong \angle IBC'$	(sd)	(bisektor sudut)
$IB = IB$	(s)	(garis yang sama)
$\angle BIA' \cong \angle BIC'$	(sd)	(diketahui)

Berdasarkan korespodensi (sd-s-sd) pada Postulat 15, dinyatakan bahwa

$$\Delta IBA' \cong \Delta IBC'$$

sehingga diperoleh

$$BA' = C'B \tag{11.1.13}$$

dengan cara yang sama pada $\Delta ICA', \Delta ICB', \Delta IAB'$, dan $\Delta IAC'$ maka diperoleh

$$\Delta ICA' \cong \Delta ICB'$$

$$\Delta IAB' \cong \Delta IAC'$$

sehingga

$$A'C = CB' \tag{11.1.14}$$

$$B'A = AC' \tag{11.1.15}$$

dengan menggunakan teorema Ceva, persamaan (11.1.13), (11.1.14), dan (11.1.15) menjadi

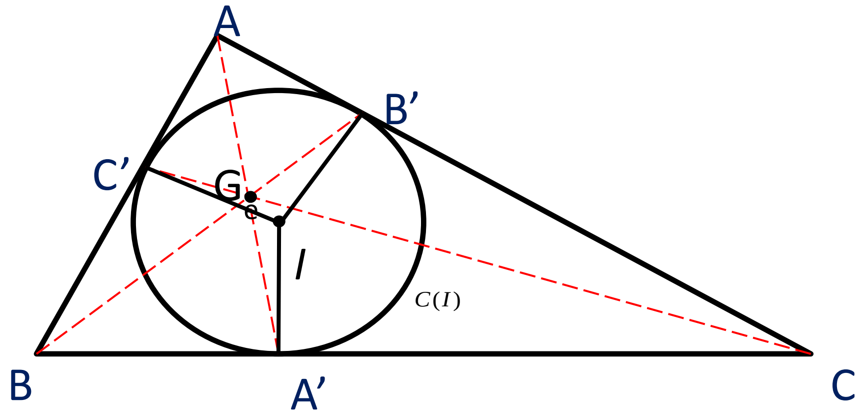
$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{BA'}{C'B} \cdot \frac{A'C}{CB'} \cdot \frac{B'A}{AC'}$$

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1 \tag{11.1.16}$$

karena persamaan (11.1.16) memenuhi teorema Ceva, maka terbukti titik Gergonne dari ΔABC adalah konkuren. ■

Cara 4. Menggunakan lingkaran kosentrik.

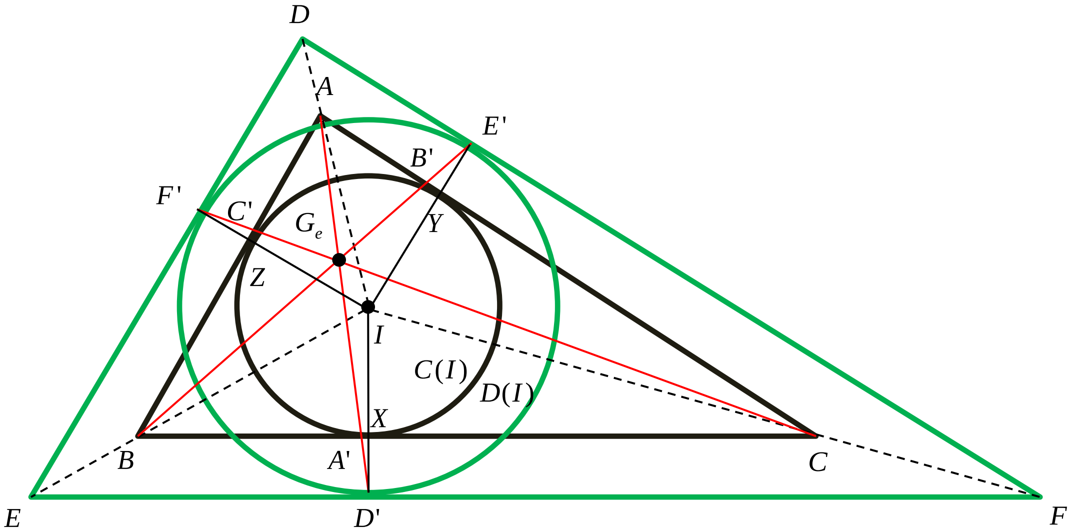
Lingkaran kosentrik adalah lingkaran yang memiliki pusat yang sama. Untuk menunjukkan konkurensi titik Gergonne dengan menggunakan lingkaran kosentrik, dapat ditunjukkan dengan mengkontruksi lingkaran kosentrik dari lingkaran dalam segitiga dengan *incenter* sebagai titik pusat kedua lingkaran tersebut, sehingga dapat dibentuk segitiga yang sebangun terhadap segitiga asalnya. Kemudian dengan mengkontruksi lingkaran dan segitiga tersebut dapat ditentukan panjang sisi segitiga untuk menunjukan konkurensi titik Gergonne.



Gambar 11.1.5

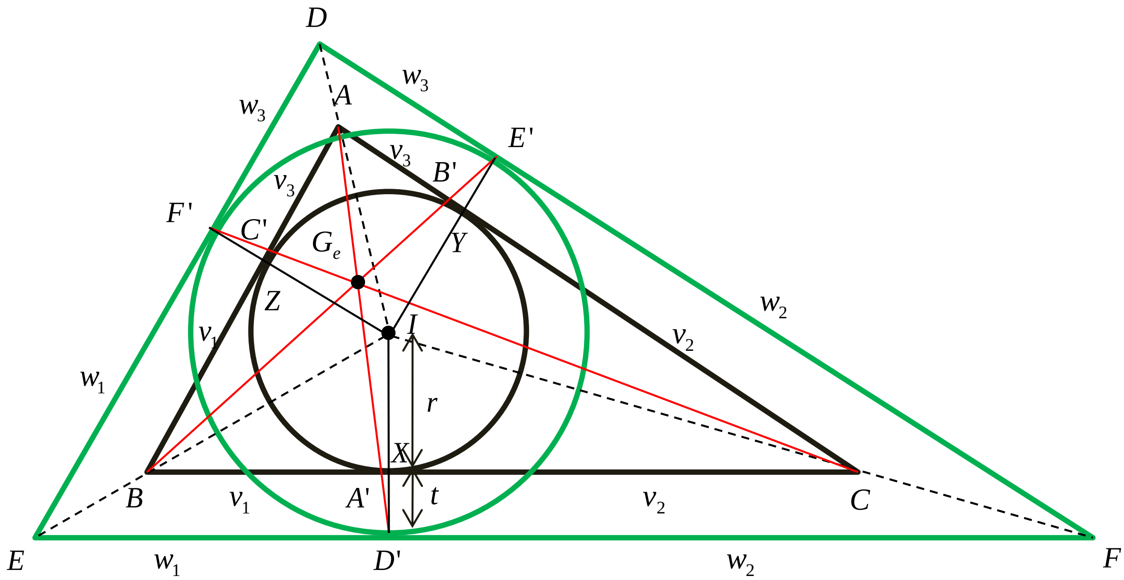
Perhatikan Gambar 11.1.5, dengan menggunakan lingkaran kosentrik akan ditunjukkan AA', BB', dan CC' konkuren di titik Gergonne. Langkah awal pembuktiannya adalah bentuk lingkaran $C(I)$ yang merupakan lingkaran dalam ΔABC yang berpusat di *I*. Selanjutnya perpanjang garis dari titik *incenter* memotong sisi segitiga di titik *X*, *Y*, dan *Z* dan titik Gergonne memotong sisi segitiga di titik *A', B'*, dan *C'*, sehingga kedua garis tersebut berpotongan di titik *D', E'*, dan *F*.

Selanjutnya, dengan menghubungkan ketiga titik potong tersebut terbentuklah sebuah lingkaran, sebut lingkaran $D(I)$. $D(I)$ merupakan lingkaran kosentrik dari lingkaran $C(I)$. Dari lingkaran $D(I)$ dapat dibentuk segitiga baru yaitu dengan membentuk garis dari ke tiga titik perpotongan D', E', dan F' sehingga membentuk ΔDEF . Seperti pada Gambar 11.1.6 berikut**.**



Gambar 11.1.6

Selanjutnya perhatikan Gambar 11.1.7 berikut.



Gambar 11.1.7

Perhatikan ΔABC dan ΔDEF , misalkan panjang $BX = v_1$, $XC = v_2$, $YA = v_3$ dan misalkan panjang $ED' = w_1$, $D'F = w_2$, $E'D = w_3$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, perhatikan $\Delta IEF'$ dan ΔIBZ diperoleh

$\angle IZB \cong \angle IF'E$ (sd) (siku-siku)

$\angle EIF' \cong \angle BIF'$ (sd) (siku-siku)

berdasarkan *corollary* kesebangunan sd-sd diperoleh,

$\Delta IEF' \sim \Delta IBZ'$

sehingga

$\angle IBA \cong \angle IED.$

Selanjutnya pada ΔABC dan ΔDEF , berdasarkan bisektor sudut garis EI dan BI maka $\angle ABI \cong \angle CBI \cong \angle DEI \cong \angle FEI$ sehingga,

$\angle ABC \cong \angle DEF$

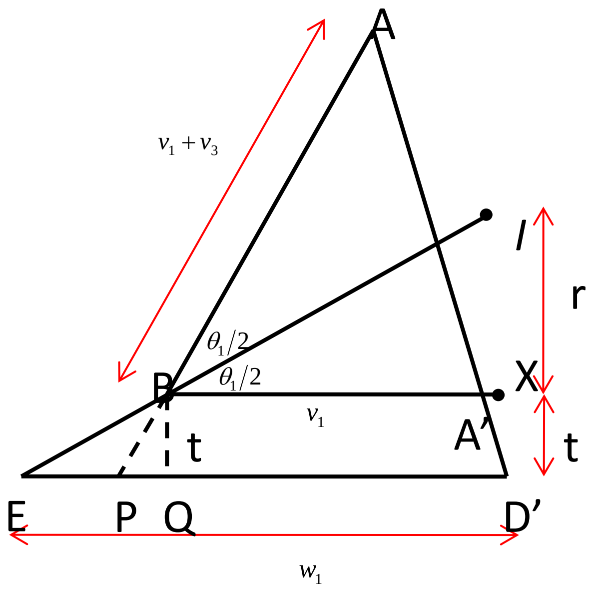
dengan cara yang sama pada ΔABC dan ΔDEF diperoleh

$\angle ACB \cong \angle DFE$ (sd)

$\angle BAC \cong \angle EDF$ (sd)

berdasarkan *corollary* kesebangunan sd.sd diperoleh $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Untuk mempermudah menghitung panjang BA', maka diberikan Gambar 11.1.8 sebagai berikut.



Gambar 11.1.8.

Perhatikan Gambar 11.1.8, untuk menentukan panjang BA' akan digunakan perbandingan panjang sisi $\Delta BAA'$ dan $\Delta PAD'$ yaitu panjang sisi BA' dan PD', maka dari itu terlebih dahulu akan ditunjukkan panjang PD' dan BP. Misalkan $D'X = t$ maka $D'I = r + t$ sehingga perbandingan panjang jari-jarinya adalah $(r+t):r$ dan diperoleh

$$\frac{r+t}{r} = \frac{w_1}{BX}$$

$$w_1 = \left(\frac{r+t}{r}\right)BX \qquad (11.1.17)$$

Subsitusikan $BX = v_1$ ke persamaan (11.1.17), sehingga

$$w_1 = \left(\frac{r+t}{r}\right)v_1. \qquad (11.1.18)$$

Akan ditunjukkan panjang EP melalui ΔBEQ, misalkan

$$\angle ABA' = \theta_1 \qquad (11.1.19)$$

karena $BX \,//\, PD'$, maka diperoleh

$$\angle ABA' \cong \angle BPQ = \theta_1 \qquad (11.1.20)$$

Perhatikan ΔBPQ pada Gambar 11.5.2, dengan menggunakan perbandingan trigonometri diperoleh

$$\frac{BP}{sin90^\circ} = \frac{t}{sin\theta_1}$$

$$BP = \frac{t}{sin\theta_1}$$

$$BP = t\ cosec\ \theta_1$$

karena $PD' = w_1 - BP$ maka diperoleh

$$PD' = w_1 - t(cosec\ \theta_1) \qquad (11.1.21)$$

kemudian, karena panjang $EP = BP$ maka

$$EP = t(cosec\ \theta_1)$$

untuk mempermudah proses penghitungan misalkan

$$m_1 = (cosec\ \theta_1)$$

maka persamaan (11.1.21) menjadi

$$PD' = w_1 - t\,m_1 \qquad (11.1.22)$$

dan

$$BP = t\,m_1$$

Selanjutnya dari persamaan (11.1.19) dan (11.1.20) diperoleh

$$\angle ABA' \cong \angle APD' \quad \text{(sd)}$$

Perhatikan $\Delta PAD'$ dan $\Delta BAA'$ diperoleh

$$\angle BAA' \cong \angle PAD' \quad \text{(sd) (sudut yang sama)}$$

Berdasarkan *corollary* kesebangunan sd.sd maka $\Delta PAD' \sim \Delta BAA'$, sehingga diperoleh

$$\frac{PD'}{BA'} = \frac{v_1 + v_3 + t\,m_1}{v_1 + v_3}$$

$$PD'(v_1 + v_3) = BA'(v_1 + v_2 + t\,m_1)$$

$$BA' = \frac{(v_1 + v_3)PD'}{v_1 + v_3 + t\,m_1} \qquad (11.1.23)$$

Subsitusikan persamaan (11.1.22) ke persamaan (11.1.23) sehingga

$$BA' = \frac{(v_1 + v_3)w_1 - t\,m_1}{v_1 + v_3 + t\,m_1} \tag{11.1.24}$$

Kemudian subsitusikan persamaan (11.1.18) ke persamaan (11.1.24) maka

$$BA' = \frac{(v_1 + v_3)\,[((r+t)/r)v_1 - t\,m_1]}{v_1 + v_3 + t\,m_1} \tag{11.1.25}$$

dengan cara yang sama memperoleh BA', maka diperoleh

$$CA' = \frac{(v_2 + v_3)\,[((r+t)/r)v_2 - t\,m_2]}{v_2 + v_3 + t\,m_2}$$

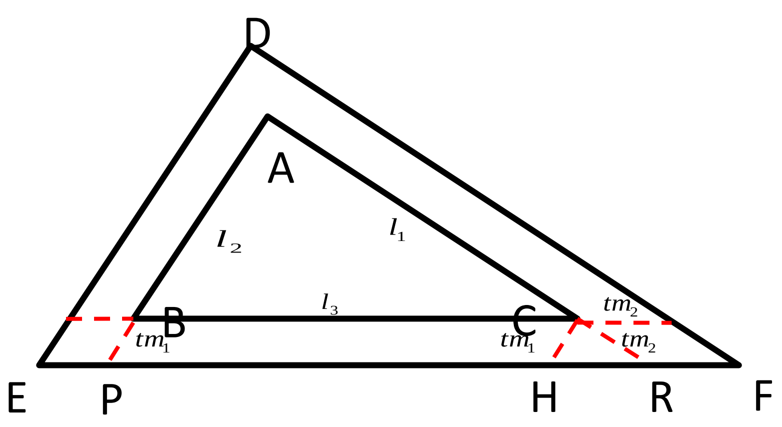
$$CB' = \frac{(v_1 + v_2)\,[((r+t)/r)v_2 - t\,m_2]}{v_1 + v_2 + t\,m_2}$$

$$AB' = \frac{(v_1 + v_3)\,[((r+t)/r)v_3 - t\,m_3]}{v_1 + v_3 + t\,m_3} \tag{11.1.26}$$

$$AC' = \frac{(v_2 + v_3)\,[((r+t)/r)v_3 - t\,m_3]}{v_2 + v_3 + t\,m_3}$$

$$BC' = \frac{(v_1 + v_2)\,[((r+t)/r)v_1 - t\,m_1]}{v_1 + v_2 + t\,m_1}$$

Perhatikan segitiga yang sebangun berikut



Gambar 11.1.9

Pada Gambar 11.1.9, ΔABC dan ΔDEF adalah segitiga yang sebangun. Kemudian untuk mempermudah proses perhitungan dibentuk segitiga lainnya yaitu dengan memperpanjang garis AC hingga memotong sisi EF di titik R dan bentuk pula garis dari titik C terhadap sisi EF memotong di titik H sehingga terbentuk ΔCHR. Akan ditunjukkan $\Delta ABC \sim \Delta CHR$. Perhatikan ΔABC dan ΔCHR, karena $AB // CH$ dan $BC // EF$ diperoleh

$$\angle BAC \cong \angle HCR \quad \text{(sd)}$$

$$\angle BCA \cong \angle HRC \quad \text{(sd)}$$

berdasarkan *corollary* kesebangunan sd.sd maka $\Delta ABC \sim \Delta CHR$.

Kemudian perhatikan ΔABC, karena $\Delta ABC \sim \Delta CHR$ apabila dimisalkan $AC = l_1$, $AB = l_2$, dan $BC = l_3$ maka diperoleh

$$\frac{l_2}{tm_1} = \frac{l_1}{tm_2} \qquad (11.1.27)$$

persamaan (11.1.27) dapat dinyatakan menjadi

$$tl_1m_1 = tl_2m_2 = k.$$

Pada Gambar 11.1.9 diketahui bahwa

$$l_1 = v_2 + v_3$$

$$l_2 = v_1 + v_3$$

$$l_3 = v_1 + v_2$$

subsitusikan l_1 ke persamaan (11.1.25), diperoleh

$$BA' = \frac{l_2\left[\left((r+t)/r\right)v_1 - tm_1\right]}{l_2 + tm_1} \cdot \frac{l_1}{l_1}$$

$$BA' = \frac{l_2 l_1\left[\left((r+t)/r\right)v_1 - l_1 tm_1\right]}{l_1 l_2 + l_1 tm_1}$$

$$BA' = \frac{l_2\left[l_1\left((r+t)/r\right)v_1 - l_1 tm_1\right]}{l_1 l_2 + l_1 tm_1}$$

$$BA' = \frac{l_2\left[l_1\left((r+t)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1 l_2 + k} \tag{11.1.28}$$

dengan cara yang sama memperoleh panjang sisi BA', maka diperoleh

$$A'C = \frac{l_1\left[l_2\left((r+t)/r\right)v_2 - k\right]}{l_1 l_2 + k} \tag{11.1.29}$$

$$CB' = \frac{l_3\left[l_2\left((r+t)/r\right)v_2 - k\right]}{l_2 l_3 + k} \tag{11.1.30}$$

$$B'A = \frac{l_2\left[l_3\left((r+t)/r\right)v_3 - k\right]}{l_2 l_3 + k} \tag{11.1.31}$$

$$AC' = \frac{l_1\left[l_3\left((r+t)/r\right)v_3 - k\right]}{l_1 l_3 + k} \tag{11.1.32}$$

$$C'B = \frac{l_3\left[l_1\left((r+t)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1 l_3 + k} \tag{11.1.33}$$

dengan menggunakan Ceva, maka persamaan (11.1.28), (11.1.29), (11.1.30), (11.1.31), (11.1.32) dan (11.1.33) menjadi

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{\dfrac{l_2\left[l_1\left((r+t)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1 l_2 + k}}{\dfrac{l_1\left[l_2\left((r+t)/r\right)v_2 - k\right]}{l_1 l_2 + k}} = \frac{l_2\left[l_1\left((r+t)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1\left[l_2\left((r+t)/r\right)v_2 - k\right]} \tag{11.1.34}$$

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{\dfrac{l_3\left[l_2\left((r+t)/r\right)v_2 - k\right]}{l_2 l_3 + k}}{\dfrac{l_2\left[l_3\left((r+t)/r\right)v_3 - k\right]}{l_2 l_3 + k}} = \frac{l_3\left[l_2\left((r+t)/r\right)v_2 - k\right]}{l_2\left[l_3\left((r+t)/r\right)v_3 - k\right]} \tag{11.1.35}$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{\dfrac{l_1\left[l_3\left((r+t)/r\right)v_3 - k\right]}{l_1 l_3 + k}}{\dfrac{l_3\left[l_1\left((r+t)/r\right)v_1 - k\right]}{l_1 l_3 + k}} = \frac{l_1\left[l_3\left((r+t)/r\right)v_3 - k\right]}{l_3\left[l_1\left((r+t)/r\right)v_1 - k\right]} \tag{11.1.36}$$

dengan menggunakan Ceva, maka persamaan (11.1.34), (11.1.35), dan (11.1.36) menjadi

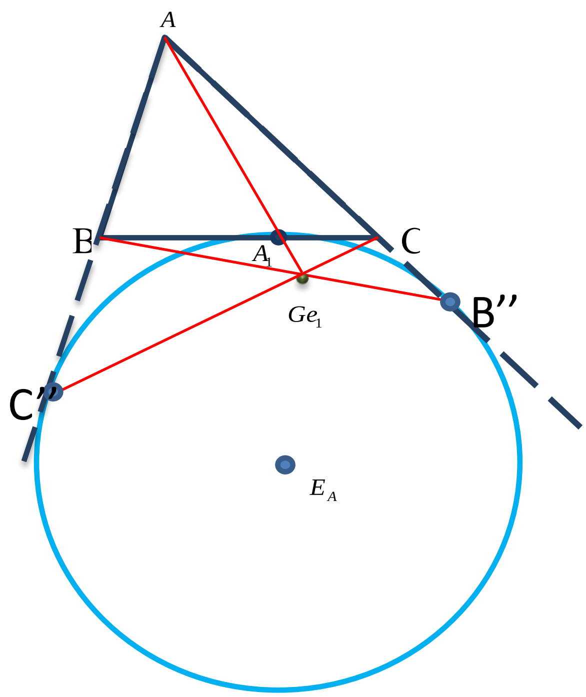
$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1. \tag{11.1.37}$$

Karena persamaan (11.1.37) memenuhi teorema Ceva, maka terbukti titik Gergonne dari ΔABC adalah konkuren. ■

Pada bagian ini dijelaskan tentang konkurensi titik Gergonne yang berada di luar segitiga. Pada sebarang segitiga yang memuat titik *excenter*, dapat dibentuk suatu lingkaran singgung luar segitiga, sehingga terdapat tiga titik singgung lingkaran terhadap segitiga, apabila dibentuk garis dari sudut segitiga terhadap titik singgung akan berpotongan di satu titik konkurensi yaitu titik Gergonne pada luar segitiga.

Berikut ini pada sebarang ΔABC, jika pada sisi BC dibentuk *excircle* dengan pusat E_A maka terdapat tiga titik singgung yaitu titik A_1 pada sisi BC, B'' pada perpanjangan sisi AC dan C'' pada perpanjangan sisi AB. Sehingga apabila dibentuk garis dari $\angle A$ terhadap titik A_1, $\angle B$ terhadap titik B'' dan $\angle C$ terhadap titik C'' maka ketiga garis tersebut berpotongan di satu titik Ge_1. Seperti Gambar berikut.

Perhatikan Gambar 11.1.10, ΔABC dengan E_A adalah titik pusat lingkaran singgung luar segitiga pada sisi BC, akan ditunjukkan CC'', BB'', dan AA_1 berpotongan pada satu titik (konkuren) di titik Ge_1, dengan menggunakan teorema Ceva pada kasus dua [1]. Misalkan $BC = a$, $AC = b$, dan $AB = c$, dengan menunjukkan bahwa $CB'' = CA_1$,



Gambar 11.1.10.

Misalkan

$$CB''=n \qquad (11.1.38)$$

Karena $BC=a$, maka diperoleh

$$BA_1=BC-CA_1$$

$$BA_1=a-n \qquad (11.1.39)$$

Kemudian dengan menggunakan teorema garis singgung lingkaran pada sisi BC diketahui bahwa

$$B''A=C''A$$

$$AC+CB''=AB+BC'' \qquad (11.1.40)$$

dengan menggunakan persamaan (11.1.38) dan (11.1.39), maka persamaan (11.1.40) menjadi

$$b+n=c+a-n$$

$$b+2n=c+a$$

$$2n=c+a-b$$

$$n = \frac{1}{2}(c + a - b)$$

karena

$$B''A = AC + AB''$$

maka

$$B''A = b + \frac{1}{2}(c + a - b)$$

$$B''A = b - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$$

$$B''A = \frac{1}{2}(a + b + c), \qquad (11.1.41)$$

Selanjutnya maka persamaan (11.1.41) menjadi

$$AB'' = s \qquad (11.1.42)$$

dengan menggunakan cara yang sama memperoleh persamaan (11.1.49), juga diperoleh

$$AC'' = BA' = BC' = CA'' = CB' = s$$

sehingga diperoleh

$$C''B = BA_1 = s - c \qquad (11.1.43)$$

$$CB'' = CA_1 = s - b \qquad (11.1.44)$$

dengan menggunakan teorema Ceva kasus dua, maka persamaan (11.1.42), (11.1.43), dan (11.1.44) menjadi

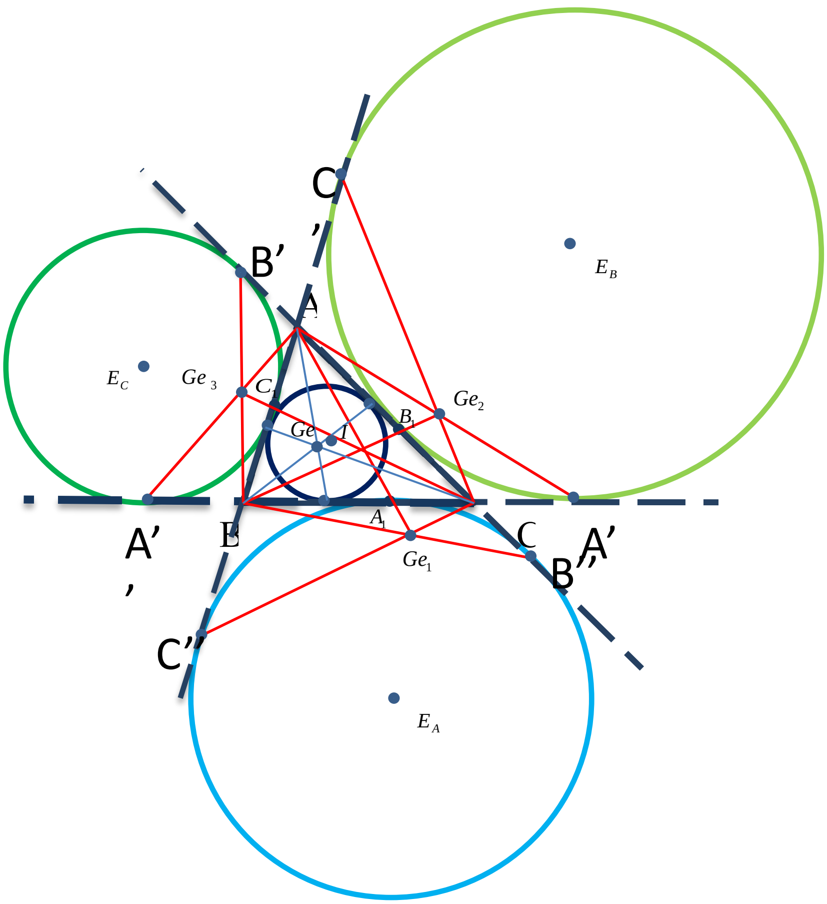
$$\frac{AC''}{C''B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = \frac{AC''}{B''A} \cdot \frac{BA_1}{C''B} \cdot \frac{CB''}{A_1C}$$

$$\frac{AC''}{C''B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = \frac{s}{s} \cdot \frac{s-c}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-b}$$

$$\frac{AC''}{C''B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = 1 \qquad (11.1.45)$$

Karena persamaan (11.1.45) memenuhi teorema Ceva kasus dua, yaitu persamaan (2.13), maka terbukti titik Ge_1 dari ΔABC adalah konkuren. ■

Dengan menggunakan cara yang sama, maka juga akan berlaku terhadap pembuktian konkurensi dari Ge_2 dan Ge_3 untuk sisi segitiga yang lainnya. Sehingga pada segitiga sebarang terdapat empat titik Gergonne. Satu titik Gergonne yang berada di dalam segitiga dan tiga titik Gergonne lainnya berada di luar segitiga. Perhatikan Gambar 11.1.11.



Gambar 11.1.11.

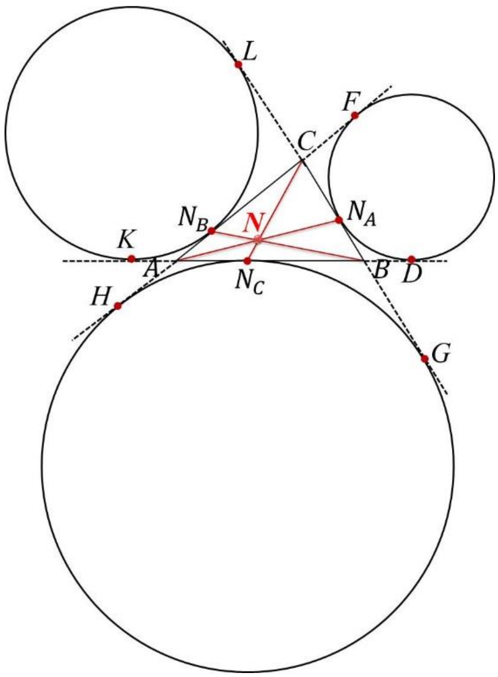
Pada Gambar 11.1.11, ΔABC memuat lingkaran dalam segitiga dengan titik pusatnya adalah I dan tiga lingkaran singgung luar segitiga dengan masing-masing titik pusatnya adalah E_A, E_B, dan E_C. Titik Ge merupakan titik Gergonne dalam ΔABC, titik Ge_1 merupakan titik Gergonne luar segitiga pada lingkaran yang menyinggung sisi

BC di titik A_1, titik Ge_2 merupakan titik Gergonne luar segitiga pada lingkaran yang menyinggung sisi AC di titik B_1 dan titik Ge_3 merupakan titik Gergonne luar segitiga pada lingkaran yang sisi AC di titik C_1.

11.2. Titik Nagel dan Segitiga Nagel

Titik Nagel adalah titik konkurensi yang dihasilkan dari menghubungkan ketiga sudut segitiga terhadap masing-masing sisi di hadapannya yang menyinggung lingkaran singgung luar segitiga.

Pada sebarang ΔABC memuat tiga lingkaran singgung luar masing-masing menyinggung sisi BC di titik N_A, sisi AC di titik N_B dan sisi AB di titik N_C. Jika dihubungkan ketiga titik sudut segitiga terhadap titik singgung N_A, N_B dan N_C, maka ketiga garis AN_A, BN_B dan CN_C akan berpotongan di satu titik yaitu titik Nagel *(Nagel point)*. Perhatikan Gambar 11.2.1.



Gambar 11.2.1.

Teorema 11.2.1 (Teorema Nagel) Jika ketiga titik sudut segitiga dihubungkan dengan titik singgung lingkaran singgung luar di hadapannya, maka ketiga garis tersebut konkuren di titik Nagel.

Bukti : Pada gambar 11.2.1, misalkan titik $N_A, N_B,$ dan N_C merupakan titik-titik singgung lingkaran singgung luar yang menyinggung BC, CA dan AB pada ΔABC. dari hubungan

$$AD = DB + BA$$

$$s = DB + c \text{ atau } DB = s - c$$

dan

$$AF = FC + CA$$

$$s = FC + b$$

$$FC = s - b.$$

Sehingga diperoleh

$$DB = BN_A = s - c, \qquad (11.2.1)$$

$$FC = N_AC = s - b. \qquad (11.2.2)$$

Dengan cara yang sama untuk garis singgung CL dan AK, diperoleh

$$CL = CN_B = s - a, \qquad (11.2.3)$$

$$AK = N_BA = s - c, \qquad (11.2.4)$$

dan untuk garis singgung AH dan BG, juga diperoleh

$$AH = AN_C = s - b, \qquad (11.2.5)$$

$$BG = N_CB = s - a, \qquad (11.2.6)$$

Dari persamaan (11.2.1), (11.2.2), (11.2.3), (11.2.4), (11.2.5), dan (11.2.6), maka diperoleh perbandingan sisinya

$$\frac{AN_C}{N_CB} = \frac{(s-b)}{(s-a)} \qquad (11.2.7)$$

$$\frac{BN_A}{N_AC} = \frac{(s-c)}{(s-b)} \qquad (11.2.8)$$

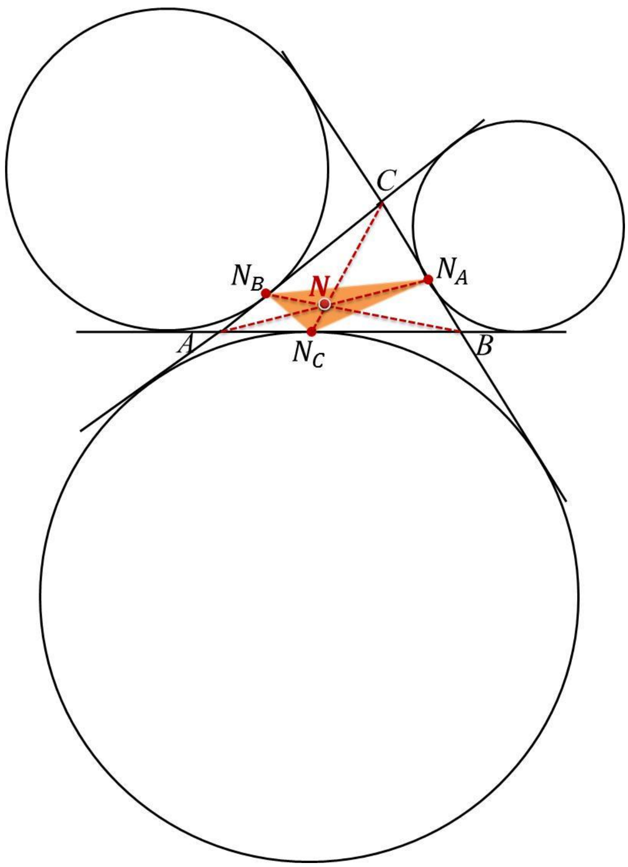
$$\frac{CN_B}{N_BA} = \frac{(s-a)}{(s-c)} \qquad (11.2.9)$$

Dengan mengalikan persamaan (11.2.7), (11.2.8), dan (11.2.9), maka diperoleh

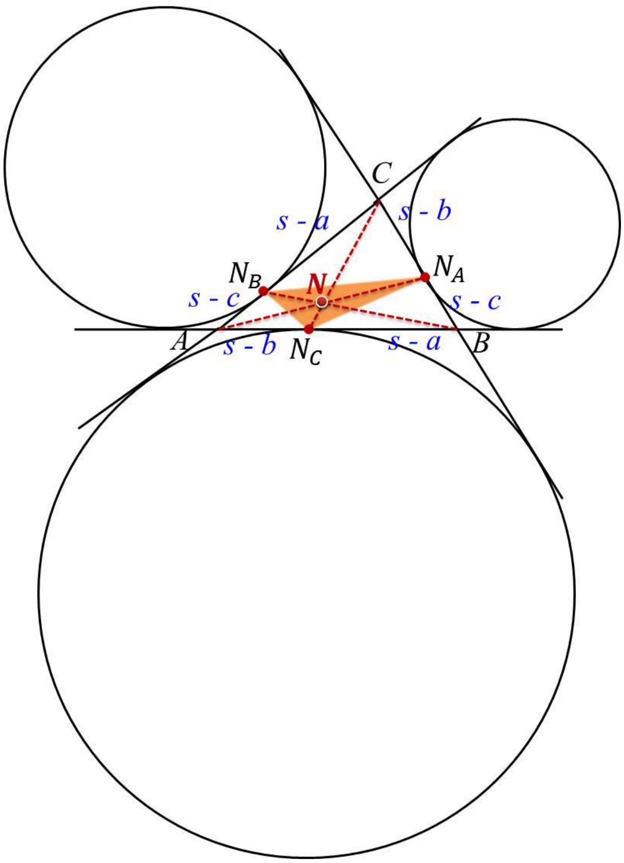
$$\frac{AN_C}{N_CB} \cdot \frac{BN_A}{N_AC} \cdot \frac{CN_B}{N_BA} = \frac{(s-b)}{(s-a)} \cdot \frac{(s-c)}{(s-b)} \cdot \frac{(s-a)}{(s-c)} = 1.$$

Maka ketiga garis AN_A, BN_B, dan CN_C konkuren di titik Nagel *(N).* ♥

Jika dibentuk sebuah segitiga dalam dengan menghubungkan titik N_A, N_B, dan N_C yang menyinggung lingkaran singgung luar pada sisi-sisi ΔABC yaitu $\Delta N_AN_BN_C$ atau disebut dengan segitiga Nagel. Persoalan berikutnya adalah menentukan luas segitiga Nagel. Untuk lebih jelasnya Perhatikan Gambar 11.2.2 dan gambar 11.2.3



Gambar 11.2.2



Gambar 11.2.3.

Luas segitiga Nagel kebanyanyak dihitung menggunakan koordinat barisentrik. Dalam tulisan ini, penulis menentukan luas segitiga Nagel berdasarkan hubungan segitiga asal ΔABC yang memuat segitiga Nagel dengan mengurangi $L\Delta ABC$ dengan $L\Delta AN_CN_B$,$L\Delta N_CBN_A$, dan $L\Delta N_ACN_B$. Dari persamaan (11.2.1), (11.2.2), (11.2.3), (11.2.4), (11.2.5), dan (11.2.6) masing-masing diperoleh perbandingan sisinya

$$\frac{BN_A}{BC}, \frac{N_AC}{BC}, \frac{CN_B}{AC}, \frac{N_BA}{AC}, \frac{AN_C}{AB}, \text{ dan } \frac{N_CB}{AB}.$$

misalkan

$$x = \frac{BN_A}{BC}, \tag{11.2.10}$$

$$x' = \frac{N_AC}{BC}, \tag{11.2.11}$$

$$y = \frac{CN_B}{AC}, \tag{11.2.12}$$

$$y' = \frac{N_BA}{AC}, \tag{11.2.13}$$

$$z = \frac{AN_C}{AB}, \tag{11.2.14}$$

$$z' = \frac{N_CB}{AB}, \tag{11.2.15}$$

dengan menjumlahkan persamaan (11.2.10) dan (11.2.11), diperoleh

$$x + x' = \frac{BN_A}{BC} + \frac{N_AC}{BC} \tag{11.2.16}$$

kemudian substitusi persamaan (11.2.1) dan (11.2.2) ke persamaan (11.2.16), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x + x' &= \frac{s-c}{a} + \frac{s-b}{a} = \frac{2s-c-b}{a} \\ &= \frac{(a+b+c)-c-b}{a} \\ x + x' &= 1. \end{aligned} \tag{11.2.17}$$

Dengan cara yang sama untuk persamaan (11.2.12) dan (11.2.13), kemudian (11.2.14) dan (11.2.15) juga diperoleh

$$y + y' = 1, \tag{11.2.18}$$

dan

$$z + z' = 1. \tag{11.2.19}$$

Dari ΔABC berlaku luasnya

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \sin \angle A$$

$$\sin \angle A = \frac{2\, L\Delta ABC}{AB \cdot AC}. \tag{11.2.20}$$

Pada ΔAN_CN_B juga berlaku

$$L\Delta AN_CN_B = \frac{1}{2} \cdot N_AC \cdot N_BA \ \sin \angle A. \tag{11.2.21}$$

Substitusi persamaan (11.2.20) ke persamaan (11.2.21), menjadi

$$L\Delta AN_CN_B = \frac{N_AC}{AB} \cdot \frac{N_BA}{AC} \cdot L\Delta ABC, \tag{11.2.22}$$

berdasarkan persamaan (11.2.13) dan (11.2.14), persamaan (11.2.22) menjadi

$$L\Delta AN_CN_B = z \cdot y' \,(L\Delta ABC). \qquad (11.2.23)$$

Dengan cara yang sama terhadap sin $\angle B$ dan sin $\angle C$, diperoleh

$$L\Delta N_CBN_A = \frac{N_CB}{AB} \cdot \frac{BN_A}{BC} \cdot L\Delta ABC$$

$$L\Delta N_CBN_A = z' \cdot x \;\; (L\Delta ABC) \qquad (11.2.24)$$

dan

$$L\Delta N_BN_AC = \frac{CN_B}{AC} \cdot \frac{N_AC}{BC} \cdot L\Delta ABC$$

$$L\Delta N_BN_AC = y \cdot x' \;\; (L\Delta ABC). \qquad (11.2.25)$$

Dari Gambar 11.5.3, $L\Delta N_AN_BN_C$ dapat dinyatakan

$$L\Delta N_AN_BN_C = L\Delta ABC - (L\Delta AN_CN_B + L\Delta N_CBN_A + L\Delta N_BN_AC). \qquad (11.2.26)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (11.2.23), (11.2.24), (11.2.25) ke persamaan (11.2.26) sehingga diperoleh

$$L\Delta N_AN_BN_C = L\Delta ABC - (z \cdot y' \,(L\Delta ABC) \; + z' \cdot x \,(L\Delta ABC) + y \cdot x' \,(L\Delta ABC)$$

$$L\Delta N_AN_BN_C = L\Delta ABC \,[1 - (z \cdot y') - (z' \cdot x) - (y \cdot x')]$$

$$\frac{L\Delta N_AN_BN_C}{L\Delta ABC} = 1 - (z \cdot y') - (z' \cdot x) - (y \cdot x')$$

$$= 1 - \left(\frac{z}{z+z'} \cdot \frac{y'}{y+y'} + \frac{z'}{z+z'} \cdot \frac{x}{x+x'} + \frac{y}{y+y'} \cdot \frac{x'}{x+x'} \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{z\,y'}{(z+z')(y+y')} + \frac{z'x}{(z+z')(x+x')} + \frac{y\,x'}{(y+y')(x+x')} \right)$$

$$\frac{L\Delta N_AN_BN_C}{L\Delta ABC} = \frac{(x+x')(y+y')(z+z')}{(x+x')(y+y')(z+z')}$$

$$- \frac{z\,y'\,x + z\,y'\,x' + z'\,x\,y + z'\,x\,y' + y\,x'\,z + y\,x'\,z'}{(x+x')(y+y')(z+z')}$$

$$\frac{L\Delta N_AN_BN_C}{L\Delta ABC} = \frac{x\,y\,z + x\,y\,z' + x\,y'\,z + xy'\,z' + x'\,y\,z + x'\,y\,z' + x'\,y'\,z + x'\,y'\,z'}{(x+x')(y+y')(z+z')}$$

$$- \frac{z\,y'\,x + z\,y'\,x' + z'\,x\,y + z'\,x\,y' + y\,x'\,z + y\,x'\,z'}{(x+x')(y+y')(z+z')}$$

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = \frac{x\,y\,z + x'\,y'\,z'}{(x+x')(y+y')(z+z')} \tag{11.2.27}$$

Substitusi persamaan (11.2.17), (11.2.18), dan (11.2.19) kepersamaan (11.2.27), diperoleh

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = \frac{x\,y\,z + x'\,y'\,z'}{1 \cdot 1 \cdot 1}$$

atau

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = x\,y\,z + x'\,y'\,z', \tag{11.2.28}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (11.2.10), (11.2.11), (11.2.12), (11.2.13),(11.2.14), dan (11.2.15), ke persamaan (11.2.28) sehingga diperoleh

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = \left(\frac{BN_A}{BC} \cdot \frac{CN_B}{AC} \cdot \frac{AN_C}{AB}\right) + \left(\frac{N_A C}{BC} \cdot \frac{N_B A}{AC} \cdot \frac{N_C B}{AB}\right). \tag{11.2.29}$$

Kemudian, substitusi persamaan (11.2.1), (11.2.2), (11.2.3), (11.2.4), (11.2.5), dan (11.2.6), diperoleh

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = \left(\frac{s-c}{a} \cdot \frac{s-a}{b} \cdot \frac{s-b}{c}\right) + \left(\frac{s-b}{a} \cdot \frac{s-c}{b} \cdot \frac{s-a}{c}\right)$$

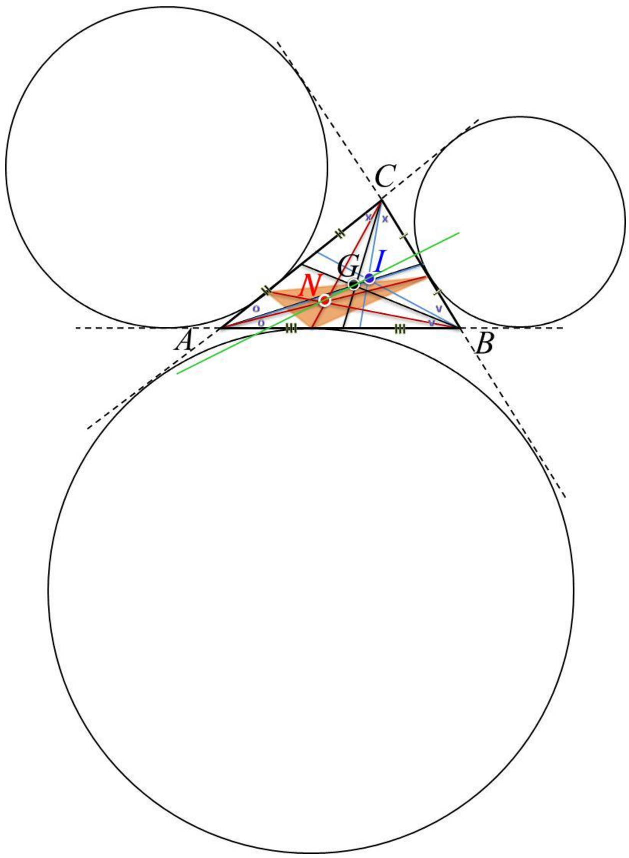
$$= \left(\frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\right)$$

$$\frac{L\Delta N_A N_B N_C}{L\Delta ABC} = \frac{1}{abc}\,[2\,(s-a)(s-b)(s-c)]$$

$$L\Delta N_A N_B N_C = \frac{2\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{abc}\; L\Delta ABC \tag{11.2.30}$$

Dari persamaan (11.2.30) dapat dilihat luas segitiga Nagel dengan segitiga asal ΔABC berbanding lurus, artinya semakin besar luas segitiga asal maka semakin besar luas segitiga Nagel. Dan luas segitiga Nagel dapat ditentukan berdasarkan luas segitiga asal yang memuat segitiga Nagel.

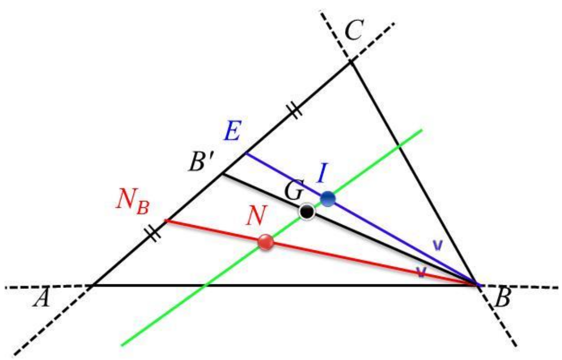
Selanjutnya, akan dibuktikan titik *centroid*, *incenter* dan Nagel segaris menggunakan teorema Menelaus. Perhatikan Gambar 11.2.4.



Gambar 11.2.4

Pada ΔABC, jika BB' merupakan cevian dari titik *centroid (G), BE* merupakan cevian dari titik *incenter (I)*, dan BN_B merupakan cevian dari titik Nagel *(N).*

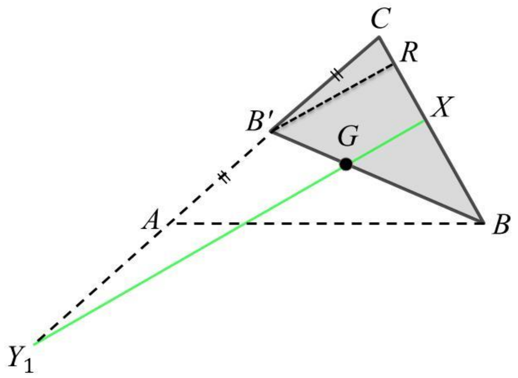
Perhatikan Gambar 11.2.5



Gambar 11.2.5.

Dari gambar 11.2.5, ΔABC memuat titik *centroid, incenter,* dan Nagel. Untuk membuktikan ketiga titik tersebut segaris, maka

1. Perhatikan $\Delta BB'C$ pada ΔABC.



Gambar 11.2.6.

Tarik garis dari sisi BC di titik X, sehingga berpotongan dengan perpanjangan sisi CA dititik Y_1, maka X terletak pada sisi BC, G pada sisi BB', dan Y_1 pada sisi CA. Akan ditunjukkan titik X, G, dan Y_1 adalah segaris.

Misalkan titik R pada BC dan $RB' \parallel XY_1$, maka pada ΔBXG dan $\Delta BRB'$, diperoleh

$$\angle XBG = \angle CBB' \qquad \text{(sudut yang sama)}$$

$$\angle BXG = \angle BRB' \qquad (RB' \parallel XY_1),$$

sehingga $\Delta BXG \sim \Delta BRB'$, mengakibatkan

$$\frac{BG}{BB'} = \frac{BX}{BR}. \tag{11.2.31}$$

Karena

$$BB' = BG + GB' \tag{11.2.32}$$

$$GB' = BB' - BG \tag{11.2.33}$$

dan

$$BR = BX + XR \tag{11.2.34}$$

$$XR = BR - BX, \tag{11.2.35}$$

maka berdasarkan persamaan (11.2.32), (11.2.33), (11.2.34), dan (11.2.35), persamaan (11.2.31) menjadi,

$$\frac{BG}{BB' - BG} = \frac{BX}{BR - BX}$$

atau

$$\frac{BG}{GB'} = \frac{BX}{XR} \tag{11.2.36}$$

Dengan cara yang sama $\Delta B'CR \sim \Delta Y_1CX$, juga diperoleh

$$\frac{B'Y_1}{Y_1C} = \frac{XR}{XC}. \tag{11.2.37}$$

Dengan mengalikan persamaan (11.2.36) dan (11.2.37), diperoleh

$$\frac{BG}{GB'} \cdot \frac{B'Y_1}{Y_1C} = \frac{BX}{XR} \cdot \frac{XR}{XC}. \tag{11.2.38}$$

Pada persamaan (11.2.38) dengan mengalikan $\frac{XC}{BX}$ diruas kiri dan kanan, sehingga diperoleh

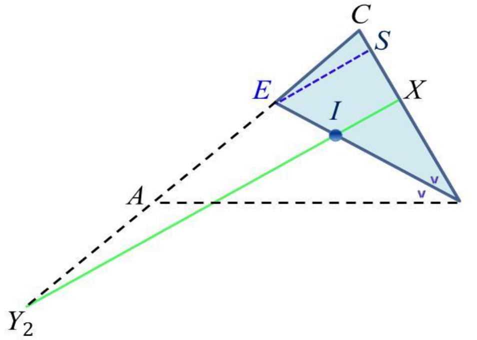
$$\frac{BG}{GB'} \cdot \frac{B'Y_1}{Y_1C} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BX}{XR} \cdot \frac{XR}{XC} \cdot \frac{XC}{BX}$$

$$\frac{BG}{GB'} \cdot \frac{B'Y_1}{Y_1C} \cdot \frac{XC}{BX} = \text{-}1. \tag{11.2.39}$$

Berdasarkan teorema 3.2.1, maka ketiga titik *X, G,* dan Y_1 segaris.

2. Perhatikan ΔBEC pada ΔABC.

Tarik garis dari sisi BC di titik X, sehingga berpotongan dengan perpanjangan sisi CA di titik Y_2, maka X terletak pada sisi BC, I pada sisi BE, dan Y_2 pada sisi CA. Akan ditunjukkan titik X, I, dan Y_2 adalah segaris. Misalkan titik S pada BC dan $SE \,//\, XY_2$, maka pada ΔBXI dan ΔBSE, diperoleh



Gambar 11.2.7

$$\angle XBI = \angle SBE \quad \text{dan} \quad \angle BXI = \angle BSE$$

sehingga $\Delta BXI \sim \Delta BSE$, mengakibatkan

$$\frac{BI}{BE} = \frac{BX}{BS}. \tag{11.2.40}$$

Karena

$$BE = BI + IE \tag{11.2.41}$$

$$IE = BE - BI \tag{11.2.42}$$

dan

$$BS = BX + XS \tag{11.2.43}$$

$$XS = BS - BX, \tag{11.2.44}$$

maka, berdasarkan persamaan (11.2.41), (11.2.42), (11.2.43), dan (11.2.44), persamaan (11.2.40) menjadi

$$\frac{BI}{BE - BI} = \frac{BX}{BS - BX}$$

atau

$$\frac{BI}{IE} = \frac{BX}{XS}. \tag{11.2.45}$$

Dengan cara yang sama $\Delta ECS \sim \Delta Y_2CX$, juga diperoleh

$$\frac{EY_2}{Y_2C} = \frac{XS}{XC}. \tag{11.2.46}$$

Dengan mengalikan persamaan (11.2.45) dan (11.2.46) diperoleh

$$\frac{BI}{IE} \cdot \frac{EY_2}{Y_2C} = \frac{BX}{XS} \cdot \frac{XS}{XC}. \tag{11.2.47}$$

Pada persamaan (11.2.47) dengan mengalikan $\frac{XC}{BX}$ diruas kiri dan kanan, sehingga diperoleh

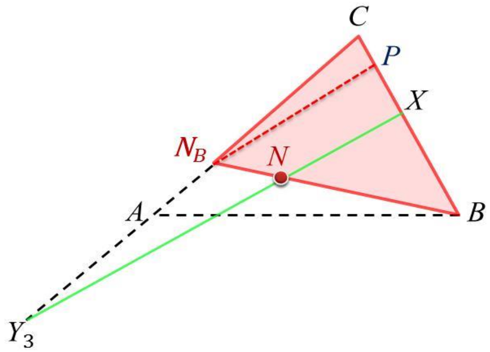
$$\frac{BI}{IE} \cdot \frac{EY_2}{Y_2C} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BX}{XS} \cdot \frac{XS}{XC} \cdot \frac{XC}{BX}$$

$$\frac{BI}{IE} \cdot \frac{EY_2}{Y_2C} \cdot \frac{CX}{XB} = \text{-}1. \tag{11.2.48}$$

Berdasarkan teorema 3.2.1, maka ketiga titik X, I, dan Y_2 segaris.

3. Perhatikan ΔBN_BC pada ΔABC.

Tarik garis dari sisi BC di titik X, sehingga berpotongan dengan perpanjangan sisi CA di titik Y_3, maka X terletak pada sisi BC, N pada sisi BN_B, dan Y_3 pada sisi CA. Akan ditunjukkan titik X, I, dan Y_3 adalah segaris.



Gambar 11.2.8.

Misalkan titik P pada BC dan $PN_B \,//\, XY_3$, maka pada ΔBXN dan ΔBPN_B, diperoleh

$$\angle XBN = \angle PBN_B \qquad \text{(sudut yang sama)}$$

$$\angle BXN = \angle BPN_B \qquad (PN_B \,//\, XY_3),$$

sehingga $\Delta BXN \sim \Delta BPN_B$, mengakibatkan

$$\frac{BN}{BN_B} = \frac{BX}{BP}. \tag{11.2.49}$$

Karena

$$BN_B = BN + NN_B \tag{11.2.50}$$

$$NN_B = BN_B - BN \tag{11.2.51}$$

dan

$$BP = BX + XP \tag{11.2.52}$$

$$XP = BP - BX. \tag{11.2.53}$$

maka berdasarkan persamaan (11.2.50), (11.2.51), (11.2.52), dan (11.2.53), persamaan (11.2.49) menjadi

$$\frac{BN}{BN_B - BN} = \frac{BX}{BP - BX}$$

atau

$$\frac{BN}{NN_B} = \frac{BX}{XP}. \tag{11.2.54}$$

Dengan cara yang sama $\Delta N_BCP \sim \Delta YCX$, juga diperoleh

$$\frac{N_B Y_3}{Y_3 C} = \frac{XP}{XC}. \quad (11.2.55)$$

Dengan mengalikan persamaan (11.2.54) dan (11.2.55) diperoleh

$$\frac{BN}{NN_B} \cdot \frac{N_B Y_3}{Y_3 C} = \frac{BX}{XP} \cdot \frac{XP}{XC}. \quad (11.2.56)$$

Pada persamaan (11.2.56) dengan mengalikan $\frac{XC}{BX}$ diruas kiri dan kanan, sehingga diperoleh

$$\frac{BN}{NN_B} \cdot \frac{N_B Y_3}{Y_3 C} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BX}{XP} \cdot \frac{XP}{XC} \cdot \frac{XC}{BX}$$

$$\frac{BN}{NN_B} \cdot \frac{N_B Y_3}{Y_3 C} \cdot \frac{XC}{BX} = -1. \quad (11.2.57)$$

Maka ketiga titik X, N, dan Y_3 segaris.

Dari persamaan (11.2.39), (11.2.48), dan (11.2.57), diperoleh titik X, G, Y_1 segaris, X, I, Y_2 segaris, dan X, N, Y_3 segaris. Untuk membuktikan titik $G, I,$ dan N juga segaris, maka akan ditunjukkan $XY_1 = XY_2 = XY_3$.

Dari persamaan (11.2.39) dan (11.2.48), diperoleh perbandingan sisinya

$$\frac{BG}{GB'} \cdot \frac{B'Y_1}{Y_1 C} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BI}{IE} \cdot \frac{EY_2}{Y_2 C} \cdot \frac{XC}{BX}. \quad (11.2.58)$$

Karena

$$B'Y_1 = Y_1 C - CB'$$

$$B'Y_1 = (CA + AY_1) \quad (11.2.59)$$

$$CA = (B'Y_1 - AY_1) + CB' \quad (11.2.60)$$

dan

$$Y_1 C = CA + AY_1 \quad (11.2.61)$$

$$CA = Y_1 C - AY_1. \quad (11.2.62)$$

Kemudian,

$$EY_2 = Y_2 C - CE$$

$$EY_2 = (CA + AY_2) - CE \quad (11.2.63)$$

$$CA = (EY_2 - AY_2) + CE \tag{11.2.64}$$

dan

$$Y_2C = CA + AY_2 \tag{11.2.65}$$

$$CA = Y_2C - AY_2, \tag{11.2.66}$$

maka berdasarkan persamaan (11.2.59), (11.2.60), (11.2.61), (11.2.62), (11.2.63), (11.2.64), (11.2.65), dan (11.2.66), persamaan (11.2.57) menjadi

$$\frac{BG}{GB'} \cdot \frac{(B'Y_1 - AY_1) + CB'}{Y_1C - AY_1} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BI}{IE} \cdot \frac{(EY_2 - AY_2) + CE}{Y_2C - AY_2} \cdot \frac{XC}{BX}$$

atau

$$\frac{BG}{GB'} \cdot \frac{CA}{CA} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BI}{IE} \cdot \frac{CA}{CA} \cdot \frac{XC}{BX}. \tag{11.2.67}$$

Dari persamaan (11.2.67), karena B' dan E berada pada garis yang sama, maka haruslah G dan I juga berada pada garis yang sama, artinya $XY_1 = XY_2$.

Dengan cara yang sama untuk persamaan (11.2.48) dan (11.2.57), perbandingan sisi dari kedua persamaan tersebut menjadi

$$\frac{BI}{IE} \cdot \frac{(EY_2 - AY_2) + CE}{Y_2C - AY_2} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BN}{NN_B} \cdot \frac{(N_BY_3 - AY_3) + CN_B}{Y_3C - AY_3} \cdot \frac{XC}{BX}$$

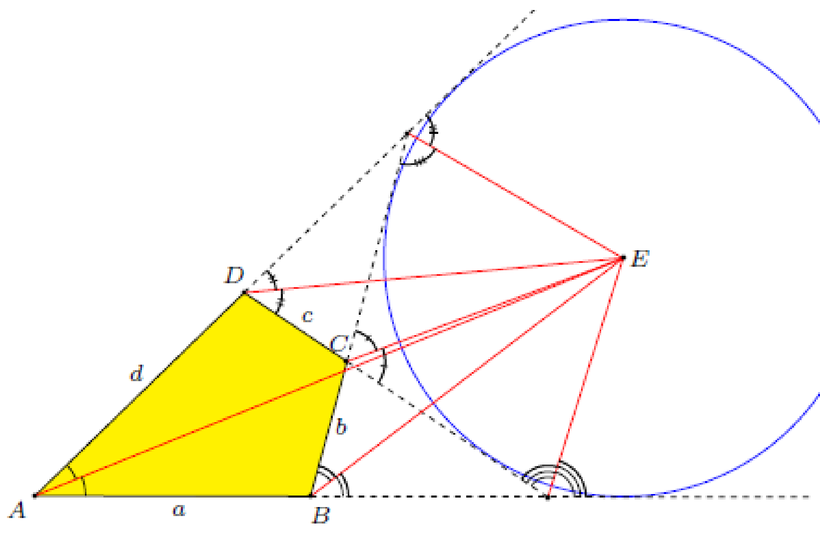
atau

$$\frac{BI}{IE} \cdot \frac{CA}{CA} \cdot \frac{XC}{BX} = \frac{BN}{NN_B} \cdot \frac{CA}{CA} \cdot \frac{XC}{BX}. \tag{11.2.68}$$

Dari persamaan (11.2.68), karena E dan N_B berada pada garis yang sama, maka haruslah I dan N juga berada pada garis yang sama, artinya $XY_2 = XY_3$. Berdasarkan persamaan (11.2.67) dan (11.2.68), karena G dan I berada pada garis $XY_1 = XY_2$, I dan N berada pada garis $XY_2 = XY_3$, dengan kata lain G, I, dan N adalah segaris. Hubungan yang diperoleh dari pembuktian ini adalah titik-titik konkurensi pada segitiga asal seperti titik *centroid* dan *incenter* segaris dengan titik konkuren sipada segitiga Nagel yaitu titik Nagel atau ketiga titik tersebut merupakan segmen Nagel.

Latihan 20.

1. Buatlah semua titik Gergonne luar dari suatu segitiga ABC, kemudian buktikan konkurensinya
2. Perhatikan gambar 11.1.6 dan gambar 11.1.7, tentukanlah perbandingan luas lingkaran kecil dan lingkaran besarnya.
3. Perhatikan gambar 11.1.11 tunjukkan bahwa titik-titik berikut adalah segaris
   a. E_B, A dan E_C
   b. E_C, B dan E_A
   c. E_A, C dan E_C.
4. Juga pada gambar 11.1.11 hitunglah luas segitiga $E_AE_BE_C$.
5. Juga pada gambar 11.1.11 hitunglah luas segitiga AA'A", BB'B" dan CC'C"
6. Berikan bukti alternatif lain dari teorema 3.1.1
7. Berikan bukti alternatif lain untuk luas segitiga Nagel.
8. Perhatikan gambar berikut :



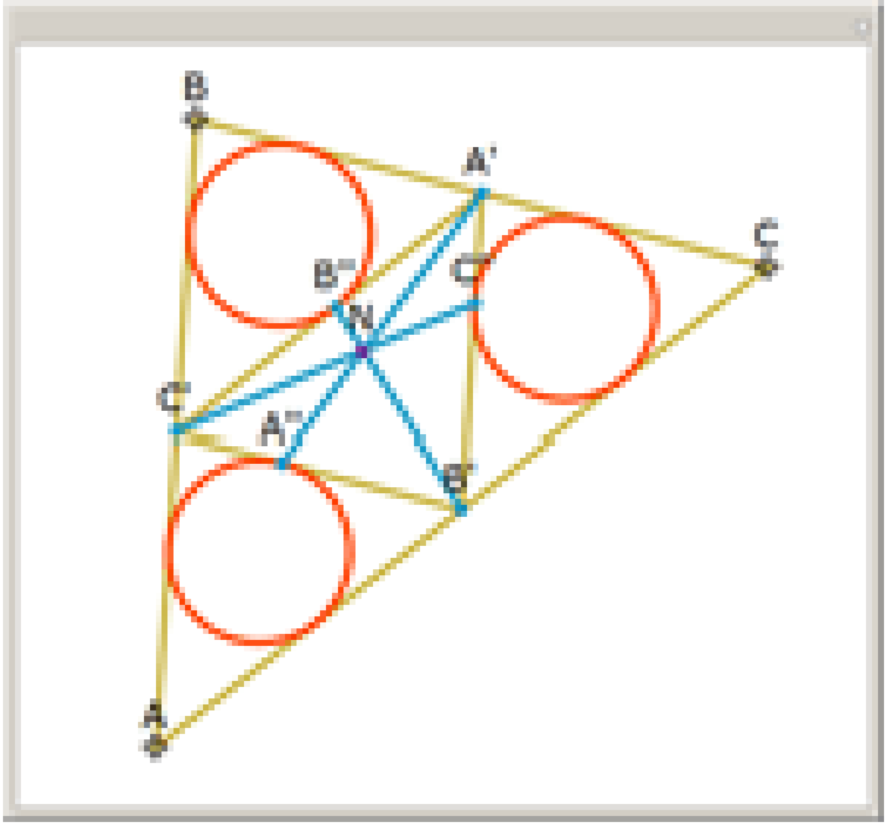
Gambar di atas merupakan salah satu cara membentuk lingkaran singgung luar untuk segi empat

a. Bisakah anda jelaskan cara mengkontruksi lingkarang singgung luarnya
b. Berapakah panjang Jari-jarinya

c. Tunjukkan garis bagi luar dari ∠B, garis bagi luar ∠C dan garis bari ∠A, berpotongan di satu titik.

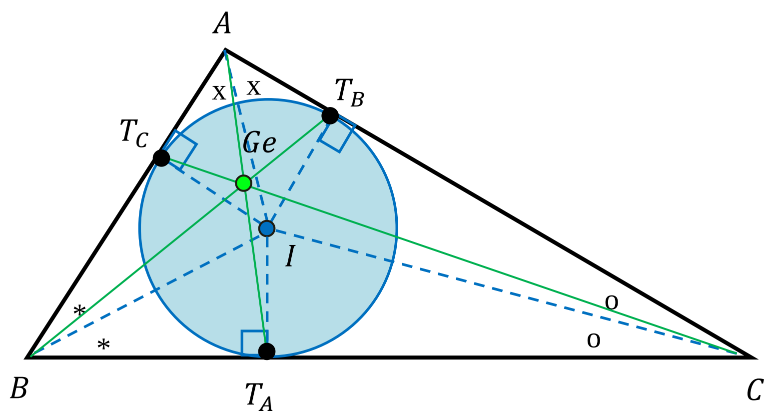
9. *) Buktikan teorema semiGergonne dengan cara yang sesederhana mungkin.

10. Perhatikan gambar disebelah. Bagaimanakah cara mengkontruksi $\Delta A'B'C'$ dan $\Delta A"B"C"$



11.3. Luas Segitiga Gergonne

Beberapa penulis telah membahas luas dari segitiga singgung dalam dengan menggunakan koordinat barisentrik. Dalam subbab ini, luas segitiga Gergonne ditentukan berdasarkan panjang sisi-sisinya dengan menggunakan aturan kosinus.



Gambar 11.3.1.

Misalkan panjang sisi-sisi ΔABC adalah $BC = a$, $AC = b$, dan $AB = c$, serta semi-perimeter segitiga, yaitu $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Perhatikan ΔAT_BT_C, ΔBT_AT_C, dan ΔCT_AT_B pada Gambar 11.3.1, jelas berlaku bahwa $AT_C = AT_B$, $BT_A = BT_C$, dan $CT_B = CT_A$, sehingga ketiga segitiga tersebut adalah segitiga sama kaki. Sebelum menentukan panjang sisi segitiga Gergonne, terlebih dahulu ditunjukkan bahwa

$$AT_C = AT_B = s - a$$

ditunjukkan juga bahwa

$$BT_A = BT_C = s - b$$

$$CT_B = CT_A = s - c.$$

Misalkan $AT_C = k$, maka

$$BT_C = c - k = BT_A \tag{11.3.1}$$

$$CT_B = b - k = CT_A, \tag{11.3.2}$$

sehingga penjumlahan sisi-sisi ΔABC dapat dinyatakan dengan menjumlahkan persamaan $AT_C = AT_B = k$, (11.3.1), dan (11.3.2), yaitu

$$AB + BC + CA = AT_C + BT_C + BT_A + CT_B + CT_A + AT_B$$
$$c + a + b = k + (c - k) + (c - k) + (b - k) + (b - k) + k$$
$$a + b + c = 2c + 2b - 2k$$
$$2k = 2b + 2c - a - b - c$$
$$2k = b + c - a$$
$$k = \frac{1}{2}(b + c - a)$$
$$k = \frac{1}{2}(a + b + c) - a. \quad (11.3.3)$$

Dengan mensubstitusikan nilai $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ke persamaan (11.3.3) diperoleh $k = s - a$, sehingga terpenuhi bahwa $AT_C = AT_B = s - a$.

Dengan cara yang sama seperti menunjukkan $AT_C = AT_B = s - a$, maka diperoleh
$$BT_A = BT_C = s - b$$
$$CT_B = CT_A = s - c.$$

Selanjutnya, panjang sisi-sisi dari segitiga Gergonne ditentukan berdasarkan aturan kosinus. Perhatikan ΔAT_BT_C pada Gambar 11.3.1, maka panjang T_BT_C adalah
$$T_BT_C{}^2 = AT_B{}^2 + AT_C{}^2 - 2\, AT_B\, AT_C\, \cos A. \quad (11.3.4)$$

Dengan mensubstitusikan nilai $AT_C = AT_B = s - a$ ke persamaan (11.3.4) maka persamaan (11.3.4) menjadi
$$T_BT_C{}^2 = (s - a)^2 + (s - a)^2 - 2(s - a)(s - a)\cos A$$
$$= 2(s - a)^2 - 2(s - a)^2 \cos A$$
$$= 2(s - a)^2(1 - \cos A)$$
$$T_BT_C = \sqrt{2(s - a)^2 \left(\frac{1 - \cos A}{2}\right) 2}$$
$$= \sqrt{4(s - a)^2} \sqrt{\left(\frac{1 - \cos A}{2}\right)}$$

$$T_BT_C = 2(s-a)\sqrt{\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)}. \tag{11.3.5}$$

Nilai $\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)$ dari persamaan (3.8) dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-\cos A}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1-\cos A)\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{(b^2+c^2-a^2)}{2bc}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\right)\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1-\cos A}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}\right), \tag{11.3.6}$$

karena $b^2 - 2bc + c^2 = (b-c)^2$, sehingga persamaan (11.3.6) menjadi

$$\left(\frac{1-\cos A}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right)$$

$$\left(\frac{1-\cos A}{2}\right) = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}. \tag{11.3.7}$$

Semi-perimeter segitiga dinyatakan dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, maka

$$a+b+c = 2s, \tag{11.3.8}$$

kurangkan kedua ruas dengan $2b$, maka diperoleh

$$a+b+c-2b = 2s-2b$$

$$a-b+c = 2(s-b). \tag{11.3.9}$$

Jika kedua ruas pada persamaan (11.3.8) dikurangkan dengan $2c$, maka diperoleh

$$a+b-c = 2(s-c). \tag{11.3.10}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (11.3.9) dan (11.3.10) ke persamaan (11.3.7), maka diperoleh

$$\left(\frac{1-\cos A}{2}\right) = \frac{2(s-c)2(s-b)}{4bc}$$

$$\left(\frac{1-\cos A}{2}\right) = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}. \tag{11.3.11}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (11.3.11) ke persamaan (11.3.5), maka persamaan (11.3.5) menjadi

$$T_B T_C = 2(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}. \qquad (11.3.12)$$

Dengan cara yang sama untuk memperoleh persamaan (11.3.12), maka diperoleh

$$T_A T_C = 2(s-b)\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

sedangkan panjang sisi $T_A T_B$ adalah

$$T_A T_B = 2(s-c)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Selanjutnya akan ditentukan $L\Delta T_A T_B T_C$, karena lingkaran dalam ΔABC merupakan lingkaran luar untuk $\Delta T_A T_B T_C$. Pada persamaan tersebut R merupakan jari-jari lingkaran luar ΔABC sedangkan jari-jari lingkaran luar untuk $\Delta T_A T_B T_C$ adalah jari-jari lingkaran dalam ΔABC yang disimbolkan dengan r, maka $L\Delta T_A T_B T_C$ adalah

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{T_B T_C \;\; T_A T_C \;\; T_A T_B}{4r}. \qquad (11.3.13)$$

Dengan mensubstitusikan panjang sisi-sisi $\Delta T_A T_B T_C$ dan nilai r ke persamaan (11.3.13), maka persamaan (11.3.13) menjadi

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{2(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\; 2(s-b)\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}}{4} \times \frac{2(s-c)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}{\frac{L\Delta ABC}{s}}$$

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\;\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}}{4} \times \frac{\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}{L\Delta ABC}. \qquad (11.3.14)$$

Jika $L\Delta ABC$ dinyatakan dengan rumus $L\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, maka $s(s-a)(s-b)(s-c) = L\Delta ABC^2$, sehingga persamaan (11.3.14) menjadi

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{2\, L\Delta ABC^2 \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\frac{(s-a)(s-c)}{ac}\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}{L\Delta ABC}$$

atau dapat ditulis

$$L\Delta T_A T_B T_C = 2\sqrt{\frac{(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}{a^2b^2c^2}}L\Delta ABC$$

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}L\Delta ABC. \qquad (11.3.15)$$

Dari persamaan (11.3.15) dapat dilihat bahwa luas segitiga Gergonne dapat ditentukan berdasarkan panjang sisi-sisi segitiga asal yang telah diketahui.

Teladan 11.3.1 Sebarang ΔABC seperti pada Gambar 11.3.1, dengan panjang sisi $AB = 14\ cm$, $BC = 15\ cm$, dan $AC = 13\ cm$. Hitunglah $L\Delta T_A T_B T_C$.

Penyelesaian:

Karena $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, maka diperoleh $s = 21\ cm$. Untuk menghitung $L\Delta ABC$ digunakan formula Heron [6], maka diperoleh

$$L\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$L\Delta ABC = \sqrt{21(21-15)(21-13)(21-14)}$$

$$L\Delta ABC = \sqrt{7056} = 84\ cm^2.$$

Adapun $L\Delta T_A T_B T_C$ dihitung berdasarkan persamaan (11.3.15), maka diperoleh

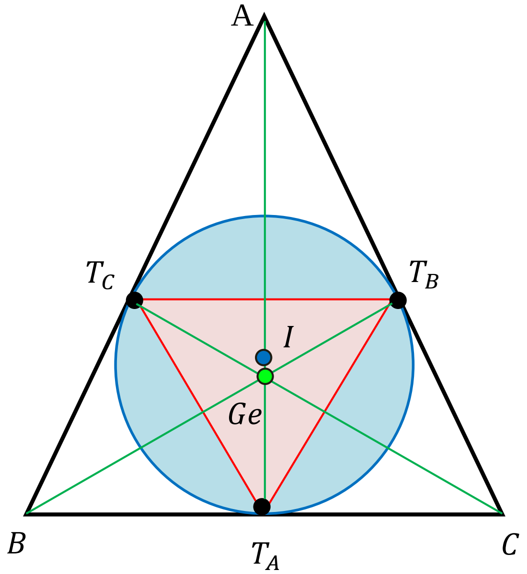
$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}L\Delta ABC$$

$$L\Delta T_A T_B T_C = \frac{2(21-15)(21-13)(21-14)}{15 \times 13 \times 14} \times 84$$

$$L\Delta T_A T_B T_C = 20{,}67692308\ cm^2.$$

Teladan 11.3.2 Terdapat ΔABC sama kaki dengan panjang sisi $AB = AC = 26\ cm$ dan $BC = 20\ cm$. Hitunglah $L\Delta T_A T_B T_C$.

Perhatikan Gambar 11.3.2



Gambar 11.3.2.

Penyelesaian:

Dengan cara yang sama pada teladan 11.3.1, maka diperoleh

$$s = 36\ cm$$

$$L\Delta ABC = 240\ cm^2,$$

sehingga $L\Delta T_A T_B T_C$ adalah A

$$L\Delta T_A T_B T_C = 56{,}80473373\ cm^2.$$

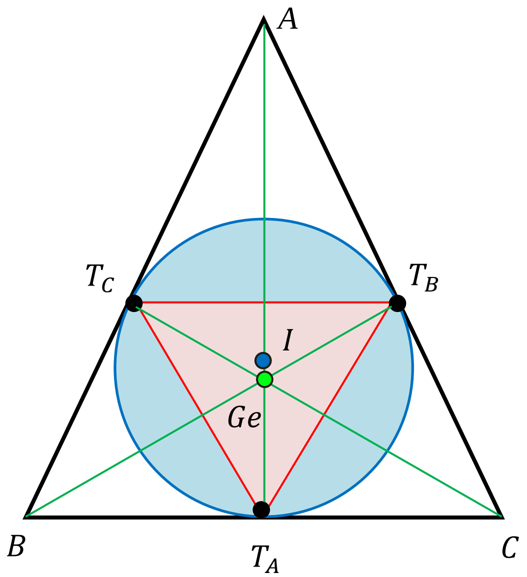
Teladan 11.3.3 Sebuah ΔABC sama sisi dengan panjang $AB = BC = AC = 18\ cm$. Hitunglah $L\Delta T_A T_B T_C$. Perhatikan Gambar 11.3.3.

Penyelesaian: Dengan cara yang sama pada Contoh 3.2.1, maka diperoleh $s = 27\ cm$. Adapun $L\Delta ABC$ adalah

$$L\Delta ABC = 81\sqrt{3}\ cm^2,$$

sehingga

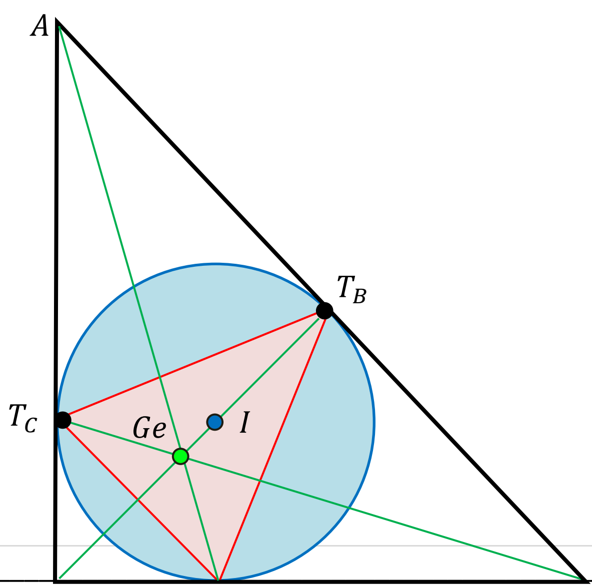
$L\Delta T_A T_B T_C \frac{81}{4}\sqrt{3}\ cm^2$.



Gambar 11.3.3

Contoh 11.3.4 Sebuah ΔABC siku-siku sebarang seperti pada Gambar 11, dengan panjang sisi $AB = 20\ cm$, $BC = 15\ cm$ dan $AC = 25\ cm$. Hitunglah $L\Delta T_A T_B T_C$.

Perhatikan Gambar 11.3.4



Gambar 11.3.4.

Penyelesaian:

Dengan cara yang sama pada Contoh 3.2.1, maka diperoleh

$$s = 30\ cm$$

$$L\Delta ABC = 150\ cm^2,$$

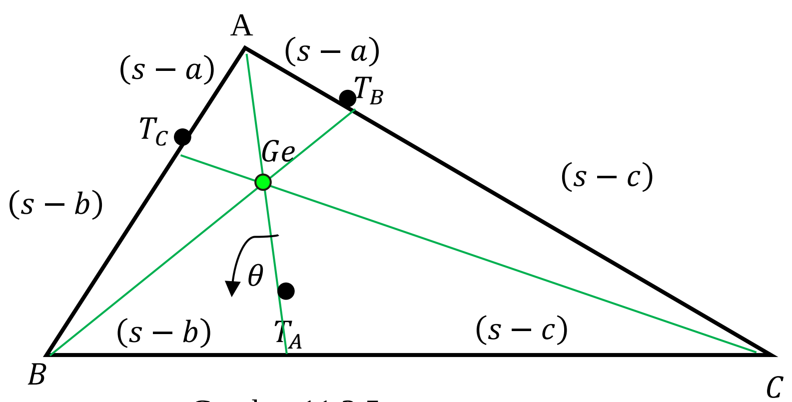
sehingga

$$L\Delta T_A T_B T_C = 30\ cm^2.$$

- **Panjang Garis Gergonne**

Pembahasan dalam bagian ini adalah menentukan hubungan antara panjang garis Gergonne dengan panjang sisi segitiga asal yaitu ΔABC. Adapun garis Gergonne yang dimaksud adalah ketiga garis yang berpotongan di titik Gergonne yaitu garis AT_A, BT_B dan CT_C.

Perhatikan Gambar 11.3.5



Gambar 11.3.5

Misalkan panjang sisi-sisi ΔABC pada Gambar 11.3.5, adalah $BC = a$, $AC = b$ dan $AB = c$. Pada bagian terdahulu telah ditunjukkan bahwa $BT_A = (s-b)$ dan $CT_A = (s-c)$. Dimisalkan juga $m\angle AT_AB = \theta$, dengan menggunakan aturan kosinus untuk ΔAT_AB, maka panjang garis AT_A dijabarkan sebagai berikut

$$AB^2 = {AT_A}^2 + {BT_A}^2 - 2AT_ABT_A\cos\theta$$

$$2AT_ABT_A\cos\theta = {AT_A}^2 + {BT_A}^2 - AB^2$$

$$\cos\theta = \frac{{AT_A}^2 + {BT_A}^2 - AB^2}{2AT_ABT_A} \qquad (11.3.16)$$

Dengan mensubstitusikan nilai $BT_A = (s-b)$ dan $AB = c$ ke persamaan (11.3.16), maka diperoleh

$$\cos\theta = \frac{AT_A^2+(s-b)^2-c^2}{2AT_A(s-b)}. \qquad (11.3.17)$$

Perhatikan juga ΔAT_AC, karena $m\angle AT_AC = 180^\circ - \theta$, dapat dinyatakan bahwa

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta.$$

Dengan menggunakan aturan kosinus untuk ΔAT_AC, maka diperoleh

$$-\cos\theta = \frac{AT_A^2+CT_A^2-AC^2}{2AT_A\,CT_A}. \qquad (11.3.18)$$

Jika ruas kiri dan kanan dari persamaan (11.3.18) dikalikan -1, maka

$$\cos\theta = \frac{AC^2-AT_A^2-CT_A^2}{2AT_A\,CT_A}$$

$$\cos\theta = \frac{b^2-AT_A^2-(s-c)^2}{2AT_A(s-c)}. \qquad (11.3.19)$$

Dari persamaan (11.3.17) dan (11.3.19) diperoleh

$$\frac{AT_A^2+(s-b)^2-c^2}{2AT_A(s-b)} = \frac{b^2-AT_A^2-(s-c)^2}{2AT_A(s-c)}$$

$$(s-b)(b^2-AT_A^2-(s-c)^2) = (s-c)(AT_A^2+(s-b)^2-c^2)$$

$$b^2(s-b) - AT_A^2(s-b) - (s-b)(s-c)^2 = AT_A^2(s-c) + (s-b)^2(s-c) \\ -c^2(s-c)$$

$$b^2(s-b) + c^2(s-c) = AT_A^2(s-c) + AT_A^2(s-b) + (s-b)^2(s-c) \\ +(s-b)(s-c)^2$$

atau dapat ditulis

$$b^2(s-b)\ +c^2(s-c) = AT_A^2\big((s-b)+(s-c)\big)$$
$$+(s-b)(s-c)\big((s-b)+(s-c)\big), \qquad (11.3.20)$$

karena $a = (s-b)+(s-c)$, maka persamaan (11.3.20) menjadi

$$aAT_A^2 + a(s-b)(s-c) = b^2(s-b)+c^2(s-c)$$
$$aAT_A^2 = b^2(s-b)+c^2(s-c)-a(s-b)(s-c),$$

sehingga diperoleh panjang garis Gergonne yang berpotongan dengan sisi BC adalah

$$AT_A^2 = \frac{b^2(s-b)+c^2(s-c)-a(s-b)(s-c)}{a}. \qquad (11.3.21)$$

Dengan cara yang sama untuk memperoleh persamaan (11.3.21), maka panjang garis Gergonne yang memotong sisi AC adalah

$$BT_B^2 = \frac{a^2(s-a)+c^2(s-c)-b(s-a)(s-c)}{b}.$$

Adapun garis Gergonne yang memotong sisi AB, yaitu

$$CT_C^2 = \frac{a^2(s-a)+b^2(s-b)-c(s-a)(s-b)}{c}.$$

11.4. Kontruksi Titik Nagel Melalui *Incircle*

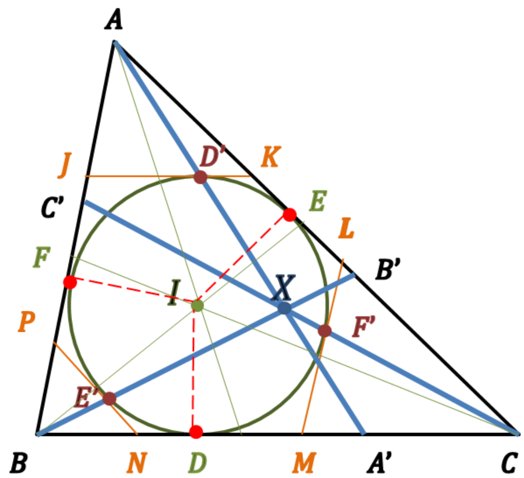
Untuk mengkontruksi titik Nagel melalui *incircle*, dilakukan langkah-langkah seperti yang terdapat pada Gambar 11.4.1.

1. Pada sebarang ΔABC, bentuk suatu lingkaran dalam (*incircle*) dengan cara membentuk bisektor sudut dalam segitiga di setiap titik sudut, sehingga ketiga garis tersebut konkuren di titik *incenter*, yaitu titik I. Titik I merupakan titik pusat *incircle* yang menyinggung semua sisi ΔABC, yaitu pada titik D, E, dan F masing-masing berada pada sisi BC, CA, dan AB.
2. Pada setiap sisi segitiga, buat garis sejajar yaitu sisi $BC // JK$ yang mana garis JK menyinggung *incircle* di titik D', sisi $CA // NP$ dengan garis NP menyinggung

incircle di titik E' dan sisi $AB // LM$ dengan garis LM menyinggung *incircle* di titik F'.

3. Pada ΔABC hubungkan titik sudut A terhadap titik D', titik sudut B terhadap E', dan titik sudut C terhadap F', maka perpanjangan dari ketiga garis AD', BE', dan CF' akan konkuren, konkurensi ini disebut juga dengan titik Nagel [6].

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa perpanjangan dari garis AD', BE', dan CF' konkuren pada titik Nagel.



Gambar 11.4.1.

Pada Gambar 11.4.1, perhatikan $\Delta ABA'$ dan $\Delta AJD'$, karena $BA' // JD'$, maka

$$\angle ABA' = \angle AJD' \quad \text{(sd)}$$

dan

$$\angle AA'B = \angle AD'J \quad \text{(sd)}$$

karena kesebangunan pada dua segitiga terpenuhi (sd-sd), maka $\Delta ABA' \sim \Delta AJD'$, dengan perbandingan sisi

$$\frac{BA'}{JD'} = \frac{AA'}{AD'} \;, \qquad (11.4.1)$$

sedangkan pada $\Delta AA'C$ dan $\Delta AD'K$, karena $A'C // D'K$, maka

$$\angle AA'C = \angle AD'K \quad \text{(sd)}$$

dan

$$\angle ACA' = \angle AKD' \quad \text{(sd)}$$

kesebangunan pada dua segitiga terpenuhi (sd-sd), sehingga $\Delta AA'C \sim \Delta AD'K$,

dengan perbandingan sisi adalah

$$\frac{A'C}{D'K} = \frac{AA'}{AD'} \ . \qquad (11.4.2)$$

Dari persamaan (11.4.1) dan (11.4.2) diperoleh

$$\frac{BA'}{JD'} = \frac{A'C}{D'K}$$

atau

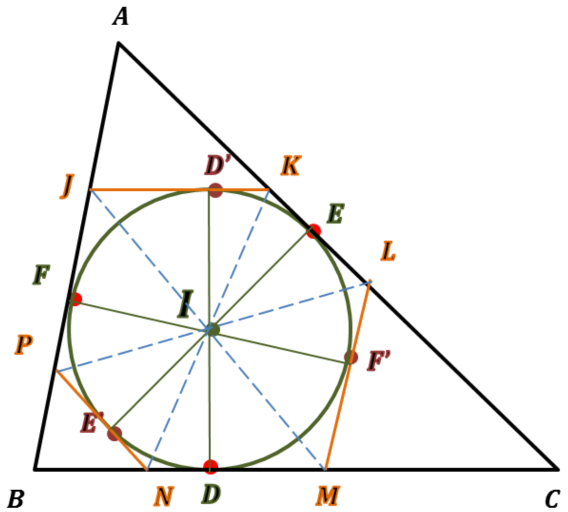
$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{JD'}{D'K} \ . \qquad (11.4.3)$$

Dengan menggunakan cara yang sama, pada $\Delta BCB'$ dan $\Delta BB'A$ diperoleh $\Delta BCB' \sim \Delta BNE'$ dan $\Delta BB'A \sim \Delta BE'P$, sehingga diperoleh perbandingan sisi

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{NE'}{E'P} \ , \qquad (11.4.4)$$

pada $\Delta CAC'$ dan $\Delta CC'B$, diperoleh $\Delta CAC' \sim \Delta CLF'$ dan $\Delta CC'B \sim \Delta CF'M$, sehingga diperoleh perbandingan

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{LF'}{F'M} \ . \qquad (11.4.5)$$



Gambar 11.4.2.

Pada Gambar 11.4.2, titik I merupakan titik *incenter* dan juga titik tengah dari diameter DD', EE', dan FF'. Jika titik I dihubungkan terhadap titik K, maka dari $\Delta KD'I$ dan ΔKEI, diperoleh

$ID' = IE$ (s) (jari-jari *incircle*)

$D'K = EK$ (s) (garis singgung)

$IK = IK$ (s) (garis yang sama)

karena kongruensi pada dua segitiga terpenuhi (s-s-s) [4], maka

$$\Delta KD'I \cong \Delta KEI\ , \qquad (11.4.6)$$

selanjutnya dengan menggunakan cara yang sama, yaitu titik I dihubungkan terhadap titik N, pada $\Delta NE'I$ dan ΔNDI, maka berlaku

$$\Delta NE'I \cong \Delta NDI\ . \qquad (11.4.7)$$

Karena garis KN merupakan bisektor $\angle D'IE$ dan $\angle DIE'$, maka pada $\Delta KD'I$ dan ΔNDI, diperoleh

$\angle D'IK = \angle DIN$ (sd) (sudut bertolak belakang)

$ID' = ID$ (s) (jari-jari *incircle*)

$\angle KD'I = \angle NDI$ (sd) (sudut siku-siku)

karena kongruensi pada dua segitiga terpenuhi(s-s-s), maka

$$\Delta KD'I \cong \Delta NDI\ , \qquad (11.4.8)$$

dengan menggunakan cara yang sama, pada ΔKEI dan $\Delta NE'I$, maka berlaku

$$\Delta KEI \cong \Delta NE'I\ . \qquad (11.4.9)$$

Dari persamaan (11.4.6), (11.4.7), (11.4.8), dan (11.4.9), diperoleh

$$\Delta NE'I \cong \Delta NDI \cong \Delta KD'I \cong \Delta KEI\ ,$$

sehingga

$$NE' = DN = D'K = EK\ . \qquad (11.4.10)$$

Dengan menggunakan cara yang sama yaitu jika ditarik garis dari titik I terhadap titik P dan L, maka berlaku

$$LF' = EL = E'P = FP \qquad (11.4.11)$$

dan dari titik I terhadap titik J dan M berlaku

$$JD' = FJ = F'M = DM \qquad (11.4.12)$$

Dari perkalian persamaan (11.4.3), (11.4.4), dan (11.4.5) diperoleh

$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B}=\frac{JD'}{D'K}\frac{NE'}{E'P}\frac{LF'}{F'M}$$

dan berdasarkan persamaan (11.4.10), (11.4.11), dan (11.4.12), diperoleh

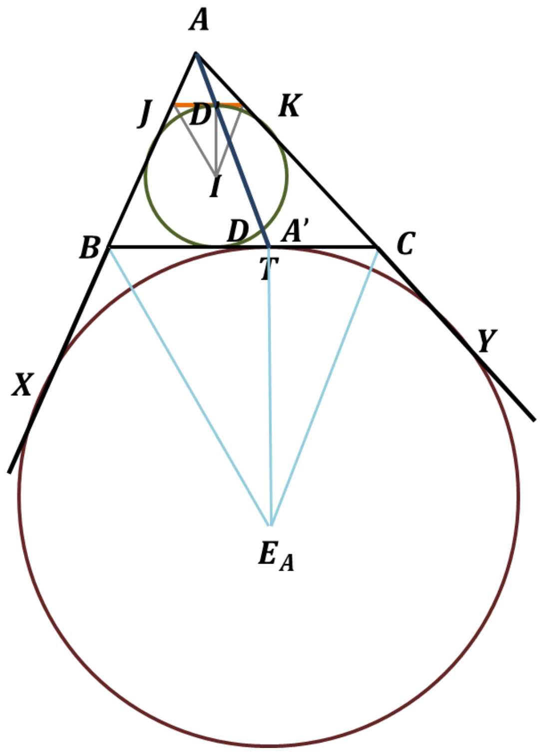
$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B}=\frac{DM}{EK}\frac{EK}{FP}\frac{FP}{DM}$$

$$\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B}=1\ .$$

Karena hasil perbandingan sisi-sisi pada segitiga bernilai 1, maka terbukti bahwa ketiga perpanjangan garis AD', BE', dan CF' konkuren.

Jika konkurensi yang diperoleh tersebut dimisalkan dengan titik X, maka titik ini belum dapat dikatakan sebagai titik Nagel. Karena titik Nagel terbentuk melalui titik singgung dari *excircle*, maka akan ditunjukkan bahwa titik X merupakan sebuah titik Nagel.

Perhatikan ΔABC pada Gambar 11.4.4, jika pada sisi BC dikontruksi *excircle* dengan pusat E_A, dengan titik singgung T, sedangkan A' merupakan titik potong dari perpanjangan garis AD terhadap sisi BC, maka akan dibuktikan bahwa $T=A'$ sedemikian sehingga A' merupakan titik singgung *excircle*.



Gambar 11.4.3.

Perhatikan ΔBE_AC dan ΔJIK pada Gambar 11.4.3. Jika $BC//JK$, maka $\angle KJB \cong \angle CBX$. Karena BE_A merupakan bisektor dari $\angle CBX$ dan JI bisektor $\angle KJB$, maka

$$\angle KJI \cong \angle CBE_A \quad \text{(sd)} \quad \text{(bisektor sudut)}$$

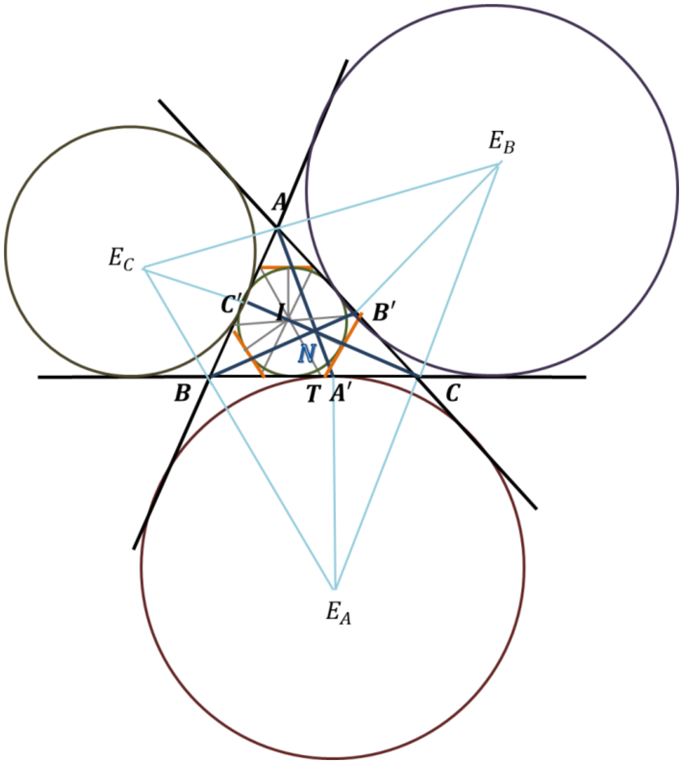
kemudian pada garis $BC//JK$ juga diperoleh, $\angle JKC \cong \angle BCY$. Karena CE_A merupakan bisektor dari $\angle BCY$ dan KI bisektor $\angle JKC$, maka

$$\angle JKI \cong \angle BCE_A \quad \text{(sd)} \quad \text{(bisektor sudut)}$$

kesebangunan dari dua buah segitiga terpenuhi (sd-sd), sehingga diperoleh $\Delta BE_AC \sim \Delta JIK$, maka tinggi TE_A dan $D'I$ bersesuaian, sehingga

$$\frac{BT}{JD'} = \frac{TC}{D'K}$$

$$\frac{BT}{TC} = \frac{JD'}{D'K} \ . \qquad (11.4.13)$$



Gambar 11.4.4.

Dari persamaan (11.4.3) dan (11.4.13), diperoleh

$$\frac{BT}{TC} = \frac{BA'}{A'C}$$

$$\frac{BT}{TC} + 1 = \frac{BA'}{A'C} + 1$$

$$\frac{BT + TC}{TC} = \frac{BA' + A'C}{A'C}$$

$$\frac{BC}{TC} = \frac{BC}{A'C}$$

$$TC = A'C\,.$$

Karena $TC = A'C$, maka $T = A'$, dapat dikatakan bahwa A' merupakan titik singgung *excircle*. Dengan cara yang sama yaitu dengan mengkontruksi *excircle* pada sisi segitiga lainnya, diperoleh titik B' dan C' yang merupakan titik singgung *excircle* pada sisi segitiga lainnya, seperti terdapat pada Gambar 11.4.4.

Karena titik A', B', dan C' masing-masing merupakan titik singgung lingkaran singgung luar (*excircle*), maka terbukti bahwa konkurensi dari perpanjangan garis AD', BE', dan CF' merupakan titik Nagel.

Titik Nagel tidak hanya terdapat di dalam segitiga, namun dapat juga dibentuk di luar suatu segitiga [4,8].

11.5. Semi Titik Nagel

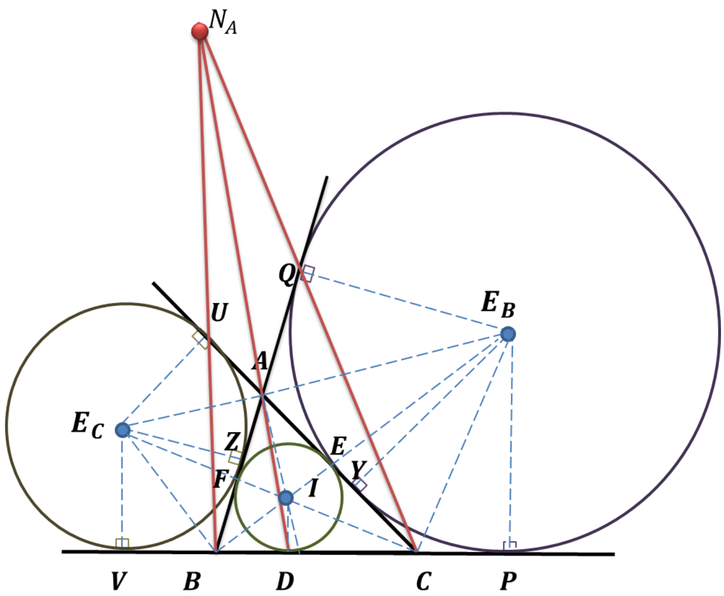
Suatu ΔABC yang memuat *incircle* I menyinggung sisi BC di titik D, *excircle* E_B menyinggung perpanjangan sisi BA di titik Q, dan *excircle* E_C menyinggung perpanjangan sisi CA di titik U. Jika titik sudut B pada segitiga dihubungkan terhadap titik U, titik sudut C dihubungkan terhadap titik Q, dan titik sudut A dihubungkan terhadap titik D, maka perpanjangan dari garis BU, DA, dan CQ konkuren [4]. Titik konkurensi ini disebut dengan semi titik Nagel atau titik Nagel yang berada di luar segitiga.

Akan ditunjukkan bahwa perpanjangan dari garis BU, DA, dan CQ konkuren. Pada Gambar 11.5.1, *incircle* pada ΔABC terdapat beberapa garis singgung yang sama panjang, yaitu

$$BD = FB$$

$$DC = CE$$

$$EA = AF\ .$$



Gambar 11.5.1.

Misalkan,

$$BD = FB = x\,, \tag{11.5.1}$$

maka

$$BC = BD + DC$$
$$a = x + DC$$
$$DC = a - x\,,$$

diperoleh

$$DC = CE = a - x \tag{11.5.2}$$

dan

$$AB = AF + FB$$
$$c = AF + x$$
$$AF = c - x\,,$$

diperoleh

$$EA = AF = c - x\,. \tag{11.5.3}$$

Karena

$$BC + CA + AB = BD + DC + CE + EA + AF + FB\,. \tag{11.5.4}$$

Substitusikan persamaan (11.5.1), (11.5.2), dan (11.5.3) ke persamaan (11.5.4), diperoleh

$$a + b + c = x + (a - x) + (a - x) + (c - x) + (c - x) + x\ ,$$

sehingga

$$a + b + c = 2a + 2c - 2x$$
$$2x = a - b + c$$
$$2x = a - b + c + b - b$$
$$x = \frac{1}{2}(a + b + c) - b$$
$$x = s - b\ .$$

Persamaan (11.5.1) menjadi

$$BD = FB = s - b\ . \qquad (11.5.5)$$

Untuk mendapatkan panjang sisi yang lainnya, maka digunakan cara yang sama, sehingga diperoleh

$$DC = CE = s - c\ . \qquad (11.5.6)$$

Dengan membandingkan persamaan (11.5.5) dan (11.5.6), diperoleh

$$\frac{BD}{DC} = \frac{s - b}{s - c}\ . \qquad (11.5.7)$$

Sedangkan pada *excircle* yang terdapat pada sisi CA dan AB, juga terdapat beberapa garis singgung yang sama panjang.

Dengan membandingkan persamaan (3.11) dan persamaan (3.12), diperoleh

$$\frac{CU}{UA} = \frac{s}{s - b}\ . \qquad (11.5.8)$$

Selanjutnya, dengan membandingkan persamaan (3.9) dan (3.7), diperoleh

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{s - c}{s}\ . \qquad (11.5.9)$$

Dengan mengalikan persamaan (11.5.7), (11.5.8), dan (11.5.9), diperoleh

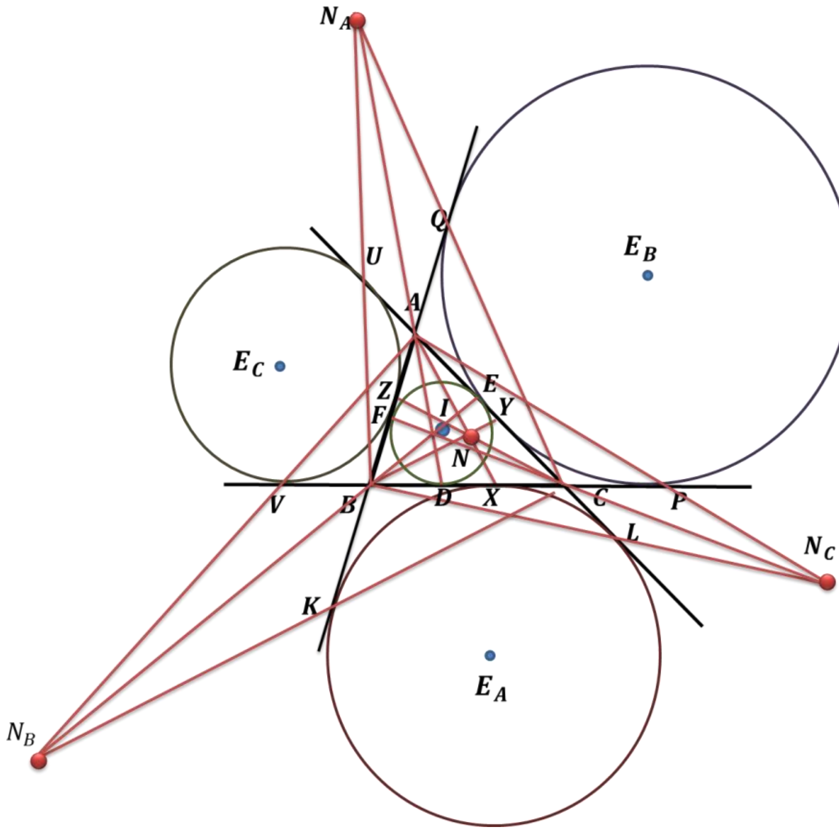
$$\frac{BD}{DC}\frac{CU}{UA}\frac{AQ}{QB} = \frac{s - b}{s - c}\frac{s}{s - b}\frac{s - c}{s}\ ,$$

sehingga

$$\frac{BD}{DC}\frac{CU}{UA}\frac{AQ}{QB} = 1\,.$$

Karena hasil perbandingan sisi-sisi pada segitiga bernilai 1 dan teorema Ceva pada kasus 3 terpenuhi, maka terbukti bahwa ketiga perpanjangan dari garis BU, DA, dan CQ konkuren, yaitu di titik N_A yang berada di luar segitiga.

Teorema 3.3.1 Sebarang ΔABC memiliki empat titik Nagel.

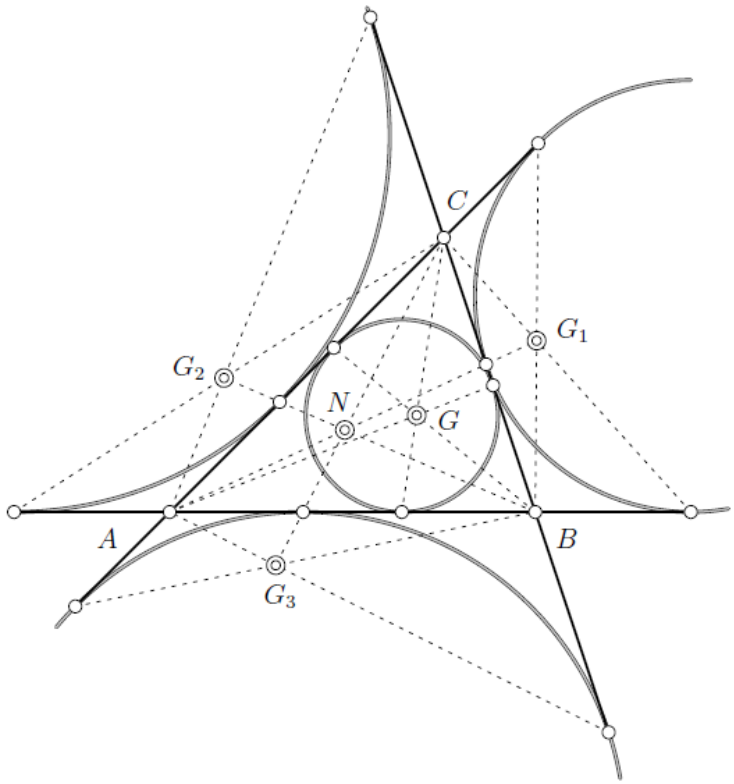


Gambar 11.5.2

Bukti: Secara geometri dapat dilihat pada Gambar 11.5.2 dan terbukti bahwa pada sebarang segitiga memiliki empat buah titik Nagel, satu berada di dalam segitiga sedangkan tiga titik Nagel yang lainnya berada di luar segitiga. ■

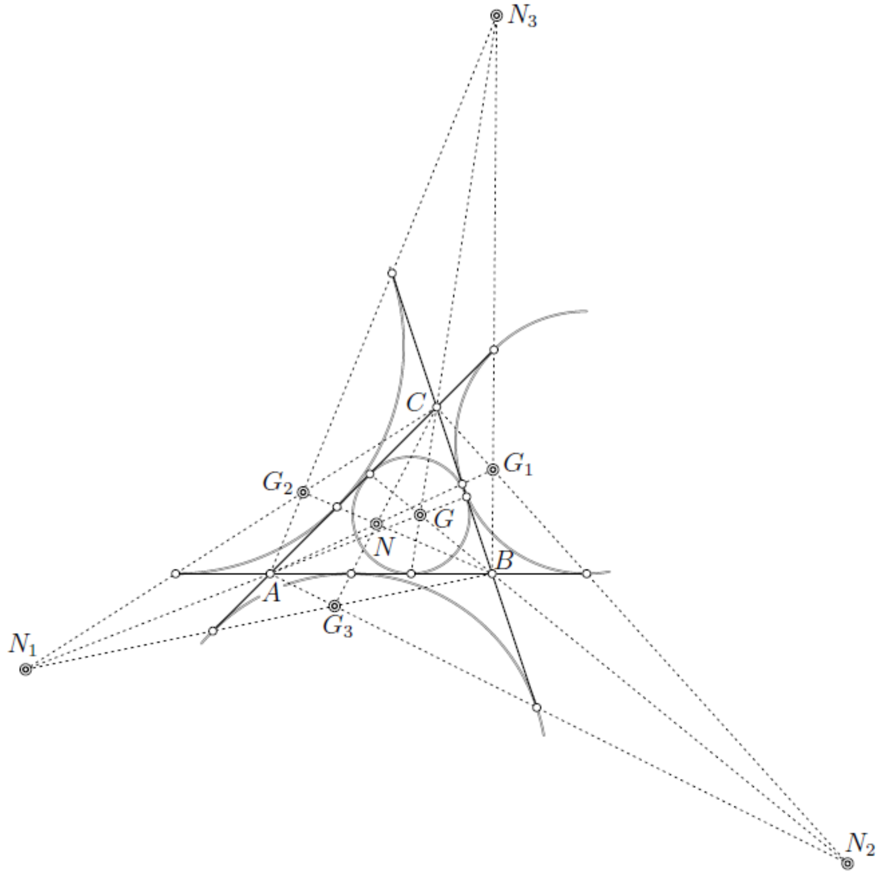
Latihan 21.

1. Buatlah sebarang segitiga siku-siku sama kaki, dan hitunglah panjang garis Gergonnenya.
2. Buatlah sebarang segitiga siku-siku sama kaki dan kontruksilah sebuah titik semi nagelnya dan hitunglah luas yang terbentuk dengan ke dua titik sudut segitiga lainnya.
3. *) Perhatikan gambar dibawah ini



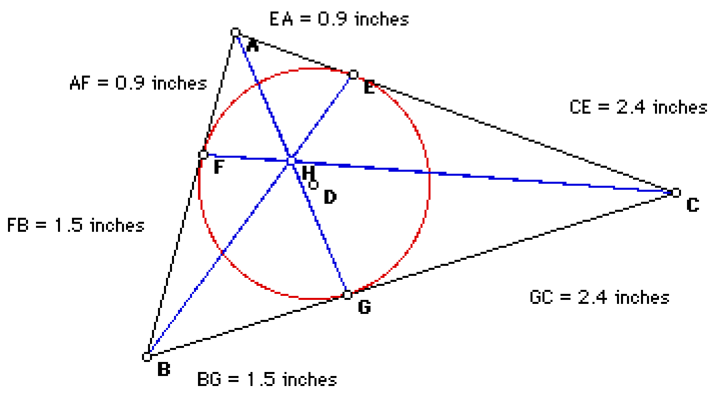
Tunjukkan bahwa ANG_1, BNG_2 dan CNG_3 masing-masing adalah segaris

4. Kembali pada gambar soal nomor 3. Hitunglah luas segitiga ABG_1, BCG_2 dan segitiga CAG_3.
5. *) Perhatikan gambar di bawah ini



Tunjukkan BG_1, AG_2 dan garis bagi sudut C adalah konkongkuren di N_3, dengan cara yang sama tunjukkan untuk kongkurensi di N_1 dan N_2.

6. *). Berapakan luas segitiga ABN_3, BCN_1 dan CAN_2. Pada gambar disoal no 3.
7. *). Berapakah luas segiempat CG_2NG_1, juga pada gambar soal no 3.
8. Masih pada gambar soal nomor 3 di atas, tentukan panjang sisi AN_1, BN_2 dan CN_3.
9. Perhatikan segitiga di bawah, yang panjang sisinya telah ditentukan secara khusus panjang sisinya telah ditentukan. Berapakah luas dan panjang segitiga nagelnya.



$$\frac{FB}{AF} \cdot \left(\frac{EA}{CE}\right) \cdot \left(\frac{GC}{BG}\right) = 1.0$$

DAFTAR PUSTAKA

1. Vandajav, A, Tserendorj, B and Undrakh, 2012, On Some Weighted Erdos-Mordell Type Innequalities for Poligons, *Int Journal of Geometry*, Volume 1 No 2, 15 – 21.
2. Ana Sliep·cevic, 2002, A New Generalization of the Butterfly Theorem, *Journal for Geometry and Graphics*, Volume 6, no 1, 61 – 68.
3. Atul Dixit and Darij Grinberg, 2004, Orthopoles and the Pappus Theorem. *Forum Geometricorum*, 4, 53 – 59.
4. Boyd.J.N and Raychowdhury.P.N, 1999. The Gergonne Point Generalized Through Convex Coordinates, *Internet. J. Math. Sci*, 22 (2): 423-430.
5.
6. Brian, O.C, 2010, *Misteries of the Equilateral Triangle*, Hikari Ltd,
7. Bogomolny, A. 2008. Sine, Cosine and Ptolemy's theorem. http://www.cut-the-knot.org/proofs/sine,cosine.html#law, 22 Mei 2012. Pk. 16.22.
8. Bottema, O, 2008, *Topics in Elementary Geometry*, second editions, springer, New-York
9. Coxeter, H.S.M and Greitzer, 1967, *Geometry Revisited*, Mathematical Association of America (Inc.)
10. D. Grinberg and P. Yiu, 2002, 2002, The Apollonius Circles as a Tucker Circle, *Forum Geometricorum*, 2, 175 – 182.
11. Dergiades, N. 2004. Signed distances and the Erdős-Mordell inequality. *Forum Geom*. 4: 67–68.
12. Dong Wu Y, Chun L.Y and Zhang, Z.A, 2009, A Geometric Inequality of the Erdos-Mordell Type, *Journal of Innequalities in Pure and Applied Mathematic*, Volume 10, issue 4, 1 – 5.
13. Downs Jr., F.L. 1964. *Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, London
14. Enrico Bombieri and Walter Gubler, 2006, *Height in Diophantine Geometry*, Cambridge University Press, New-York.

15. Finbarr Holland, 2007, Another Verification of Fagnano's Theorem**,** *Forum Geometricorum*. Volume 7, 207–210
16. Florentin Smarandache, I.P, 2012, *The Geometry of Homological Triangle*, The Education Publisher, Inc, Ohio,
17. Gibson, C.G, 2003, *Elementary Euclidean Geometry An Introduction*, Cambridge University Press, New-York.
18. Gerard A. Venema: *Exploring Advanced Euclidean Geometry with Geometer's Sketchpad*, July 2006.
19. Godfray, C & Siddons, A.W. 1908. *Modern Geometry*. Cambridge University Press, London.
20. Hasriati, 2010, Carnot's Theorem in Barycentric Coordinates, *Prosiding Seminar UKM-Unri ke* 6, Bangi, 513 – 515.
21. Hoehn, L. 2007. A New Characterization of the Nagel Point. *Missouri J. Math. Sci*, **11**(1): 45-48.
22. Holland, F, 2007, Another Verifications of Fagnano's Theorem, *Forum Geometricorum*, 7, 2007 – 2010.
23. Hung, T.Q. 2007. On the extension of Carnot's Theorem. *Mathematical Reflections*. 6: 1-4.
24. Jian Liu, 2008,A Weighted Geometric Inequality and its Applications, *Journal of Inequality in pure and Applied Mathematic*s, 9(2), 1 – 9.
25. Jian Liu, 2011, A New Proof of the Erdos-Mordell Innequality, *Int Eletronic Journal of Geometry*, volume 4 no 2, 114 – 119.
26. Josefsson, M. 2011. The Area of the Diagonal Point Triangle. *Forum Geometricorum*, **11**: 213-216.
27. Kimberling, C, *Encyclopedia of Triangle Centers*, 2000, http://www2.evansville/edu.ck6/encyclopedia.
28. Kin Y li, 2005, Famous Geometry Theorems, M*athematical Excalibur*, Volume 10 no 3, 1 – 4.

29. Lev Emeryanov, 2004, On the Intercepts of The OI-Line. *Forum Geometricorum*, 4, 81 – 84.
30. Odehnal, B. 2010. Generalized Gergonne Point and Nagel Point. *Beitr. Algebra Geom*, **51**(2): 477-491.
31. Malgorzata Buba-Brzozowa, 2000, Ceva's and Menelaus' Theorems for the n-Dimensional Space, *Journal for Geometry and Graphics*, Volume 4, No. 2, 115-118.
32. Mario Dalc'in. Isotomic Inscribed Triangles and Their Residuals. *Forum Geometricorum*.vol 3 (2003) 125-134.
33. Mashadi. Geometri; Pusbangdik Universitas Riau. 2012.
34. Mashadi, 2010, Bukti Sederhana Dari Teorema Carnot's dan Ketaksamaan Erdoss-Mordell. *Proseding KNM* XV, Manado, 41 – 55.
35. Mashadi, Some Alternative Conceps for fuzzy normed space and fuzzy 2-Normed space, JP Jounal of Mathematical Siences, Vol 14, Issue 1 and 2 : 1 – 19.
36. Mashadi, Sri Gemawati, Hasriati and Putri Januarti, Some Result on Excircle of Quadrilateral, JP Jounal of Mathematical Siences, Vol 14, Issue 1 and 2 : 41 – 56.
37. Mashadi, Sri Gemawati, Hasriati and Hessy Herlinawai, Some Result on Excircle of Quadrilateral, JP Jounal of Mathematical Siences, Vol 15, Issue 1: . . . . .
38. Marshall W. Buck and Robert L. Siddon, 2012, The Area of a Polygon with an Inscribed Circle, *Arxiv math*, 1203.3438, volume 1, pp, 1 – 13.
39. Minculet, N. Barbu, C. 2012. Cevian Of Rank (k, l, m) In Triangles. *Internasional Journal Of Geometrical*, **1**/2 (2012): 22-23
40. Nguyen Minh Ha, 2004, Another Proof of Fagnano's Inequality. *Forum Geometricorum* Volume 4, 199–201.
41. Paul Yiu, 2001, *Introduction to the Geometryof the Triangle*, Department of Mathematics Florida Atlantic University
42. Salazar, J. C. 2004. On the Areas of the Intouch and Extouch Triangles. *Forum Geometricorum*, **4** (2004): 61-65.

43. Sastry, K. R. S. 2001. Heron Triangles: A Gergonne-Cevian-and-Median Perspective. *Forum Geometricorum*. **1**(2001): 17-24
44. Serge Lang and Gene Murrow, 1988, *Geometry*, second editions, Springer, London.
45. Sindey Kung, 2005, A Butterfly Theorems for Quadrilateral, *Mathematics Magazine*, Volume 78 no 4, 314 – 316.
46. Sri Gemawati, 2010, Poncelet's Theorem on Ellips, *Prosiding Seminar UKM-Unri* ke 6, Bangi, , 174 – 176.
47. W. Yu-Dong,. Y. Chun-Lei and Z. Chi-Hua, A Geometry Inequality of the Generalized Erdos-Mordel Type, *Journal of Inequality in Pure and Applied Mathematics*, 10(4), 2009, 107 – 111.
48. Wong Yan Loi, 2009, *An Introductions to Geometry*, Academic press inc.
49. Zvonko, Cerin, 2003, Lines with the butterfly property, *Mathematical Communications*, volume 8, 35 – 41.
50. http://www.cut-the-knot.org/triangle/Fagnano.shtml
51. http://mathworld.wolfram.com/PappussHexagonTheorem.html
52. http://mathworld.wolfram.com/DesarguesConfiguration.html

Indeks Istilah

Indeks Symbol

ΔABC := Segitiga ABC

$L\Delta ABC$:= Luas Segitiga ABC

□$ABCD$:= Segi-empat $ABCD$

L□$ABCD$:= Luas Segi-empat $ABCD$

$m = \frac{\Delta x}{\Delta y}$:= Kemiringan

$\sim$:= Sebangun

$AB \cap CD$:= Perpotongan AB dengan CD

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$: = ΔABC sebangun dengan ΔDEF

$\cong$: = Kongruens

$AC \cong DF$: AC Kongruen dengan DF

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$:= ΔABC kongruen dengan ΔDEF

Δx := Perubahan mendatar

Δy := Perubahan tegak

$m\angle ACB$: ukuran sudut ACB

SAS = S-Sd-S

ASA = Sd-S-Sd

SAA = S-Sd-Sd

AAA=Sd-Sd-Sd.

S-Sd-S := Sisi-Sudut-Sisi

Sd-S-Sd := Sudut-Sisi-Sudut

S-Sd-Sd := Sisi-Sudut-Sudut

Sd-Sd := Sudut-Sudut

Sd-Sd-Sd := Sudut=Sudut-Sudut

s = Setengah keliling segitiga

// := Sejajar

$\perp$:= Tegak lurus

$\neq$:= Tidak sama

Ω := Bidang Omega

$\angle A$:= Sudut A

$\angle B \cong \angle C$:= $\angle B$ kongruen atau sama dengan $\angle C$