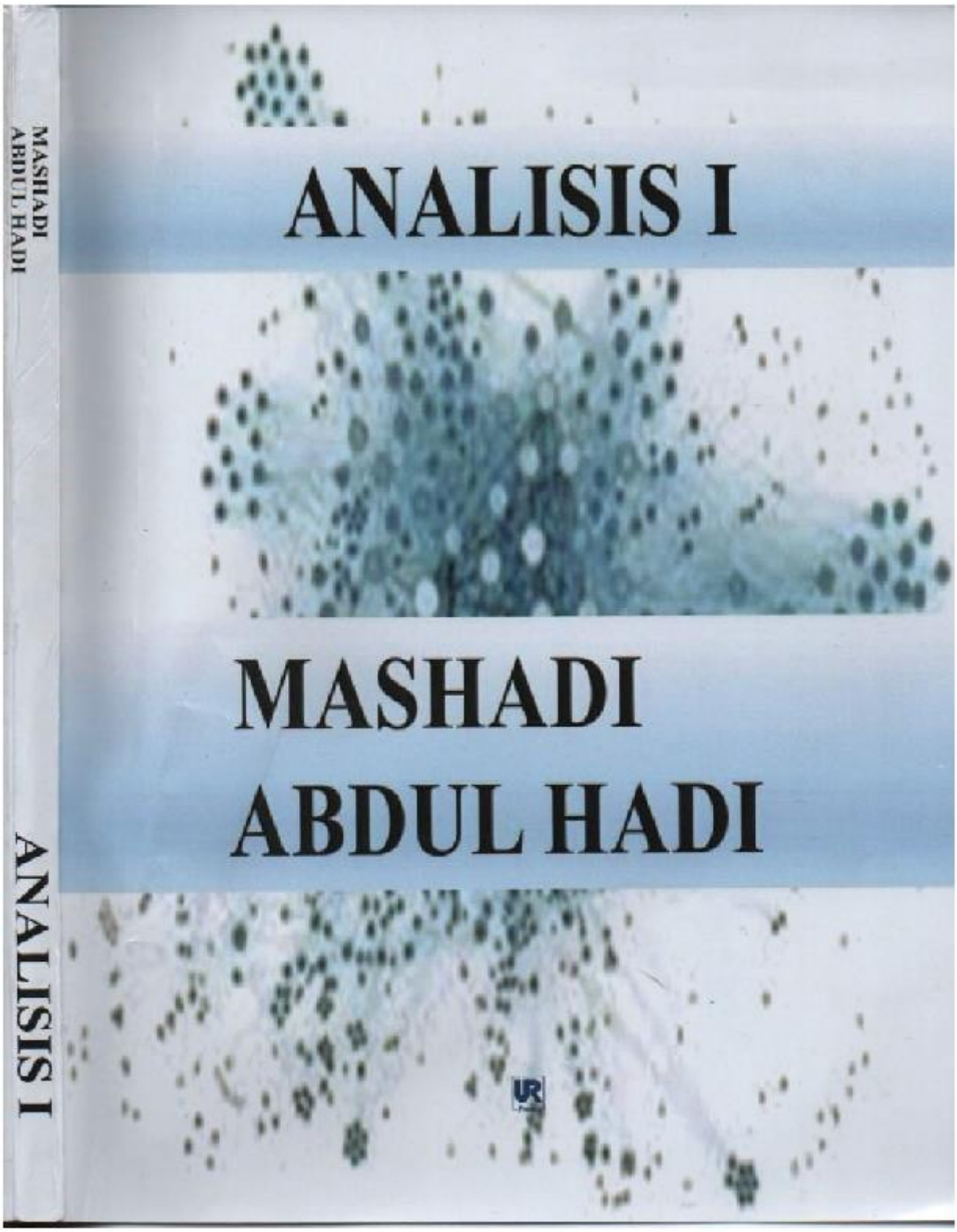

MASHADI
ABDUL HADI
ANALISIS I
ANALISIS I
MASHADI
ABDUL HADI

ANALISIS I

Undang-Undang Nomor 19 Tahun 2002, tentang Hak Cipta

PASAL 2

(1) Hak Cipta merupakan hak eksklusif bagi Pencipta atau Pemegang Hak Cipta untuk mengumumkan atau memperbanyak ciptaannya, yang timbul secara otomatis setelah suatu ciptaan dilahirkan tanpa mengurangi pembatasan menurut perundang-undangan yang berlaku.

PASAL 72

(1) Barang siapa dengan sengaja dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 2 ayat (1) atau Pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana penjara masing-masing paling singkat 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp 1.000.000.00 (Satu Juta Rupiah), atau paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp5.000.000.000,00 (Lima Miliar Rupiah).

(2) Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu Ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau Hak Terkait sebagaimana dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp 500.000.000.00 (lima ratus juta rupiah).

ANALISIS I

MASHADI
ABDUL HADI

Penerbit
UR Press Pekanbaru
2017

ANALISIS I

Penulis:
Mashadi
Abdul Hadi

Sampul & Tata Letak : Mashadi
Diterbitkan oleh UR Press, Desember 2017

Alamat Penerbit:
Badan Penerbit Universitas Riau
UR Press Jl. Pattimura No. 9, Gobah Pekanbaru 28132,
Riau, Indonesia
Telp. (0761) 22961, Fax. (0761) 857397
e-mail: unri_press@yahoo.co.id
Anggota IKAPI

Hak Cipta dilindungi Undang-undang
Dilarang mengutip atau memperbanyak
sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari penerbit

Isi di luar tanggung jawab percetakan

Cetakan Pertama : Desember 2017

ISBN 978-979-792-796-7

KATA PENGANTAR

Pertama-tama penulis dan tim mengucapkan puji dan syukur kehadirat Allah swt, karena telah selesainya penulisan buku ini. Pada dasarnya buku ini adalah digunakan untuk mata kuliah Analisis 1 sejumlah 3 sks atau Analisis 1 sejumlah 4 sks. Buku ini lebih banyak di ambil dari buku Inbtroductions to Real Analysis karangan Bartle, R.G and Sherbert, D.R edisi ke 4. Akan tetapi sesuai dengan rendahnya pemahaman Kalkulus di berbagai Perguruan Tinggi level menengah ke bawah (khususnya di Universitas Riau). Maka buku ini kami berikan beberapa tambahan dan Pengembangan serta dalam proses pembuktian juga diberikan beberapa alternatif bukti untuk beberapa teorema di bab-bab awal.

Dalam penggunaannya, untuk mahasiswa juga diberikan alternatif langkah pembuktian untuk menggiring mahasiswa dapat menemukan hasil yang diharapkan. Sedangkan untuk dosen, sebaiknya dalam proses pembelajaran, jangan sekali-kali mengejakan bukti kepada mahasiswa, akan tetapi akan lebih baik jika dosen dapat membimbing mahasiswa untuk menemukan buktinya. Akan tetapi untuk teorema awal di setiap topik dapat dijelaskan bukti secara lengkap. Namun di bahagian pertengahan mahasiswa harus mencoba menemukan bukti dan dosen hanya memberikan petunjuk yang dapat ditempuh mahasiswa dalam melakukan proses pembuktian. Sedangkan untuk teorema di bahagian akhir setiap topik sebaiknya mahasiswa harus mencoba terlebih dahulu mencari bukti sendiri dan buku hanya digunakan sebagai panduan saja.

Pada setiap bab/sub-bab disediakan latihan yang cukup banyak, makin tinggi nomor soalnya maka tingkat kesulitan soalnya juga makin tinggi. Maka kondisi ini dapat digunakan untuk mengukur kemampuan dan pemahaman mahasiswa dalam penguasaan materinya. Jika anda dapat mengerjakan soal-soal dengan nomor tinggi, maka diharapkan kemampuan dan pemahaman anda tentang topik tersebut sudah baik. Asahlah selalu kemampuan anda dengan mengerjakan soal-soal latihan sebanyak mungkin.

Akhirnya, tiada gading yang tak retak, saran dan masukkan yang membangun dari pembaca sangat diharapkan untuk kesempurnaan buku ini pada edisi berikutnya.

Hormat Kami

Penulis

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	v
Daftar Isi	vii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Aljabar Himpunan	1
1.2 Fungsi	6
1.3 Induksi Matematika	18
1.4 Himpunan Hingga dan Takhingga	22
BAB 2 SISTEM BILANGAN REAL	27
2.1 Sifat-Sifat Aljabar Sistem Bilangan Real	27
2.2 Sifat-sifat Urutan dari R	41
2.3 Nilai Mutlak	52
2.4 Sifat Kelengkapan dari R	58
2.5 Aplikasi dari Sifat Supremum (Sifat Archimides)	66
2.6 Interval dan Desimal	70
BAB 3 BARISAN BILANGAN-BILANGAN	76
3.1 Barisan dan Limit	77
3.2 Teorema Limit Barisan	83
3.3 Barisan Monoton dan Subbarisan	91
3.4 Kriteria Cauchy	103
3.5 Barisan Divergen Sejati	110
3.6 Deret	113
BAB 4 LIMIT	120
4.1 Limit Fungsi	120
4.2 Teorema Limit	130
BAB 5 FUNGSI KONTINU	143
5.1 Fungsi Kontinu	143
5.2 Kombinasi dari Fungsi Kontinu	147
5.3 Fungsi Kontinu Pada Interval	152
5.4 Kontinu Seragam	158
5.5 Fungsi Monoton dan Fungsi Invers	162
BAB 6 DIFFERENSIASI	166
6.1 Derivatif	165
6.2 Teorema Nilai Rata-rata	175
6.3 Aturan L'Hospital	183
6.4 Teorema Taylor	191

Daftar Pustaka 201
Indeks 202

B A B 1

PENDAHULUAN

Himpunan merupakan dasar dari matematika dan semua objek matematika serta konstruksinya akan kembali pada teori himpunan. Di dalam bab ini, kita akan membahas pengertian himpunan, notasi dan sifat-sifatnya, tetapi karena tujuan dari buku ini akan menyajikan dasar-dasar dari analisis real, maka topik tentang himpunan tidak akan dibahas secara mendetail di buku ini. Bagi pembaca yang sudah familiar dengan teori himpunan, bab ini dapat ditinggalkan.

1.1 Aljabar Himpunan

Jika A melambangkan himpunan dan x elemen di dalam A, maka sering dituliskan dengan $x \in A$ sebagai singkatan dari pernyataan ***x* elemen himpunan** A atau ***x* anggota himpunan *A*** atau himpunan A memuat elemen x. Jika x bukan elemen di dalam A, maka akan dinotasikan dengan $x \notin A$. Dari sebuah elemen x dan himpunan A, hanya tepat satu kemungkinan dari dua pernyataan berikut berlaku:

$$x \in A \quad \text{atau} \quad x \notin A.$$

Jika A dan B merupakan dua himpunan dan x sebuah elemen, maka terdapat 4 kemungkinan yaitu:

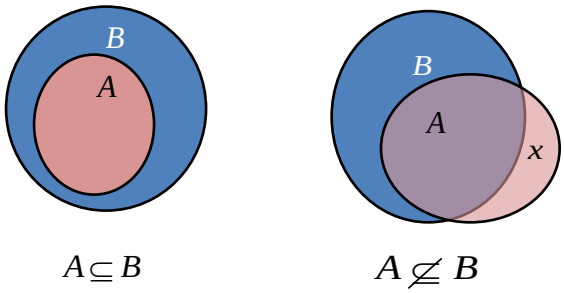
(1) $x \in A$ dan x $\in B$ (2) $x \in A$ dan $x \notin B$.

(3) $x \notin A$ dan x $\in B$ (4) $x \notin A$ dan $x \notin B$

Jika setiap elemen dari A juga termuat di dalam B atau A merupakan himpunan bagian dari B, akan dituliskan dengan

$$A \subseteq B \qquad \text{atau} \qquad B \supseteq A.$$

Jika A bukan himpunan bagian dari B atau terdapat elemen di A yang bukan elemen di B, dituliskan dengan $A \not\subseteq B$. Jika $A \subseteq B$ dan terdapat elemen di dalam B yang tidak di dalam A, dikatakan A **himpunan bagian (subset) sejati** dari B, dan dinotasikan dengan $A \subset B$. Lihat gambar 1.1.1.



Gambar 1.1.1 Himpunan bagian

Definisi 1.1.1 Dua himpunan dikatakan **sama** jika mereka memuat elemen-elemen yang sama. Jika himpunan A dan B sama, maka dinotasikan dengan $A = B$.

Dengan kata lain, dua himpunan A dan B dikatakan sama jika syarat (2) dan (3) di atas tidak berlaku. Secara ekuivalen, kita harus menunjukkan bahwa $A \subseteq B$ dan $A \supseteq B$.

Penulisan himpunan selain disajikan dengan cara mendaftar dapat juga disajikan dengan menyebutkan sifat-sifatnya, sehingga suatu himpunan sering dituliskan sebagai

$$\{x : P(x)\}$$

sebagai lambang untuk himpunan semua elemen x yang mempunyai sifat P, sering juga dibaca dengan ”himpunan semua x sedemikian hingga $P(x)$”. Untuk memberi kejelasan terhadap semesta pembicaraan, notasi di atas sering juga ditulis dengan

$$\{x \in S : P(x)\}$$

untuk menuliskan himpunan bagian dari S yang mempunyai sifat P.

Teladan 1.1.2 (a) Jika $N := \{1, 2, 3, ...\}$ melambangkan himpunan bilangan-bilangan asli maka himpunan

$$A = \{x \in N : x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

memuat bilangan-bilangan asli yang memenuhi persamaan $x^2 - 3x + 2 = 0$. Padahal penyelesaian persamaan kuadrat $x^2 - 3x + 2 = 0$ adalah $x = 1$ atau $x = 2$. Dengan demikian, himpunan di atas sering dituliskan dengan cara mendaftar sebagai $A = \{1, 2\}$.

(b). Himpunan semua bilangan a

sli genap dapat dinotasikan dengan $\{2x : x \in N\}$ atau $\{y \in N: y = 2x, x \in N\}$.

(c). Himpunan bilangan bulat dinotasikan dengan

$$Z := \{...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

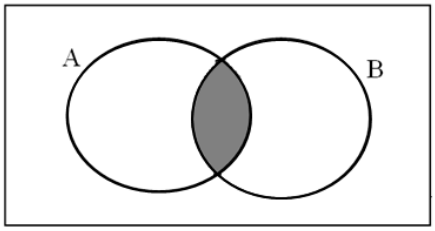
Himpunan bilangan rasional dinotasiikan dengan

$$Q := \{m/n : m, n \in Z \text{ dan } n \neq 0\}.$$

Catatan**:** Kita akan sering menggunakan simbol **:=** dengan pengertian bahwa simbol di sebelah kiri didefinisikan dengan ekspresi pada sisi kanan.

Sekarang kita akan mengenalkan beberapa operasi pada himpunan yaitu suatu cara untuk mengkonstruksi himpunan baru berdasarkan pada himpunan-himpunan yang telah diketahui.

Definisi 1.1.3 Jika *A* dan *B* adalah himpunan-himpunan, maka **irisan** (interseksi) mereka adalah himpunan semua elemen yang termuat pada himpunan *A* dan *B*. Kita akan menotasikan irisan *A* dan *B* dengan $A \cap B$. Lihat gambar 1.1.2.

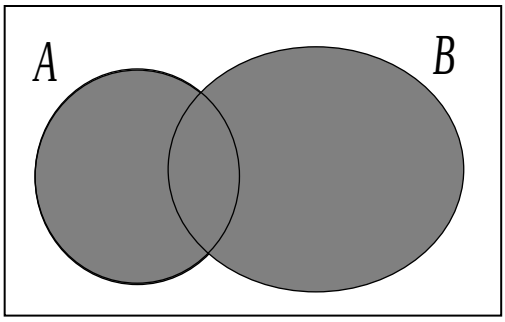


Gambar 1.1.2 Irisan dua himpunan

Dengan kata lain, irisan dari *A* dan *B* didefinisikan dengan

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ dan } x \in B\}.$$

Definisi 1.1.4 Jika *A* dan *B* adalah himpunan-himpunan, maka **gabungan** (union) mereka adalah himpunan semua elemen yang termuat pada himpunan *A* atau *B* atau pada *A* dan *B*. Kita akan menotasikan gabungan *A* dan *B* dengan $A \cup B$. Lihat gambar 1.1.3.



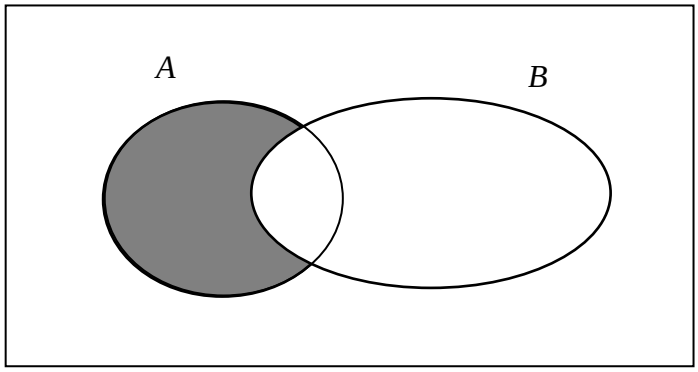
Gambar 1.1.3 Gabungan dua himpunan

Dengan kata lain, gabungan dari *A* dan *B* didefinisikan dengan

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ atau } x \in B\}.$$

Definisi 1.1.5 Himpunan yang tidak mempunyai elemen dikatakan **himpunan kosong** (empty or void set) dan dinotasikan dengan simbol $\varnothing$ atau { }. Jika *A* dan *B* tidak mempunyai elemen bersama (berarti, $A \cap B = \{\ \}$), maka *A* dan *B* dikatakan **saling asing** (disjoint) atau **tidak beririsan**.

Definisi 1.1.6 Jika *A* dan *B* merupakan himpunan-himpunan, maka **komplemen dari *B* relatif terhadap *A*** adalah himpunan semua elemen *A* yang tidak termuat di dalam *B*. Kita akan menotasikan himpunan ini dengan $A\backslash B$ atau $A - B$ (dibaca *A* minus *B*). Lihat Ggambar 1.1.4.



Gambar 1.1.4 Komplemen dari *B* relatif terhadap *A*

Dengan kata lain, komplemen dari *B* relatif terhadap *A* didefinisikan dengan

$$A\backslash B := \{x \in A : x \notin B\}.$$

Teladan 1.1.7 Misalkan $A = \{2,3,5\}$ dan $B = \{0,2,4,6\}$ dan $C = \{1,3,7\}$. Maka $A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = \{0,2,3,4,5,6\}$, $B \cap C = \varnothing$ dan $A \setminus B = \{3,5\}$. Himpunan *B* dan *C* dikatakan **saling asing**.

Berikut ini akan diberikan beberapa sifat aljabar dari operasi-operasi yang didefinisikan di atas.

Teorema 1.1.8 *Jika A, B, C adalah sebarang himpunan, maka*
(a). $A \cap A = A$ *dan* $A \cup A = A$.
(b). $A \cap B = B \cap A$ *dan* $A \cup B = B \cup A$.
(c). $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *dan* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(d). $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *dan* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Bukti. Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

■

Sekarang akan disajikan *Hukum De Morgan* untuk tiga himpunan, formula yang lebih umum disajikan di dalam latihan.

Teorema 1.1.9 *Jika A, B, C adalah sebarang himpunan, maka*

(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

(b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Bukti. Kita hanya akan menunjukkan pembuktian sifat a), sedangkan pembuktian sifat b) diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen dari $A\setminus(B\cup C)$ termuat di dalam himpunan $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$, dan sebaliknya.

Jika x di dalam $A \setminus (B \cup C)$ maka x di dalam A tetapi x tidak di $B \cup C$. Akibatnya x di A tetapi x tidak di B dan tidak di C. Berarti $x \in A\setminus B$ dan $x \in A\setminus C$. Jadi $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Sebaliknya, jika $x \in (A\setminus B) \cap (A\setminus C)$, maka $x \in A\setminus B$ dan $x \in A\setminus C$. Jadi $x \in A$ dan $x \notin A$ dan $x \notin B$. Ini berarti $x \in A$ dan $x \notin A\cup B$, sehingga $x \in A\setminus(B\cup C)$.

Karena himpunan $A\setminus(B\cup C)$ dan $(A\setminus B) \cap (A\setminus C)$ memuat elemen yang sama maka dapat disimpulkan bahwa $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B) \cap (A\setminus C)$.

■

Definisi 1.1.10 Jika A dan B dua himpunan tidak kosong, maka **hasil kali Cartesius** dari A dan B, dinotasikan dengan $A\times B$, adalah himpunan semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

Teladan 1.1.11 **(a)** Misalkan $A = \{1, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 4\}$. Maka himpunan $A \times B$ adalah

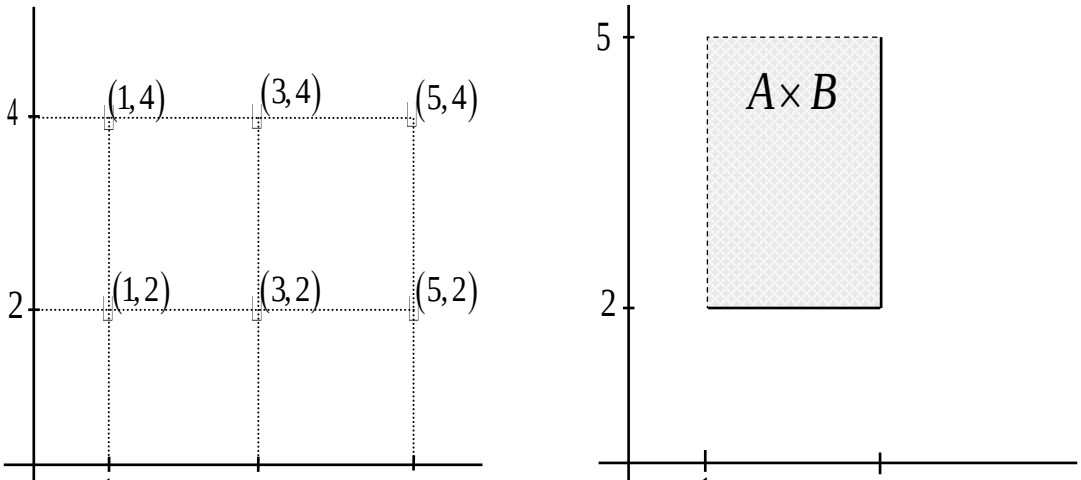
$$A \times B = \{(1,2),\ (1,4),\ (3,2),\ (3,4),\ (5,2),\ (5,4)\}.$$

Lihat Gambar 1.1.5

(b) Misalkan $A = \{x \in R : 1 < x \leq 3\}$ dan $B = \{y \in R : 2 \leq y < 5\}$. Maka himpunan $A \times B$ adalah

$$A \times B = \{(x, y) : 1 < x \leq 3 \text{ dan } 2 \leq y < 5\}.$$

Lihat Gambar 1.1.6



Gambar 1.1.5 **Gambar 1.1.6**

Latihan 1.1

1. Buktikan Teorema 1.1.8.
2. Buktikan bahwa $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A \cap B = A$.
3. Buktikan Teorema 1.1.9. b).
4. Jika $A \subseteq B$, tunjukkan bahwa $A = B \backslash (B \backslash A)$.
5. Tunjukkan bahwa $\varnothing \subseteq A$, untuk sebarang himpunan A.
6. Diberikan sebarang himpunan A dan B, tunjukkan bahwa himpunan $A \cap B$ dan $A \backslash B$ adalah saling asing dan tunjukkan $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$
7. Jika A dan B sebarang himpunan, tunjukkan bahwa $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$.
8. Jika $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ merupakan koleksi himpunan dan E sebarang himpunan, tunjukkan bahwa

$$E \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i) \text{ dan } E \cup \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cup A_i)$$

9. Jika $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ merupakan koleksi himpunan dan E sebarang himpunan, tunjukkan bahwa

$$E \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (E \cap A_i) \text{ dan } E \cup \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (E \cup A_i)$$

10. Jika A sebarang himpunan, B_1 dan B_2 subset dari B dengan $B = B_1 \cup B_2$, maka tunjukkan bahwa

$$A \times B = (A \times B_1) \cup (A \times B_2).$$

1.2 Fungsi

Sejak akhir abd ke-17, konsep fungsi telah dipelajari oleh seorang matematikawan bernama Gottfried Wilhelm Von Leibniz, namun definisi fungsi yang kita kenal sekarang berakar pada rumusan Leonhard Euler pada tahun 1979, yang kemudian disempurnakan oleh Joseph Fourier pada tahun 1822 dan Lejeune Dirichlet pada tahun 1837. Sekarang akan didiskusikan notasi fundamental dari fungsi atau pemetaan. Dalam hal ini fungsi akan dipandang sebagai suatu jenis khusus dari suatu himpunan.

Definisi 1.2.1 Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan. **Fungsi dari A ke B** adalah himpunan f beranggotakan pasangan terurut di dalam $A \times B$ dengan sifat

jika (a, b) dan (a, c) elemen-elemen di f, maka $b = c$. Dengan kata lain, setiap $a \in A$ terdapat dengan tunggal $b \in B$ sehingga $(a,b) \in f$. Fungsi dari A ke B, kadang disebut juga **pemetaan** dari A ke B atau f **memetakan** A ke dalam B. Dinotasikan dengan $f : A \to B$.

Jika (a, b) elemen dari fungsi f, maka sering dituliskan $b=f(a)$ atau $(a, b) \in f$. Fungsi f dapat ditulis sebagai

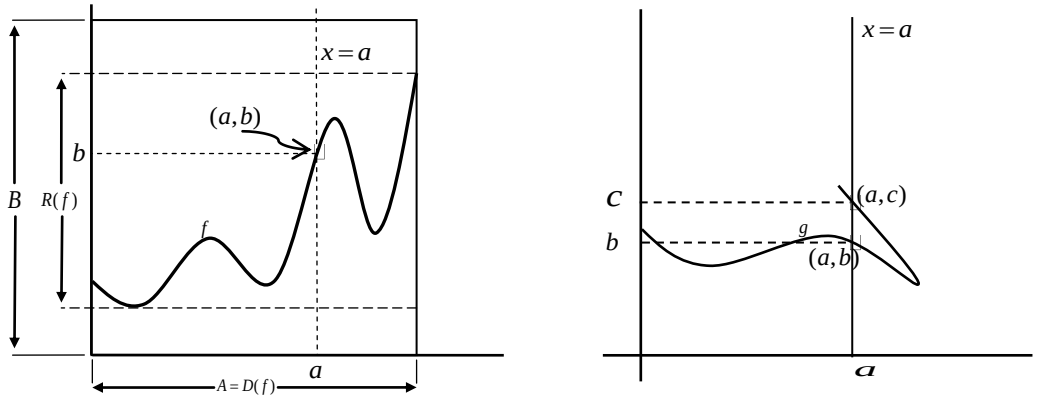
$$f = \{(a, f(a)) : \forall a \in A \exists! b \in B \ni b = f(a)\}$$

Elemen y di B yang terkait dengan x di A disebut **Peta** dari x (di bawah f) dan ditulis $y = f(x)$. Secara eksplisit, fungsi f sering dinyatakan sebagai $y = f(x)$. Jika f suatu fungsi dari A ke B dan $S \subseteq A$, maka kita katakan f terdefinisi pada S. Dalam hal ini, himpunan terbesar dimana f terdefinisi adalah A. Himpunan semua elemen dari A yang merupakan komponen pertama dari anggota f dikatakan **domain (daerah asal) dari *f*** dan dinotasikan dengan $D(f)$. Himpunan semua elemen dari B yang merupakan komponen kedua dari elemen f dikatakan **range (daerah hasil) dari *f*** atau **himpunan nilai dari *f*** dan dinotasikan dengan $R(f)$. Ditulis

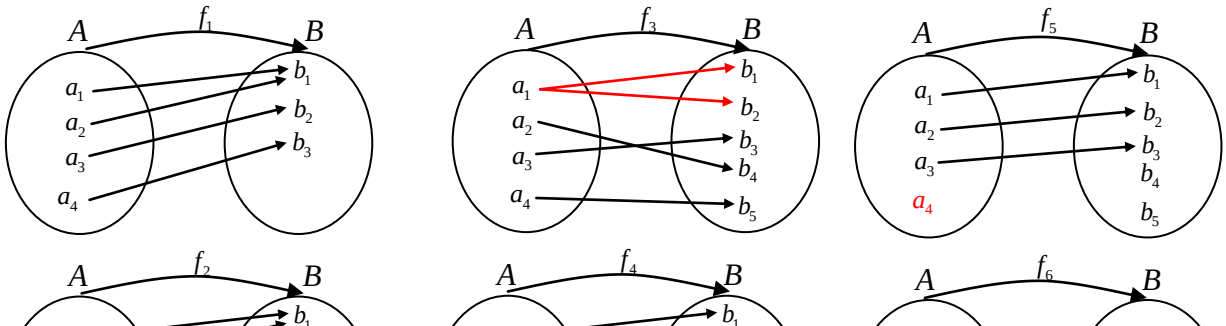
$$R(f) = \{b \in B : b = f(a) \text{ untuk suatu } a \in A\}$$

Perlu diperhatikan bahwa meskipun $D(f)=A$, tapi $R(f) \subseteq B$. Pada buku ini, kita membatasi pembahasan fungsi dari $A \subseteq R$ ke $B \subseteq R$, yaitu fungsi dengan peubah real dan bernilai real.

Secara geometri, setiap garis vertikal $x = a$ dengan $a \in A$ memotong grafik fungsi f hanya di satu titik. Jadi, jika terdapat garis vertikal $x = a$ untuk suatu $a \in A$ yang memotong suatu grafik g lebih dari satu titik, maka grafik tersebut bukan grafik suatu fungsi.



Gambar 1.2.1 Fungsi sebagai grafik



Gambar 1.2.2 Fungsi sebagai diagram

Pada gambar 1.2.2 diatas, f_1, f_2, f_4 dan f_6 merupakan fungsi, sedangkan f_3 dan f_5 bukan fungsi.

Teladan 1.2.2 (a) Misalkan $A = \{2,3,5\}$ dan $B = \{0,1,4,6,9,16,25\}$. Didefinisikan $f : A \to B$ dengan $f(x) = x^2$ untuk setiap $x \in A$.

Maka

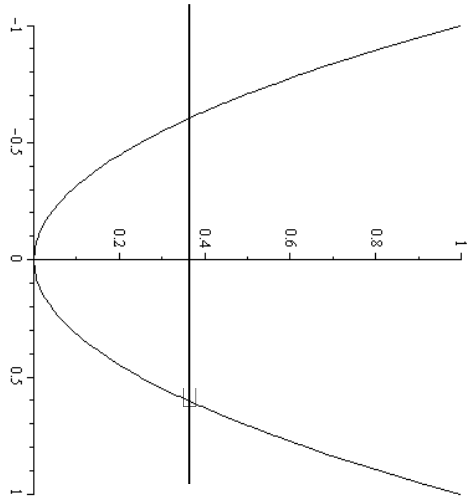
$$2 \mapsto f(2) = 4$$
$$3 \mapsto f(3) = 9$$
$$5 \mapsto f(5) = 25$$

Dapat ditulis sebagai

$$f = \{(2, f(2)), (3, f(3), (5, f(5))\}$$
$$= \{(2,4), (3,9), (5,25)\}$$

Karena untuk setiap (a, b) dan (a, c) di f, berlaku $b = c$ maka f adalah suatu fungsi dari A ke B.

(b) Himpunan $S = \{(x, y) : y^2 = x\}$ tidak mendefinisikan fungsi dari $[0, \infty)$ ke R. Untuk setiap $x > 0$ terdapat dua nilai $y \in R$, yaitu $y = \pm\sqrt{x}$ yang memenuhi aturan $y^2 = x$. Dari Gambar 1.2.3, kita amati bahwa setiap garis vertikal yang memotong sombu X positif juga memotong grafik di dua titik.



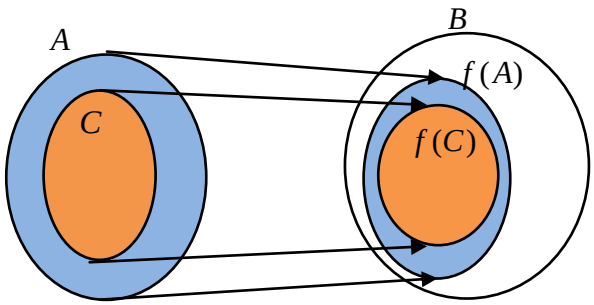
Gambar 1.2.3 Bukan grafik fungsi

(c) Himpunan $\{(x, y): y^2 = x,\ y \geq 0\}$ mendefinisikan suatu fungsi dari $[0, \infty)$ ke R. Untuk setiap $x > 0$ terdapat tepat satu nilai $y \in R$, yaitu $y = \sqrt{x}$ yang memenuhi aturan $y^2 = x$. Jadi, $f : [0, \infty) \to R$ dengan $f(x) = \sqrt{x}$ untuk setiap $x \in [0, \infty)$.

Definisi 1.2.3 Misalkan $f : A \to B$ suatu fungsi dengan $D(f) = A$ dan $R(f) \subseteq B$. Jika $C \subseteq A$ maka **bayangan langsung** dari C oleh f adalah himpunan

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}.$$

Kadang disebut juga **peta** (bayangan) C dibawah fungsi f.

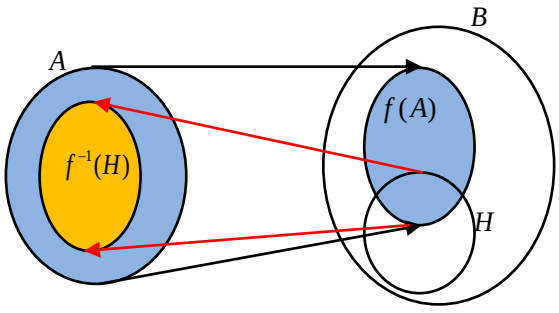


Gambar 1.2.4

Jika $H \subseteq B$ maka **bayangan invers** dari H oleh f adalah

$$f^{-1}(H) = \{x \in A : f(x) \in H\}.$$

Kadang disebut juga **prapeta** (bayangan invers) elemen-elemen di H terhadap fungsi f.



Ga**mbar 1.2.5** Bayangan invers dari *H* oleh *f*.

Teladan 1.2.4 Misalkan $A=\{-2,-1,1,2,3,5\}$ dan $B=\{0,1,4,6,9,16,25\}$. Didefinisikan fungsi $f:A\to B$ dengan $f(x)=x^2$ untuk setiap $x\in A$.

Jika $C=\{-2,1,2,5\}$dan $H=\{0,1,4,6,9\}$ maka bayangan langsung dari C oleh f adalah

$$f(C)=\{f(x):x\in C\}=\{1,4,25\}$$

dan prapeta (bayangan invers) elemen-elemen di H terhadap fungsi f adalah

$$f^{-1}(H)=\{x\in A:\ f(x)\in H\}=\{-2,-1,1,2,3\}.$$

Dalam menghitung komposisi fungsi, biasanya pelajar hanya sekedar menghitung komposisinya saja, tanpa memperhatikan syarat yang harus dipenuhi. Malahan bisa jadi fungsi yang dihasilkan sebenarnya tidak mempunyai makna apapun. Maka sebelum membahas komposisi fungsi terlebih dahulu ada baiknya pembaca mencoba menghitung komposisi fungsi berikut. Misalkan

$$f(x)=\ x^2+10 \text{ dan } g(x)=\ \sqrt{9-x}.$$

Cobalah hitung *fog* dan *gof*. Diskusilah dengan teman anda tentang hasil yang anda peroleh. Setelah anda mendapatkan sesuatu yang aneh, maka pahamilah konsep berikut ini.

Definisi 1.2.5 Misalkan *f* adalah fungsi dengan domain *D*(*f*)=*A* dan range *R*(*f*) di dalam *B* dan *g* adalah fungsi dengan domain *D*(*g*)=*C* dan range *R*(*g*) di dalam *D*. **Komposisi** *gof* adalah fungsi dari *D*(*gof*) ke *D* yang didefinisikan dengan

$gof := \{(a, d) \in A\times D$: terdapat $b\in R(f)\cap D(g)$ sehingga $(a, b)\in f$ dan $(b, d)\in g\}$

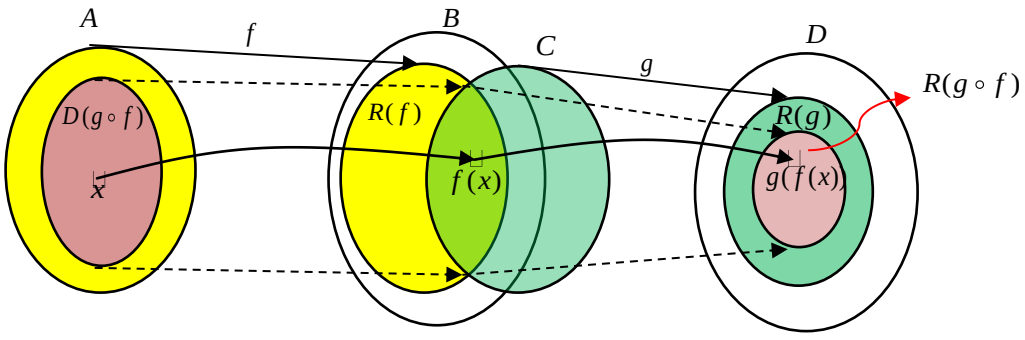
Perhatikan bahwa jika *f* dan *g* merupakan fungsi dan jika $x\in D(f)$, dengan $f(x)$ merupakan elemen dari $D(g)$, maka domain dari fungsi komposisi *gof* adalah himpunan

$$D(gof) := \{x\in D(f) : f(x) \in D(g)\}.$$

Ini berarti bahwa syarat agar fungsi komposisi *gof* terdefinisi haruslah $R(f)\cap D(g)\neq\varnothing$.

Untuk elemen *x* di dalam *D*(*gof*), nilai *gof* di *x* diberikan dengan $(gof)(x) := g(f(x))$. Ini berarti range dari *gof* adalah himpunan

$$R(gof) := \{g(f(x)) : x\in D(gof)\}.$$



Gambar 1.2.6 Fungsi komposisi *gof*

Teladan 1.2.6 (a). Misalkan *f* dan *g* adalah fungsi-fungsi yang nilainya di bilangan real *x* didefinisikan sebagai

$$f(x) := 2x \quad \text{dan} \quad g(x) := 3x^2 - 1.$$

Ditunjukkan fungsi komposisi *gof* dan *fog* terdefinisi tapi $gof \neq fog$.

Karena $D(g)=R$ dan $R(f) = D(g)$, maka *gof* terdefinisi dengan domain $D(gof)$ juga *R* dan

$$gof(x) = g(f(x))=g(2x)=3(2x)^2 - 1 = 12x^2 - 1.$$

Sebaliknya, $D(f)=R$ dan $R(g)\cap D(f)=[-1,\infty)\neq\varnothing$ maka *fog* terdefinisi dengan domain $D(fog) =R$, tetapi

$$fog(x) = f(g(x))=f(3x^2 - 1)= 2(3x^2 - 1) = 6x^2 - 2.$$

Oleh karena itu, $gof \neq fog$.

(b). Misalkan *f* dan *g* adalah fungsi-fungsi dengan domain $D(f) := \{x\in R : x\geq 0\}$ dan $D(g) := R$, sedemikian hingga nilai dari *f* dan *g* di titik *x* dalam domainnya adalah

$$f(x) := \sqrt{x} \quad \text{dan} \quad g(x) := -x^2 - 1.$$

Ditunjukkan fungsi komposisi *gof* terdefinisi tapi *fog* tidak terdefinisi.

Mudah dipahami bahwa $R(f) \subseteq D(g)$. Diperoleh $D(gof) = \{x \in R : x\geq 0\}$ dan

$$gof(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = -(\sqrt{x})^2 - 1 = -x - 1.$$

Tapi, di sisi lain, karena $g(x) < -1$ untuk semua $x\in D(g)$ dan $D(f) = \{x \in R : x\geq 0\}$, maka $R(g)\cap D(f)=\varnothing$ sehingga fungsi *fog* tidak terdefinisi di sebarang titik.

(c). Misalkan *f* dan *g* adalah fungsi-fungsi yang nilainya di bilangan real *x* didefinisikan sebagai

$$f(x) := \sqrt{4-x}+1 \quad \text{dan} \quad g(x) := \sqrt{-x^2+9}+5$$

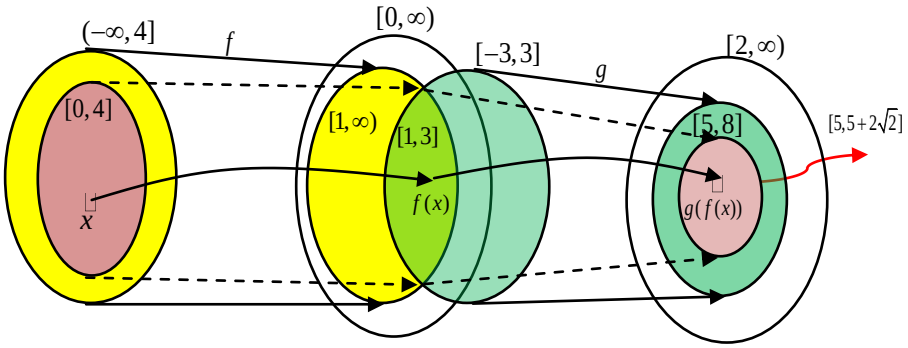
Ditunjukkan fungsi komposisi *gof* terdefinisi tapi *fog* tidak terdefinisi.

Mudah dipahami bahwa $D(f)=(-\infty,4]$, $R(f)=[1,\infty)$, $D(g)=[-3,3]$ dan $R(g)=[5,8]$.

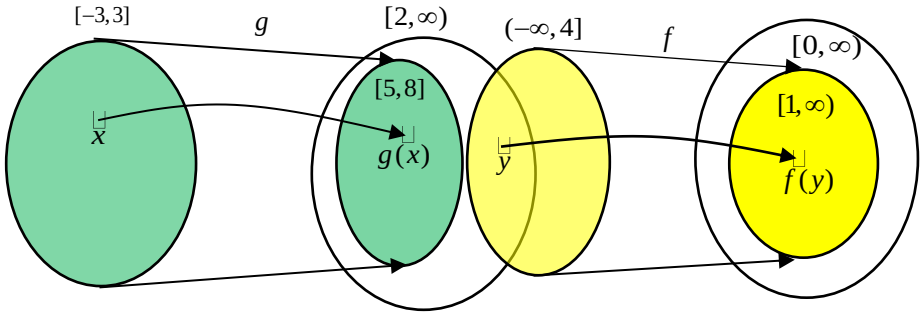
Karena $R(f)\cap D(g)=[1,3]\neq\varnothing$, maka $g\circ f$ terdefinisi. Diperoleh

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{4-x}+1) \\ &= \sqrt{-(\sqrt{4-x}+1)^2+9}+5 \\ &= \sqrt{4+x-2\sqrt{4-x}}+5 \end{aligned}$$

dengan $D(g \circ f) = [0,4]$ dan $R(g \circ f) = [5,5+2\sqrt{2}]$. Di sisi lain, $R(g) \cap D(f) = \varnothing$, sehingga $f \circ g$ tidak terdefinisi.



Gambar 1.2.7



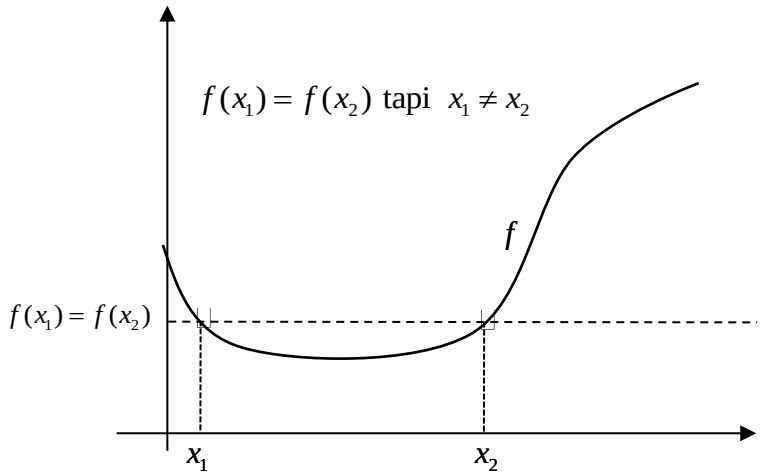
Gambar 1.2.8

Definisi 1.2.7 Misalkan *f* adalah fungsi dari *A* ke *B*. Fungsi *f* dikatakan **satu-satu atau injektif** jika (*a*, *b*) dan (*c*,*b*) ∈*f*, maka *a* = *c*. Dengan kata lain, untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dengan $f(x_1) = f(x_2)$ berlaku $x_1 = x_2$.

Teladan 1.2.8 a). Fungsi $f : Z \to \Re$ dengan $f(x) = 2x$ untuk $\forall x \in Z$ merupakan fungsi injektif karena untuk setiap $x_1, x_2 \in Z$ dengan $f(x_1) = f(x_2)$ berlaku $x_1 = x_2$.

b). Fungsi $f : Z \to \Re$ dengan $f(x) = x^2$ untuk $\forall x \in Z$ bukan fungsi injektif karena terdapat $x_1, x_2 \in Z$ dengan $f(x_1) = f(x_2)$ tapi $x_1 \neq x_2$, yaitu terdapat $-3, 3 \in Z$ dengan $f(-3) = f(3) = 9$ tapi $-3 \neq 3$.

Dengan kata lain, f injektif jika dan hanya jika $f(a) = f(c)$ mengakibatkan $a = c$. Juga dapat dikatakan, f injektif jika dan hanya jika a, c di dalam $D(f)$ dengan $a \neq c$, maka $f(a) \neq f(c)$.
Secara geometri, setiap garis horizontal $y = k$ dimana $y = f(a)$, $\in A$ memotong grafik lebih dari satu titik.



Gambar 1.2.9 Grafik fungsi Injektif.

Perhatikan kembali Contoh 1.2.4. Fungsi $f : A \to B$ dengan $f(x) = x^2$ untuk setiap $x \in A$ dimana $A = \{-2, -1, 1, 2, 3, 5\}$ dan $B = \{0, 1, 4, 6, 9, 16, 25\}$ memiliki prapeta (bayangan invers) elemen-elemen di $H = \{0, 1, 4, 6, 9\}$ terhadap fungsi f yaitu

$$f^{-1}(H) = \{-2, -1, 1, 2, 3\} \subset A.$$

Maka jelas bahwa prapeta dari suatu himpunan bukanlah suatu fungsi.

Misalkan fungsi $f : A \to B.$ Maka dapat didefinisikan **invers dari fungsi *f*** sebagai

$$g = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}.$$

Dengan definisi tersebut, dapat dipastikan bahwa invers dari fungsi *f* , yaitu g belum tentu merupakan suatu fungsi. Sebagai contoh, pada Contoh 1.2.4, diperoleh

$$f = \{(-2, 4), (-1, 1), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (5, 25)\}$$

dan invers dari fungsi *f* adalah

$$g = \{(4, 2), (4, -2), (1, -1), (1, 1), (9, 3), (25, 5)\}.$$

Jelas g bukan fungsi karena $(4, 2), (4, -2) \in g$ tapi $2 \neq -2.$

Jika g merupakan suatu fungsi, maka *g* sebagai invers dari fungsi *f* disebut **fungsi invers** dari ***f*.** Selanjutnya, dinotasikan $g = f^{-1}$ (dalam konteks ini, simbol f^{-1} bukan lagi diartikan sebagai simbol prapeta). Berikut diberikan syarat cukup agar invers suatu fungsi merupakan fungsi.

Teorema 1.2.9 Jika *f* adalah fungsi satu-satu dari *A* ke *B* maka $g := \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}$ adalah fungsi satu-satu dengan domain $D(g) = R(f)$ di dalam *B* dan range $R(g) = D(f) = A$ dan fungsi *g* adalah **fungsi invers dari *f*** .

Bukti. Dari definisi fungsi injektif *f*, jelas g suatu fungsi yang juga injektif (silahkan buktikan sebagi latihan)

■

Jika *f* injektif, maka *f* akan memetakan elemen-elemen yang berbeda di dalam *D*(*f*) ke elemen-elemen yang berbeda di dalam *R*(*f*). Jadi, setiap elemen *b* di dalam *R*(*f*) merupakan peta dari elemen tunggal *a* di dalam *D*(*f*). Fungsi invers f^{-1} memetakan elemen *b* ke elemen tunggal *a*.

Teladan 1.2.10 Fungsi $g(x)=\frac{x}{2}$ untuk $\forall x \in 2Z$ merupakan invers dari fungsi *f* pada Teladan 1.2.8 a). Sedangkan fungsi pada Teladan 1.2.8 b) tidak punya fungsi invers .

Definisi 1.2.11 Misalkan fungsi f adalah fungsi dari *A* ke *B*. Fungsi *f* dikatakan **pada (surjektif atau onto)** jika *R*(*f*) = *B*. Dengan kata lain, untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sehingga $y = f(x)$.

Teladan 1.2.12 Fungsi $f : R \to [0,\infty)$ dengan $f(x) = x^2$ untuk $\forall x \in R$ merupakan fungsi surjektif karena untuk $\forall y \in [0,\infty)$ terdapat $x = \sqrt{y} \in R$ sehingga $f(x) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y.$

Di dalam mendefinisikan fungsi surjektif, perlu memperhatikan domain dari fungsi, karena terdapat suatu fungsi yang surjektif dalam suatu domain tertentu, tetapi tidak surjektif pada domain yang lain. Sebagai teladan, pada Teladan 1.2.11 diatas, jika $D(f) = Z$ maka fungsi f tidak lagi surjektif karena terdapat $2 \in [0,\infty)$ tapi tidak ada $x \in Z$ sehingga $f(x) = x^2 = 2.$

Definisi 1.2.13 Fungsi *f* adalah fungsi dengan domain *A* dan range *R*(*f*) $\subseteq$ B. Fungsi *f* dikatakan **bijektif** jika *f* satu-satu (injektif) dan *f* pada (surjektif).

Teladan 1.2.14 : Fungsi $g : R \to R$ dengan $g(x) = 2x + 1$ untuk $\forall x \in R$ untuk merupakan fungsi bijektif.

Bukti. Fungsi *g* injektif karena untuk setiap $x_1, x_2 \in R$ dengan $g(x_1) = g(x_2)$ berlaku $x_1 = x_2$. Di sisi lain,

Fungsi *g* juga surjektif karena untuk setiap $y \in R$ terdapat $x = \frac{y-1}{2} \in R$ sehingga $f(x) = 2(\frac{y-1}{2}) + 1 = y.$

Definisi 1.2.15 Misalkan $f : A \to B$ suatu fungsi dan $C \subset A$. Didefinisikan fungsi $f_C : C \to B$ dengan

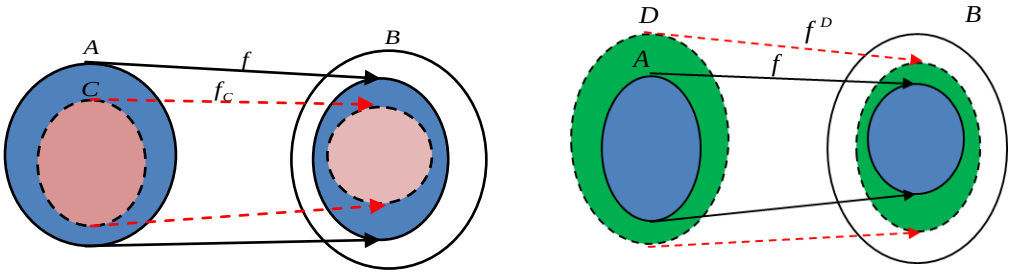
$$f_C(x) = f(x) \text{ untuk setiap } x \in C.$$

Fungsi f_C disebut **pembatasan (restriksi) dari** f pada C.

Jika $D \supset A$ dan didefinisikan fungsi $f^D : D \to B$ dengan

$$f^D(x) = f(x) \text{ untuk setiap } x \in D.$$

Fungsi f^D disebut **perluasan (ekstensi) dari** f pada D.



Gambar 1.2.10

Teorema 1.2.16 *Misalkan* $f : A \to B$ *adalah fungsi injektif. Maka terdapat fungsi* $g : B \to A$ *yang surjektif.*

Bukti. Misalkan *t* suatu elemen di *A*. Didefinisikan $g : B \to A$ dengan

$$g(b) := \begin{cases} a & \text{jika } b = f(a) \\ t & \text{jika } b \notin R(f), b \in B \end{cases}$$

Maka dari definisi injektif pada *f*, jelas *g* suatu fungsi yang surjektif.

■

Teorema 1.2.17 *Misalkan* $f : A \to B$ *adalah fungsi surjektif. Maka terdapat fungsi* $g : B \to A$ *yang injektif.*

Bukti. Diketahui terdapat pemetaan surjektif $f : A \to B$. Maka untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sehingga $f(a) = b$. Dibentuk himpunan $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$. Karena $f^{-1}(b) \subseteq A$, untuk masing-masing $b \in B$, pilih tepat satu elemen x di $f^{-1}(b)$ sehingga $b = f(x)$. Didefinisikan $g : B \to A$ dengan $g(b) = x$. Diambil sebarang $b_1, b_2 \in B$ dengan $g(b_1) = g(b_2)$. Ditunjukkan $b_1 = b_2$. Karena $b_1, b_2 \in B$ maka $g(b_1) = r$ dan $g(b_2) = t$ dengan $r \in f^{-1}(b_1)$ dan $t \in f^{-1}(b_2)$. Karena $g(b_1) = g(b_2)$, maka

$r = t$. Akibatnya, karena f suatu fungsi, maka $b_1 = f(r) = f(t) = b_2$.

■

Definisi 1.2.18 Misalkan fungsi $f : A \to B$. Fungsi $f^{-1} : B \to A$ disebut **invers kiri** dari *f* jika

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ untuk setiap } x \in A.$$

Fungsi $f^{-1} : B \to A$ disebut **invers kanan** dari *f* jika

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \text{ untuk setiap } y \in B.$$

Teladan 1.2.19 (a) Misalkan $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, \frac{1}{2}, \pi\}$, $B = \{5, 2, 1, \frac{5}{4}, \pi^2 + 1\}$ dan $f : A \to B$ dengan

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ untuk setiap } x \in A.$$

Fungsi $g : B \to A$ dengan definisi $g(x) = \sqrt{x-1}$ untuk setiap $x \in B$ merupakan invers kanan dari f tapi bukan invers kiri dari *f*.

Amati bahwa

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 2$$
$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(2) = 5$$
$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = 1$$
$$(f \circ g)(\tfrac{5}{4}) = f(g(\tfrac{5}{4})) = f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{5}{4}$$
$$(f \circ g)(\pi^2 + 1) = f(g(\pi^2 + 1)) = f(\pi) = \pi^2 + 1.$$

Jadi, $(f \circ g)(y) = y$ untuk setiap $y \in B$, sehingga g adalah invers kanan dari *f*. Disisi lain, g bukan invers kiri dari f karena terdapat $-2 \in A$ dengan kondisi

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(5) = 2.$$

(b) Misalkan $A = \{0, 1, 9, \frac{1}{4}, \pi\}$, $B = \{0, 1, 3, \frac{1}{2}, \sqrt{\pi}, -1\}$ dan $f : A \to B$ dengan

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ untuk setiap } x \in A.$$

Fungsi $g : B \to A$ dengan $g(x) = x^2$ untuk setiap $x \in B$ merupakan invers kiri dari f tapi bukan invers kanan dari *f*.

Amati bahwa

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = 0$$
$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1) = 1$$
$$(g \circ f)(9) = g(f(9)) = g(3) = 9$$
$$(g \circ f)(\tfrac{1}{4}) = g(f(\tfrac{1}{4})) = g(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}$$
$$(g \circ f)(\pi) = g(f(\pi)) = g(\sqrt{\pi}) = \pi$$

Jadi, $(g \circ f)(x) = x$ untuk setiap $x \in A$, sehingga g adalah invers kiri dari *f*. Disisi lain, g bukan invers kanan dari f karena terdapat $-1 \in B$ dengan kondisi

$$(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(1) = 1.$$

(c) Fungsi $g : R \to R$ dengan $g(x) = x^3$ untuk setiap $x \in R$ merupakan invers kiri sekaligus invers kanan dari fungsi $f : R \to R$ dengan $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ untuk setiap $x \in R$, karena

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^{\frac{1}{3}} = x$ untuk setiap $x \in R$

dan

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{3}}) = (x^{\frac{1}{3}})^3 = x$ untuk setiap $x \in R$.

Fungsi yang mempunyai domain himpunan bilangan asli mempunyai peranan khusus di dalam analisis real. Untuk fungsi demikian, kita mempunyai istilah khusus, yang dikenalkan sebagai **Barisan pada himpunan *S*** yaitu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan asli dan yang rangenya termuat pada himpunan *S*.

Untuk barisan *X*: $N \to S$, nilai X di titik n sering dinotasikan dengan x_n atau $X(n)$. Barisannya dinotasikan dengan $(x_n : n \in N)$ atau (x_n). Ini penting untuk membedakan barisan (x_n) dengan rangenya $\{x_n\}$. Pembahasan secara detail untuk barisan akan disampaikan di dalam Bab III.

Latihan 1.2

1. Gambar grafik himpunan semua titik (x,y) sedemikian sehingga

$$y = \begin{cases} 1 & \text{Jika } x \geq 3 \\ 2 & \text{Jika } x < 3 \end{cases}$$

Jelaskan mengapa grafik tersebut merupakan grafik suatu fungsi dari *R* ke *R*. Tentukan daerah nilainya dan tentukan peta dari $[3,4]$ di bawah fungsi tersebut.

2. Misalkan $A := B := R$ dan perhatikan subset $C := \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ dari $A \times B$.

Apakah *C* merupakan fungsi dengan domain $[-1,1]$ dan range $[-1,1]$?

3. Misalkan $A := B := R$ dan perhatikan subset $D := \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ dari $A \times B$.

Apakah *D* merupakan fungsi dengan domain $[-1,1]$ dan range $[0,1]$? Jelaskan

4. Berikan teladan dua fungsi *f* dan *g* pada *R* ke *R* sedemikian hingga $f \neq g$ tetapi $f \circ g = g \circ f$.

5. Buktikan bahwa jika f merupakan fungsi injektif dari A ke B, maka $f^{-1} := \{(b,a) : (a,b) \in f\}$ juga merupakan fungsi injektif.
6. Misalkan f fungsi injektif. Tunjukkan bahwa $f^{-1}of(x) = x$ untuk semua x di $D(f)$ dan $fof^{-1}(y) = y$ untuk semua y di $R(f)$.
7. Misalkan f dan g fungsi-fungsi sedemikian hingga $gof(x) = x$ untuk semua x di $D(f)$ dan $fog(y) = y$ untuk semua y di $D(g)$. Buktikan $g = f^{-1}$.
8. Tunjukkan bahwa jika $f : A \to B$ dan E, F subset-subset dari A, maka $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$ dan $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$.
9. Tunjukkan bahwa jika $f : A \to B$ dan G, H subset-subset dari B, maka $f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$ dan $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$.
10. Untuk $a, b \in R$ dengan $a<b$, tentukan fungsi bijektif dari $A := \{x : a<x<b\}$ pada $B := \{y : 0 <y< 1\}$.
11. Tunjukkan bahwa jika $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ dan H subset dari C, maka $(gof)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H))$.
12. Misalkan f dan g adalah fungsi dan misalkan $(gof)(x) = x$ untuk semua x di dalam $D(f)$. Tunjukkan bahwa f injektif dan bahwa $R(f) \subseteq D(g)$ dan $D(f) \subseteq R(g)$.
13. Buktikan jika $g: A \to B$ dan $h : B \to C$ keduanya bijektif, maka $h \circ g : A \to C$ juga bijektif.
14. Misalkan $g: A \to B$ dan $h : B \to C$ suatu fungsi.
    (a) Tunjukkan jika $h \circ g$ injektif maka g juga injektif
    (b) Tunjukkan jika $h \circ g$ surjektif maka h juga surjektif

1.3 Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan metode pembuktian yang penting dan akan sering digunakan di dalam buku ini. Metode ini digunakan untuk membuktikan kevalidan suatu pernyataan yang berlaku untuk semua bilangan asli N.

Teorema 1.3.1 (Sifat Terurut Baik dari *N*) *Setiap subset tak kosong dari N mempunyai elemen terkecil.*

Pernyataan yang lebih detail dari sifat ini adalah sebagai berikut: Jika S adalah subset dari N dan $S \neq \emptyset$, maka terdapat elemen $m \in S$ sedemikian hingga $m \leq k$ untuk semua $k \in S$. Adapun pembuktian teorema 1.3.1 diberikan pada bab 2 dari buku ini.

Teorema 1.3.2 (Prinsip Induksi Matematika) *Jika S adalah subset dari N yang memiliki sifat-sifat:*
(1). $1 \in S$
(2). *Jika* $k \in S$, *maka* $k + 1 \in S$
maka $S = N$.

Bukti. Jika diandaikan $S \neq N$, maka himpunan $N \backslash S$ tidak kosong, dan selanjutnya dengan Teorema 1.3.1, $N \backslash S$ memuat elemen terkecil. Misalkan m adalah elemen terkecil dari $N \backslash S$. Berdasarkan hipotesis (1), $1 \in S$, maka $m \neq 1$. Selanjutnya $m > 1$, sehingga $m - 1$ juga bilangan asli. Karena $m - 1 < m$ dan karena m elemen terkecil dari N sedemikian hingga $m \notin S$, maka $m - 1$ di dalam S.

Sekarang, berdasarkan hipotesis (2) untuk elemen $k = m - 1$ di dalam S, disimpulkan bahwa $k + 1 = (m - 1) + 1 = m$ di dalam S. Kesimpulan ini kontradiksi dengan m bukan elemen di S. Ini berarti pengandaian adalah salah. Yang benar $S = N$. ■

Prinsip induksi matematika juga sering dinyatakan dengan rumusan sebagai berikut:

> Untuk setiap $n \in N$, misalkan $P(n)$ pernyataan yang bergantung pada n. Jika
> (1') $P(1)$ benar
> (2') Jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar,
> maka $P(n)$ benar untuk semua $n \in N$.

Hubungan dengan versi sebelumnya dibuat dengan memisalkan

$$S := \{n \in N : P(n) \text{ benar}\}.$$

Teladan-teladan berikut memberikan gambaran bagaimana Prinsip Induksi Matematika digunakan untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang bergantung pada bilangan asli.

Teladan 1.3.3 (a) Untuk setiap $n \in N$, jumlah n bilangan asli pertama diberikan dengan

$$= 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Untuk membuktikan ini misalkan S adalah himpunan semua $n \in N$ sehingga formula di atas berlaku. Kita harus membuktikan syarat (1) dan (2) di dalam Teorema 1.3.2 dipenuhi. Jika $n = 1$, maka diperoleh $1 = ½ . 1. (1 + 1)$, sehingga $1 \in S$. Jadi syarat (1) di dalam Teorema 1.3.2 dipenuhi. Selanjutnya diasumsikan bahwa $k \in S$ dan ditunjukkan $(k+1) \in S$. Jika $k \in S$, maka berlaku

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2} k(k+1)$$

Jika kedua sisi ditambah dengan $(k + 1)$, maka diperoleh

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2).$$

Ini berarti $(k+1) \in S$. Akibatnya syarat (2) di dalam Teorema 1.3.2 dipenuhi. Selanjutnya dengan Prinsip Induksi Matematika, disimpulkan $S = N$ dan formula benar untuk semua $n \in N$.

(b) Untuk setiap $n \in N$, jumlah kuadrat n bilangan asli pertama diberikan dengan

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Untuk membuktikan ini misalkan S adalah himpunan semua $n \in N$ sehingga formula di atas berlaku. Kita harus membuktikan syarat (1) dan (2) di dalam Teorema 1.3.2 dipenuhi. Jika $n = 1$, maka diperoleh $1^2 = 1/6 .1.(1 + 1)(2 + 1)$, sehingga $1 \in S$. Jadi syarat (1) di dalam Teorema 1.3.2 dipenuhi. Selanjutnya diasumsikan bahwa $k \in S$ dan ditunjukkan $(k + 1) \in S$. Jika $k \in S$, maka berlaku

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1).$$

Jika kedua sisi ditambah dengan $(k + 1)$, maka diperoleh

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

Ini berarti $(k+1) \in S$. Akibatnya syarat (2) di dalam Teorema 1.3.2 dipenuhi. Selanjutnya dengan Prinsip Induksi Matematika, disimpulkan $S = N$ dan formula benar untuk semua $n \in N$.

(c). Ketaksamaan $2^n \leq (n+1)!$ dapat dibuktikan dengan Prinsip Induksi Matematika sebagai berikut. Untuk $n = 1$, diperoleh $2^1 = 2 \leq 2!$. Jadi pernyataan benar untuk $n = 1$. Selanjutnya diasumsikan pernyataan benar untuk $n = k$, berarti berlaku

$2^k \leq (k + 1)!$

dan ditunjukkan pernyataan benar untuk $n = k + 1$

$2^{k+1} = 2. 2^k \leq 2(k + 1)! \leq (k + 2)(k + 1)! = (k + 2)!$

Ini berarti pernyatan benar untuk $n = k + 1$. Dengan menggunakan Prinsip Induksi Matematika pertidaksamaan di atas benar untuk semua $n \in N$.

(d). Perhatikan pernyataan "$n + 5 = n$" untuk $n \in N$. Jika S merupakan himpunan semua bilangan asli yang pernyataan bernilai benar, maka assumsi $k \in S$ menyebabkan $(k + 1) \in S$. Ini berarti syarat (2) dari Teorema 1.3.2 dipenuhi. Tetapi karena pernyataan bernilai salah untuk $n = 1$, maka syarat (1) tidak dipenuhi. Jadi pernyataan di atas tidak benar.

(e). Jika $r \in R$, $r \neq 1$, dan $n \in N$, maka

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Bentuk ini merupakan formula untuk jumlah suku-suku dari deret geometri. Ini dapat dibuktikan dengan Prinsip Induksi Matematika.
Untuk $n = 1$, diperoleh $1 + \underline{r} = (1 - r^2)/(1 - r)$, sehingga formula benar untuk $n = 1$.
Diasumsikan pernyataan benar untuk $n = k$ sehingga berlaku

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^k = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$$

Selanjutnya ditunjukkan pernyataan benar untuk $n = k+1$, jika kedua ruas ditambah dengan suku r^{k+1} diperoleh

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^k + r^{k+1} = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} + r^{k+1} = \frac{1 - r^{k+2}}{1 - r}.$$

Jadi pernyataan benar untuk $n= k+1$. Ini berrati berdasarkan Prinsip Induksi Matematika dapat disimpulkan bahwa pernyataan benar untuk semua $n \in N$.

Sebetulnya pernyataan di atas dapat dibuktikan secara langsung tanpa harus menggunakan Prinsip Induksi Matematika. Di dalam berbagai buku sekolah menengahpun sudah dibuat. Jika dimisalkan $s_n := 1 + r + r^2 + ... + r^n$, maka $r.s_n = r + r^2 + ... + r^{n+1}$, sehingga

$(1 - r)s_n = s_n - rs_n = 1 - r^{n+1}$.

Jadi

$$s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Terdapat versi lain dari Prinsip Induksi Matematika yang juga sering digunakan untuk membuktikan pernyataan yang berlaku untuk setiap $n \in N$.

Teorema 1.3.4 (Prinsip Induksi Kuat) *Misalkan S adalah subset dari N sedemikian hingga $1 \in S$ dan jika $\{1, 2, 3, ..., k\} \subseteq S$ maka $k+1 \in S$. Maka $S = N$.*

Teladan 1.3.5 Misalkan barisan (x_n) didefinisikan sebagai berikut: $x_1 := 1$, $x_2 := 2$, dan $x_{n+2} := \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$ untuk $n \in N$. Dengan menggunakan Prinsip Induksi kuat akan ditunjukkan bahwa $1 \le x_n \le 2$ untuk semua $n \in N$. Untuk $n=1$, berlaku $1 \le x_1 \le 2$. Diasumsikan pernyataan benar untuk $n \in \{1, 2, ..., k\}$, selanjutnya ditunjukkan pernyataan benar untuk $n = k + 1$. Perhatikan bahwa

$$1 \le x_{k-1} \le 2$$

dan

$$1 \le x_k \le 2.$$

Akibatnya

$$2 \le (x_k + x_{k-1}) \le 4 \quad \text{atau} \quad 1 \le \tfrac{1}{2}(x_k + x_{k-1}) \le 2.$$

atau

$$1 \le x_{k+1} \le 2.$$

Dengan menggunakan Prinsip Induksi Kuat dapat disimpulkan bahwa pernyataan $1 \le x_n \le 2$ benar untuk semua $n \in N$.

Latihan 1.3

1. Buktikan bahwa $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, untuk semua $n\in N$.
2. Buktikan bahwa $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$, untuk semua $n\in N$.
3. Buktikan bahwa $1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}n(n+1)/2$, untuk semua $n\in N$.
4. Buktikan bahwa $n< 2^n$ untuk semua $n\in N$.
5. Buktikan bahwa 5^{2n}-1 terbagi oleh 8 untuk semua $n\in N$.
6. Buktikan bahwa $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ terbagi habis oleh 9, untuk semua $n\in N$.
7. Misalkan S adalah subset tak kosong dari himpunan N sedemikian hingga untuk suatu $n_o\in N$ berlaku (*a*) $n_o\in S$ dan (*b*) jika $k\geq n_o$ dan $k\in S$ maka $(k + 1) \in S$. Buktikan bahwa S memuat himpunan $\{n \in N : n\geq n_o\}$.
8. Buktikan bahwa $2^n<n!$ Untuk semua n ≥ 4, $n\in N$.
9. Buktikan bahwa $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, untuk semua $n\geq 2$, $n\in N$.
10. Misalkan barisan (x_n) didefinisikan sebagai berikut: $x_1 := 1$, $x_2 := 2$, dan $x_{n+2} := \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$ untuk $n\in N$. Dengan Prinsip Induksi Matematika, tunjukkan bahwa
$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}},\quad \text{untuk semua } n \in N.$$
11. Misalkan $x_1 > 1$, $x_{n+1} = 2 - 1/x_n$ untuk $\forall n \in N$. Buktikan $x_{n+1} > x_n$ untuk $\forall n \in N$.
12. Misalkan $x_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$, untuk $n \in N$. Buktikan $x_n < 1$ untuk $\forall n \in N$.
13. Misalkan $x_n = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ untuk semua $n \in N$. Buktikan bahwa $x_n < 2$ untuk $\forall n \in N$.
14. Buktikan bahwa $1\cdot 1!+ 2\cdot 2!+ 3\cdot 3!+\cdots+ n\cdot n! = (n+1)!-1$, untuk semua $n\in N$.
15. Buktikan bahwa $2 - 2\cdot 7 + 2\cdot 7^2 -\cdots+ 2\cdot(-7)^n = (1-(-7)^{n+1})/4$, untuk semua bilangan bulat tak negatif n.
16. Buktikan bahwa jika $A_1, A_2, ..., A_n$ dan $B_1, B_2, ..., B_n$ adalah himpunan-himpunan sehingga $A_i \subseteq B_i$ untuk $i = 1, 2, ..., n$, maka $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ dan $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} B_i$.

17. Buktikan bahwa jika $A_1, A_2, ..., A_n$ himpunan bagian dari himpunan semesta S maka $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

18. Tunjukkan bahwa jika $n \in N$ maka

$$\sum_{\{a_1, a_2, ..., a_k\} \subseteq \{1,2,...,n\}} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} = n.$$

19. Buktikan bahwa jika $x > -1$, maka $1 + nx \le (1+x)^n$ untuk semua bilangan bulat tak negatif *n*. Ketaksamaan ini disebut ketaksamaan Bernauli.

20. Bilangan Harmonik $H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{j}$ dimana $j = 1, 2, 3, ...$ Buktikan bahwa

$$H_{2^n} \ge 1 + \frac{n}{2}$$

untuk semua bilangan bulat tak negatif *n*.

21. Misalkan $a_1, a_2, ..., a_n$ bilangan-bilangan real positif. **Rata-rata aritmatika** yang didefinisikan sebagai $A = (a_1 + a_2 + ... + a_n)/n$ dan **rata-rata geometri** yang didefinisikan sebagai $B = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$. Buktikan bahwa $A \ge B$.

22. Buktikan dengan induksi matematika, bahwa *n* buah garis lurus pada sebuah bidang datar pasti membagi bidang tersebut menjadi $\frac{n^2+n+2}{2}$ daerah, dengan asumsi tidak ada dua garis lurus yang sejajar dan tidak ada tiga garis yang beririsan di satu titik.

1.4 Himpunan Hingga dan Takhingga.

Ketika kita menghitung semua elemen dalam suatu himpunan *A* satu persatu, kita mengatakan " satu, dua, tiga, dan seterusnya sampai kita berhenti apabila semua elemen di *A* selesai dihitung. Maka dari perspektif matematik, sebenarnya kita telah mendefinisikan fungsi bijektif dari suatu himpunan bagian dari bilangan asli *N* ke suatu himpunan *A* tersebut. Dalam hal ini, kita sebut himpunan *A* sebagai himpunan hingga. Jika proses perhitungan elemen pada himpunan *A* tidak berakhir, maka terdapat fungsi bijektif dari himpunan bilangan asli *N* ke himpunan *A*. Dalam hal ini, himpunan *A* kita sebut himpunan tak hingga.

Berikut diberikan definisi formalnya.

Definisi 1.4.1 (a) Himpunan kosong $\varnothing$ dikatakan mempunyai 0 elemen.

(b) Jika $n \in N$, dan $N_n = \{1, 2, ..., n\}$ maka himpunan A dikatakan **mempunyai** n **elemen** jika terdapat pemetaan bjektif (*Bijeksi*) $f : N_n \to A$.

(c) Himpunan A dikatakan **berhingga (finite)** jika $A=\varnothing$ atau A punya n elemen. Selain itu, himpunan A dikatakan **takhingga (infinite).**

Teorema 1.4.2 *Himpunan bilangan asli N adalah takhingga.*

Bukti. Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Teorema 1.4.3 (a) *Jika himpunan A mempunyai n elemen, B mempunyai m elemen dan $A\cap B=\varnothing$ maka $A\cup B$ mempunyai $n+m$ elemen.*

(b) *himpunan A mempunyai n elemen dan B mempunyai 1 elemen maka $A\setminus B$ punya $n-1$ elemen.*

(c) *Jika himpunan A takhingga dan himpunan B berhingga maka himpunan $A\setminus B$ takhingga.*

Bukti. Diketahui A mempunyai n elemen, B mempunyai m elemen . Maka berdasarkan definisi, terdapat pemetaan bijektif $f:N_n\to A$ dan $g:N_m\to B$. Didefinisikan fungsi $h:N_{n+m}\to A\cup B$ dengan $h(x)=f(x)$ untuk $x\in N_n$ dan $h(x)=g(x-n)$ untuk $x\in\{n+1,n+2,...,n+m\}$. Mudah ditunjukkan bahwa fungsi h merupakan fungsi bijektif pada N_{n+m}.

Pembuktian (b) dan (c) diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

■

Teorema 1.4.4 *Misalkan A dan B suatu himpunan dan $B\subseteq A$. Jika himpunan A berhingga maka himpunan B berhingga.*

Bukti. Misalkan A dan B suatu himpunan dengan $B\subseteq A$. Jika $B=\varnothing$, maka jelas B himpunan berhingga. Diasumsikan $B\neq\varnothing$. Dibuktikan dengan induksi pada jumlah elemen dari A.

Jika A punya 1 elemen maka haruslah $B=A$. Sehingga himpunan B berhingga. Misalkan setiap subset tak kosong dari suatu himpunan dengan *k* elemen adalah berhingga. Misalkan *A* mempunyai *k+1* elemen dan $B\subseteq A$. Maka terdapat pemetaan bijektif $f:N_{k+1}\to A$. Jika $f(k+1)\notin B$ maka $B\subseteq A\setminus f(k+1)$. Karena $A\setminus f(k+1)$ punya k elemen, maka berdasarkan hipotesis, himpunan B berhingga. Jika $f(k+1)\in B$, maka $B\setminus f(k+1)$ subset dari $A\setminus f(k+1)$. Karena $A\setminus f(k+1)$ punya k elemen, maka berdasarkan hipotesis, himpunan $B\setminus f(k+1)$ berhingga. Akibatnya, himpunan B juga berhingga.

■

Himpunan Terhitung

Definisi 1.4.5 (a) Himpunan A dikatakan **denumerable (terhitung takhingga)** jika terdapat pemetaan bijektif $f : N \to A$.
(b) Himpunan A dikatakan **terhitung** jika himpunan A berhingga atau denumerable. Selain itu, himpunan A dikatakan **tak terhitung**.

Dari sifat bijeksi, dapat dinyatakan bahwa A denumerable jika dan hanya jika terdapat bijeksi $g : A \to N$. Selain itu, himpunan B denumerable jika dan hanya jika terdapat bijeksi $h : B \to C$ dimana C juga denumerable. Selanjutnya, himpunan T terhitung jika dan hanya jika terdapat bijeksi $h : T \to S$ dimana S juga terhitung. Karena itu, himpunan takhingga terhitung adalah denumerable.

Teladan 1.4.6 Himpunan bilangan asli genap $E = \{2n \mid n \in N\}$ dan bilangan asli ganjil $O = \{2n-1 \mid n \in N\}$ adalah denumerable.

Bukti. Didefinisikan fungsi $f : N \to E$ dengan $f(n) = 2n$ untuk $\forall n \in N$ dan fungsi $g : N \to O$ dengan $f(n) = 2n-1$ untuk $\forall n \in N$. Mudah dibuktikan bahwa f dan g suatu fungsi yang bijektif.

Teladan 1.4.7 Himpunan semua bilangan bulat Z adalah denumerable.

Bukti. Didefinisikan fungsi $f : N \to Z$ dengan $f(n) = \frac{1-n}{2}$ untuk $n \in \{1,3,5,7,...\}$ dan $f(n) = \frac{n}{2}$ untuk $n \in \{2,4,6,...\}$. Maka f merupakan fungsi bijektif.

Teladan 1.4.8 Gabungan dua himpunan denumerable yang saling lepas adalah denumerable.

Teorema 1.4.9 *Himpunan $N \times N$ adalah denumerable.*

Bukti. Lihat buku Introduction to Real Analysis 4^{th} Edition karangan R. G Bartle and D.R Sherbert.

Teorema 1.4.10 *Misalkan A dan B suatu himpunan dan $B \subseteq A$. Jika himpunan A terhitung maka himpunan B terhitung.*

Teorema 1.4.11 *Pernyataan berikut ekivalen.*

a) *Himpunan* A *terhitung*

b) *Terdapat pemetaan surjektif* $f : N \to A$

c) *Terdapat pemetaan injektif* $g : A \to N$

Bukti. $(a \Rightarrow b)$ Diketahui himpunan A terhitung. Maka A himpunan berhingga atau A himpunan denumerable. Jika A himpunan berhingga, maka terdapat pemetaan bijektif $g : N_n \to A.$ Didefinisikan fungsi

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & \text{untuk } x = 1, 2, ..., n \\ g(n) & \text{untuk } x > n. \end{cases}$$

Maka fungsi $f : N \to A$ merupakan fungsi surjektif. Jika A himpunan denumerable. Maka terdapat fungsi bijektif $f : N \to A.$ Karena itu, fungsi f juga surjektif.

$(b \Rightarrow c)$ Diketahui terdapat pemetaan surjektif $f : N \to A.$ Maka untuk setiap $a \in A$ terdapat $n \in N$ sehingga $f(n) = a.$ Dibentuk himpunan $f^{-1}(a) = \{n \in N \mid f(n) = a\}.$ Karena $f^{-1}(a) \subseteq N$ maka $f^{-1}(a)$ punyan elemen terkecil. Didefinisikan $g : A \to N$ dengan $g(a) = x$ dimana $x = \min f^{-1}(a).$ Diambil sebarang $a_1, a_2 \in A$ dengan $g(a_1) = g(a_2).$ Ditunjukkan $a_1 = a_2.$ Karena $a_1, a_2 \in A$ maka $g(a_1) = r$ dan $g(a_2) = t$ dengan $r = \min f^{-1}(a_1)$ dan $t = \min f^{-1}(a_2).$ Karena $g(a_1) = g(a_2),$ maka $r = t.$ Akibatnya, karena f suatu fungsi, maka $a_1 = f(r) = f(t) = a_2.$

$(c \Rightarrow a)$ Diketahui pemetaan $g : A \to N$ injektif. Maka $g : A \to g(A)$ bijektif. Karena N terhitung dan $g(A) \subseteq N,$ menurut Teorema 1.4.11, berakibat $g(A)$ juga terhitung. Karena $g : A \to g(A)$ bijektif, maka himpunan A juga terhitung.

■

Teorema 1.4.12 *Himpunan bilangan rasional* $\mathbb{Q}$ *adalah denumerable.*

Bukti. Sebagaimana telah diketahui pada Teorema 1.4.9, bahwa himpunan $N \times N$ adalah denumerable sehingga $N \times N$ terhitung. Menurut Teorema 1.4.11, terdapat surjeksi $f : N \to N \times N.$ Misalkan $\mathbb{Q}^+$ himpunan bilangan rasional positif dan $\mathbb{Q}^-$ himpunan bilangan rasional negatif. Didefinisikan fungsi $g : N \times N \to \mathbb{Q}^+$ dengan $g(m, n) = \frac{m}{n}$ untuk setiap $(m, n) \in N \times N.$ Maka g merupakan surjeksi. Sehingga $g \circ f : N \to \mathbb{Q}^+$ juga surjeksi. Akibatnya, menurut Teorema 1.4.11, $\mathbb{Q}^+$ terhitung. Jika didefinisikan fungsi $h : N \times N \to \mathbb{Q}^-$ dengan $h(m, n) = -\frac{m}{n}$ untuk setiap $(m, n) \in N \times N,$ maka h juga surjeksi. Sehingga $g \circ h : N \to \mathbb{Q}^-$ juga

surjeksi. Menurut Teorema 1.4.11, maka $\square^+$ terhitung. Sehingga $\square = \square^- \cup \{0\} \cup \square^+$ juga terhitung. Akibatnya, $\square$ berhingga atau denumerable. Tapi, karena N takhingga dan $N \subset \square$ maka $\square$ takhingga. Jadi haruslah $\square$ denumerable. ■

Teorema 1.4.13 *Jika A_n himpunan terhitung untuk setiap $n \in N$, maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ juga terhitung.*

Bukti. Diketahui A_n himpunan terhitung untuk setiap $n \in N$. Maka untuk setiap $n \in N$, terdapat pemetaan surjektif $f_n : N \to A_n$. Didefinisikan fungsi $\phi : N \times N \to \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dengan $\phi(n,m) = f_n(m)$. Klaim fungsi ϕ adalah surjeksi. Diambil sebarang $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Maka $a \in A_n$ untuk suatu $n \in N$. Karena f_n surjeksi, maka terdapat $m \in N$ sehingga $f_n(m) = a$. Karena itu, $a = \phi(n,m)$. Sehingga terbukti ϕ suatu surjeksi. Selanjutnya, karena $N \times N$ terhitung, maka menurut Teorema 1.4.11, terdapat surjeksi $f : N \to N \times N$. Akibatnya, $\phi \circ f : N \to \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ juga surjeksi. Menurut Teorema 1.4.11, maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ terhitung. ■

Teorema Cantor 1.4.14 *Jika A sebarang himpunan, maka tidak ada surjeksi dari A ke himpunan kuasa dari A.*

Bukti. Andai ada surjeksi $\varphi : A \to P(A)$ dengan $P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$. Karena φ suatu fungsi, maka untuk $\forall a \in A$ berlaku $\varphi(a) \in P(A)$. Ini berarti bahwa $\varphi(a) \subseteq A$. Maka $a \in \varphi(a)$ atau $a \notin \varphi(a)$. Dibentuk himpunan

$$D = \{a \in A \mid a \notin \varphi(a)\}.$$

Dari definisi, jelas $D \subseteq A$. Karena φ surjektif, maka untuk $D \in P(A)$ terdapat $a_0 \in A$ sehingga $D = \varphi(a_0)$. Karena $a_0 \in A$ dan $D \subseteq A$, maka $a_0 \in D$ atau $a_0 \notin D$. Jika $a_0 \in D$ maka $a_0 \notin \varphi(a_0) = D$. Ini kontradiksi. Jika $a_0 \notin D = \varphi(a_0)$ maka menurut definisi, $a_0 \in D$. Ini juga kontradiksi. Jadi, pengandaian salah. Disimpulkan tidak ada surjeksi dari dari A ke himpunan kuasa dari A. ■

Latihan 1.4

1. Buktikan himpunan tak kosong A berhingga jika dan hanya jika terdapat bijeksi dari A ke himpunan berhingga B.
2. Misal $A = \{1,3\}$ dan $B = \{p,q,r\}$.

a) Tentukan banyaknya injeksi berbeda dari A ke B.

b) Tentukan banyaknya surjeksi berbeda dari B ke A.

3. Buktikan himpunan A denumerable jika dan hanya jika terdapat bijeksi dari A ke himpunan denumerable B.
4. Buktikan jika A dan B denumerable maka $A \cup B$ juga denumerable.
5. Buktikan dengan menggunakan induksi bahwa, jika A mempunyai *n* elemen maka $P(A)$ mempunyai 2^n elemen.
6. Buktikan koleksi subhimpunan berhingga dari *N*, $F(N)$ adalah terhitung.

B A B 2

SISTEM BILANGAN REAL

Bilangan rasional yang dipakai untuk pengukuran dalam kehidupan sehari-hari dan dalam berbagai disiplin ilmu ternyata tidak cukup. Misalkan panjang sisi miring dari segitiga siku-siku dengan panjang sisi tegak 1, tidak dapat dinyatakan sebagai bilangan rasional. Demikian pula, dalam disiplin ilmu matematika sendiri, misalkan barisan bilangan rasional yang didefinisikan sebagai $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a_n}{x_n})$ yang dimulai dengan x_1 ternyata menuju ke bilangan yang bukan merupakan bilangan rasional. Oleh karena itu kita membutuhkan sistem bilangan yang lebih besar dari bilangan rasional, dalam hal ini disebut sebagai bilangan real. Cara yang dipakai adalah cara lintas, yaitu melalui aksioma.

Di dalam bab ini kita akan membahas obyek matematika yang mendasari semua analisis, yaitu bilangan real. Walaupun, pembaca sudah sangat akrab dengan sistem bilangan real yang diperoleh pada kuliah kalkulus, setidaknya pengertian secara intuisi, disini akan dipelajari sistem bilangan real lebih mendalam.

Sistem bilangan real yang akan dinotasikan dengan $\Re$ mempunyai tiga sifat penting, yaitu: **sifat aljabar, sifat urutan dan sifat kelengkapan**. Kita akan memberikan beberapa aksioma untuk menjelaskan sistem bilangan real. Aksioma akan dibagi menjadi tiga kelompok: berkaitan dengan sifat aljabar, sifat urutan dan sifat kelengkapan.

Tujuan umum dari sekelompok aksioma itu adalah untuk meletakkan sifat-sifat dasar dari sekelompok objek yang akan dipelajari. Aksioma ini merupakan titik awal untuk diskusi selanjutnya.

2.1 Sifat-Sifat Aljabar Sistem Bilangan Real

Kita dapat memperoleh suatu bilangan dengan cara mengoperasikan suatu bilangan dengan bilangan yang lain. Secara formal, hal ini mengarah kepada

pengertian **operasi biner** pada himpunan A yang didefinisikan sebagai fungsi dari $A \times A$ ke A.

Terdapat dua operasi biner utama dalam sistem bilangan real, yaitu penjumlahan (+) dan perkalian $(\cdot)$. Operasi biner ini erat kaitannya dengan aljabar, yang merupakan alat utama di dalam analisis. Oleh karena itu, pada bagian pertama ini akan dipelajari sifat-sifat aljabar dari sistem bilangan real yang dimulai dengan mempelajari sifat dasar penjumlahan dan perkalian bilangan real. Dari sifat-sifat tersebut kemudian diturunkan sifat-sifat penting lainnya sebagai teorema.

Sifat aljabar yang harus dipenuhi oleh sistem ini tentulah persamaan linear terhadap operasi yang ada, harus selalu mempunyaI jawab. Ingat bahwa dalam menyelesaikan persamaan linear $x + a = b$, terhadap operasi penjumlahan, adalah sebagai berikut. Pertama, harus ada lawan dari bilangan a, misalkan ditulis sebagai $(-a)$, yaitu bilangan yang memenuhi $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Selanjutnya, dengan menambahkan pada kedua ruas persamaan, diperoleh

$$(x + a) + (-a) = b + (-a)$$

Dengan anggapan bahwa penjumlahan memenuhi sifat assosiatif, maka

$$x + [a + (-a)] = b + (-a)$$
$$x + 0 = b + (-a)$$
$$x = b + (-a)$$

Berdasarkan hal tersebut, maka sifat aljabar yang harus dipenuhi oleh himpunan bilangan real didefinisikan sebagai berikut.

Aksioma 2.1.1 (Sifat Aljabar dari $\Re$). Pada himpunan bilangan real $\Re$ terdapat dua operasi biner penjumlahan (+) dan perkalian $(\cdot)$. Dua operasi biner tersebut mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

(A1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ untuk setiap $a, b, c \in \Re$;
(*Sifat assosiatif dari penjumlahan*)

(A2) terdapat $0 \in \Re$; sehingga $0 + a = a$ untuk setiap $a \in \Re$;
(*Eksistensi elemen nol*)

(A3) untuk setiap $a \in \Re$; terdapat elemen -$a \in \Re$; sehingga $a + (-a) = 0$;
(*Eksistensi elemen negatif*)

(A4) $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in \Re$; (*Sifat komutatif dari penjumlahan*)

(M1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ untuk setiap $a, b, c \in \Re$; (*Sifat assosiatif dari perkalian*)

(M2) terdapat elemen $1 \in \Re$, $1 \neq 0$, sehingga $1 \cdot a = a$ untuk semua $a \in \Re$;
(*Eksistensi elemen satuan*)

(M3) untuk setiap $a \in \Re$, $a \neq 0$; terdapat elemen $1/a \in \Re$; sehingga $a \cdot (1/a) = 1$; (*Eksistensi invers*)

(M4) $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in \Re$; (*Sifat komutatif dari perkalian*)

(D) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ untuk semua $a, b, c \in \Re$;
(*Sifat distribusi perkalian terhadap penjumlahan*)

Kesembilan aksioma di atas terkenal dengan **aksioma lapangan (*field*).** Oleh karena itu himpunan bilangan real dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian merupakan suatu lapangan.

Dalam kalkulus kita sering mengoperasikan bilangan 0 dan 1. Tetapi sebelumnya pernahkah terfikir tentang eksistensi dari kedua bilangan tersebut? Teorema berikut ini akan menjamin eksistensi dari bilangan 0 dan 1. Untuk menyederhanakan penulisan, selanjutnya $a \cdot b$ cukup dituliskan dengan ab.

Sekarang kita akan mempelajari beberapa hal yang sudah dikenal.

Contoh 1 *Dengan cara yang serupa, kita dapat membuktikan bahwa persamaan linear terhadap perkalian* $a \cdot x = b$ *dengan* $a \neq 0$*, selalu mempunyai jawab tunggal.*

Jawab. Kita akan mencari jawab persamaan $a \cdot x = b$. Untuk $a \in \mathbb{R}$ dengan $a \neq 0$, maka berdasarkan aksioma 7, ada bunsur c sehingga $a \cdot c = 1$ dan dengan kombinasi aksioma 6, maka $c \cdot a = 1$. Selanjutnya, kalikan persamaan dengan c, maka

$$\begin{aligned} c \cdot (a \cdot x) &= c \cdot b \\ (c \cdot a) \cdot x &= c \cdot b \text{ (Sifat Assosiatif Perkalian)} \\ 1 \cdot x &= c \cdot b \\ x &= c \cdot b \text{ (Sifat Identitas Perkalian)} \end{aligned}$$

Kita dapat memperlihatkan bahwa $c \cdot b$ merupakan jawab, dengan cara mensubstitusikan ke
persamaan. Dalam hal ini diperoleh

$$\begin{aligned} a \cdot (c \cdot b) &= (a \cdot c) \cdot b \\ &= 1 \cdot b \\ &= b \end{aligned}$$

Selanjutnya, kita akan memperlihatkan bahwa persamaan mempunyai jawab tunggal. Misalkan persamaan mempunyai dua jawab, x_1 dan x_2, maka

$$a \cdot x_1 = b = a \cdot x_2$$

Kalikan dengan c di atas, maka diperoleh

$$\begin{aligned} c \cdot (a \cdot x_1) &= c \cdot (a \cdot x_2) \\ (c \cdot a) \cdot x_1 &= (c \cdot a) \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_1 &= 1 \cdot x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Jadi persamaan mempunyai jawab tunggal.

Teorema 2.1.2 (a) Jika $z, a \in \Re$ dengan $z + a = a$, maka $z = 0$.
(b) Jika $u, b \in \Re$; dengan $ub = b, b \neq 0$, maka $u = 1$.

Bukti: (a) ***Versi*** 1. Diketahui bahwa $z + a = a$. Dengan menambahkan $-a$ pada kedua ruas, maka dengan (A3) diperoleh

$$(z + a) + (-a) = a + (-a).$$

Jika berturut-turut diaplikasikan (A1), (A3), dan (A2) pada ruas kiri maka diperoleh

$$(z+a)+(-a)=z+(a+(-a))=z+0=z\,.$$

Selanjutnya, jika diaplikasikan (A3) pada ruas kanan maka diperoleh

$$a+(-a)=0.$$

Jadi disimpulkan bahwa $z=0.$

Versi 2. z = z + 0*;* (sifat identitas)

= z + (a + (-a))*;* (sifat invers)

= (z + a) + (-a)*;* (sifat assosiatif)

= a + (-a)*;* (hipotesis/ diketahui)

= 0*;* (invers)*:T erbukti:*

(b). Jika u dan $b \neq 0$ adalah elemen di R sedemikian sehingga u . b = b, maka u = 1.

Bukti:Versi 1. $(u.b).\frac{1}{b}=b.\frac{1}{b}$, ruang kiri dan kanan dilaki $\frac{1}{b}$

u. $\left(b.\frac{1}{b}\right)$ = $b.\frac{1}{b}$, sifat assosiatif

$u.1=1$

u = 1

Versi 2. $u=u.1$, sifat identitas

$=u.\left(b.\frac{1}{b}\right)$, sifat identas

= $(u.b).\left(\frac{1}{b}\right)$ (sifat assosiatif)

= $(b).\left(\frac{1}{b}\right)$ (diketahui)

= 1.

= 1*; (. . .):Terbukti:*

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang $a \in \Re$; $a \neq 0$ maka elemen $-a$ dan $1/a$ dapat ditentukan secara tunggal.

Teorema 2.1.3 (a) Jika $a, b \in \Re$ sehingga $a+b=0$, maka $b=-a.$
(b) Jika $a, b \in \Re$; $a \neq 0$ sehingga $ab=1$, maka $b=1/a.$

Bukti*(a) Versi 1*. Diketahui bahwa $a+b=0$. Dengan menambahkan $-a$ pada kedua ruas, maka diperoleh

$$(-a)+(a+b)=(-a)+0.$$

Jika diaplikasikan (A1), (A3), dan (A2) pada ruas kiri, akan diperoleh

$$(-a)+(a+b)=((-a)+a)+b=0+b=b\,.$$

Selanjutnya jika diaplikasikan (A2) pada ruas kanan, maka diperoleh

$$(-a)+0=-a.$$

Oleh karena itu disimpulkan bahwa $b=-a.$

***Versi* 2**. b = 0 + b*;* (sifat identitas)

= ((-a) + a) + b*;* (sifat invers)

= (-a) + (a + b)*;* (sifat assosiatif)

= (-*a*) + 0*;* (diketahui)

= (-*a*)*;* (sifat identitas)*:T erbukti*

(b) Bukti yang setara dengan bukti yang ada dalam buku teks ditinggalkan sebagai latihan bagi pembaca. Berikut ini akan diberikan altenatif sketsa bukti yang berbeda dari buku teks.

b = 1 . b*;* (sifat identitas)

= (. . .) + b*;* (sifat invers)

= . . . ., (sifat assosiatif)

= . . . , (. . .)

= (1/a), (. . .)*:T erbukti* ■

Bentuk lain dari teorema 2.1.3(a) di atas dapat juga dinyatakan dalam bentuk akan tetapi ini merupakan merupakan bentuk pengembangan dan berinovasi dalam memberikan daya analisis kepada mahasiswa, salah satu bentuknya adalah sebagai berikut :

Proposition 2.2.2 *Untuk setiap* $a \in \mathbb{R}$*, lawan terhadap penjumlahan adalah tunggal.*

Bukti. Misalkan lawan terhadap penjumlahan ada dua, tulis sebagai b_1 dan b_2. Dengan demikian

$$a + b_1 = 0 \text{ serta } b_1 + a = 0$$

dan

$$a + b_2 = 0 \text{ serta } b_2 + a = 0$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1 + 0 \\ &= b_1 + (a + b_1) \\ &= (b_1 + a) + b_2 \\ &= 0 + b_1 = b_2 \end{aligned}$$

Jadi lawan terhadap penjumalah dari a adalah tunggal.

Notation 3 *Karena lawan terhadap penjumlahan dari unsur* $a \in \mathbb{R}$ *adalah tunggal, kita akan menuliskannya sebagai* $-a$.

Sebelum melanjutkan pembahasan pada teorema berikut, sebaiknya pembaca terlebih dahulu mencoba membuktikan hal berikut : *Jika* $a \neq 0$*, buktikan bahwa invers terhadap perkalian dari a adalah tunggal. Berdasarkan hasil ini, kita akan menulis invers dari a sebagai* 1 *a atau* $a - 1$.

Teorema 2.1.4 Misalkan diberikan sebarang *a*, $b \in \Re$, maka :

(a) persamaan $a + x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal $x = (-a) + b$

(b) jika $a \neq 0$ maka persamaan $ax = b$ mempunyai penyelesaian tunggal $x = (1/a)b$.

Bukti: (a)**.** Perhatikan bahwa

$$a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b; \text{ (sifat assosiatif)}$$
$$= 0 + b; \text{ (sifat invers)}$$
$$= b; \text{ (sifat identitas)}$$

Ini berarti bahwa $x = (-a) + b$ adalah solusi dari persamaan $a + x = b$. Untuk menunjukkan ketunggalahnya, misalkan x_1 adalah sembarang solusi maka $a + x_1 = b$, selanjutnya

$(-a) + (a + x_1) = (-a) + b$; (kita tambahkan kedua ruang dengan (-a)

$((-a) + a) + x_1 = (-a) + b$; (sifat assosiatif)

$0 + x_1 = (-a) + b$; (sifat invers)

$x_1 = (-a) + b$; (sifat identitas).

Jadi $x_1 = (-a) + b$. Ini berarti bahwa solusi $a + x = b$ adalah tunggal, yakni $x = (-a) + b$.

(b). Cobalah detailkan langkah berikut ini , Perhatikan bahwa

$$a.\left(\left({}^{1}/_{a}\right).b\right) = \left(a.\left({}^{1}/_{a}\right)\right).b, \quad (sifat \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$
$$= \ldots.b. \text{ (sifat . . . . . .)}$$
$$= b, \text{ (sifat . . . . . .)}$$

Ini berarti bahwa $x = \left({}^{1}/_{a}\right).b$, yang tidak lain merupakan solusi dari persamaan $a.\ x = b$. Untuk menunjukkan ketunggalannya, misalkan x_1 sebarang solusi, maka $a.x_1 = b$. selanjutnya perhatikan bahwa :

$$\left({}^{1}/_{a}\right).(a.x_1) = \left({}^{1}/_{a}\right) + b, \quad (sifat \ldots\ldots\ldots\ldots)$$
$$\left(\left({}^{1}/_{a}\right).a\right).x_1 = \left({}^{1}/_{a}\right) + b, \quad (sifat \ldots\ldots\ldots\ldots)$$
$$\ldots. x_1 = \left({}^{1}/_{a}\right) + b, \quad (sifat \ldots\ldots\ldots\ldots)$$
$$x_1 = \ldots\ldots\ldots, \quad (sifat \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Teorema 2.1.5 Jika $a \in \Re$; maka

(a) $a0 = 0$ (b) $(-1)a = -a$

(c) $-(-a) = a$ (d) $(-1)(-1) = 1$

Bukti: (a) perhatikan bahwa :

$a + a.0 = a.1 + a.0$, (sifat . . . . . .)
= a.(1 + 0), (sifat . . . . . .)
= a.1, (sifat . . . . . .)
= a. (sifat . . . . . .),

(a) perhatikan bahwa

$$a + (-1).a = 1.a + (-1).a, \quad (\text{sifat} \ldots\ldots\ldots)$$
$$= \left((-1) + 1\right).a, \quad (\text{sifat} \ldots\ldots\ldots)$$
$$= 0.a, \quad (\text{sifat} \ldots\ldots\ldots)$$

$= 0.$

(c) Dengan (A3) diperoleh $-a + a = 0.$ Sehingga dari Teorema 2.1.3 (a) diperoleh $a = -(-a).$

(d) Dengan mensubstitusikan $a = -1$ pada (b) maka $(-1)(-1) = -(-1)$. Sehingga, dengan mensubstitusikan $a = 1$ pada (c) akan diperoleh $(-1)(-1) = 1.$

Teorema 2.1.6 Misalkan $a, b, c \in \Re$,

(a) Jika $a \neq 0$, maka $1/a \neq 0$ dan $1/(1/a) = a.$

(b) Jika $ab = ac$ dan $a \neq 0$, maka $b = c.$

(c) Jika $ab = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0.$

Bukti: (a) Untuk $a \neq 0$, maka $1/a$ ada. Jika $1/a = 0$, maka $1 = a(1/a) = a0 = 0$, sehingga bertentangan dengan (M2). Jadi $1/a \neq 0$. Selanjutnya karena $(1/a)a = 1,$ maka dengan Teorema 2.1.3 (b) diperoleh $1/(1/a) = a.$

(b) Jika kedua ruas persamaan $ab = ac$ dikalikan dengan $1/a$ dan menerapkan (M1), akan diperoleh

$$((1/a)a)b = ((1/a)a)c.$$

Jadi $1b = 1c$, yang berarti $b = c.$

(c) Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan $a \neq 0$. Harus dibuktikan $b = 0$. Karena $ab = 0 = a0$, maka dengan mengaplikasikan (b) pada persamaan $ab = a0$ akan diperoleh $b = 0$.

Catat bahwa 0 tidak mempunyai unsur kebalikan, dan pembagian dengan 0 tidak didefinisikan atau tidak terdefinisi. Sehubungan dengan itu ***tidak benar*** bahwa $\frac{1}{0} = \infty$, begitu juga jika dalam kalkulus bahwa $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \neq 0$. Walaupun untuk selanjutnya lambang ∞ (baca: tak hingga atau tak terhingga) akan sering digunakan, ia tidak menyatakan bahwa ∞ sebuah bilangan real.

Bilangan Rasional dan Irrasional

Dalam buku ini pembaca diasumsikan telah mengenal dengan cukup baik bilangan asli, bilangan bulat, dan bilangan rasional. Himpunan semua bilangan asli dilambangkan dengan $\mathbb{N}$, yakni

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$$

Himpunan semua bilangan bulat dilambangkan dengan $\mathbb{Z}$, yakni

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$$

(Tanda . . . di sini menyatakan ‘dan seterusnya’, yang mengasumsikan bahwa pembaca telah mengetahui pola yang ada.) Sementara itu, himpunan semua bilangan rasional dilambangkan dengan $\mathbb{Q}$, yakni

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \; dan \; FPB\,(p, q) = 1 \right\}$$

(Dengan FPB(p, q) menyatakan faktor persekutuan terbesar dari p dan q. Sebagai contoh, FPB(8, 14) = 2).
Selain itu, pembaca juga diasumsikan telah mengenal notasi bilangan dalam bentuk desimal. Sebagai contoh,

$1 = 1{,}0000\ldots$

$\frac{1}{2} = 0{,}5555\cdots$

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\cdots$

$\sqrt{2} = 0{,}41421\ \cdots$

$e = 2{,}71828\ \cdots$

$\pi = 3{,}14159\ \cdots$

Sebagian bilangan mempunyai bentuk desimal yang 'berhenti', seperti $\frac{1}{2} = 0{,}5$ dan sebagian bilangan mempunyai bentuk desimal yang 'berulang', seperti $\frac{1}{3} = 0{,}3333\cdots$
. Bilangan rasional senantiasa dapat dinyatakan dalam bentuk decimal yang berhenti atau berulang. Bilangan yang mempunyai bentuk desimal tak berhenti ataupun berulang merupakan bilangan irasional. Sebagai contoh, bilangan

0.1010010001 . . .

merupakan bilangan irasional.

Telah diketahui bahwa himpunan bilangan asli *N* merupakan himpunan bagian dari $\Re$, karena untuk sebarang $n \in N$; dapat dituliskan sebagai jumlah *n* suku dari elemen satuan $1 \in \Re$. Dengan cara yang sama, karena $0 \in \Re$; yang merupakan elemen nol dari $\Re$, maka jumlah *n* suku dari -1 dapat dituliskan dengan *-n*. Akibatnya himpunan bilangan bulat *Z* juga merupakan himpunan bagian dari $\Re$.

Elemen dari $\Re$ yang dapat dinyatakan dalam bentuk *a/b*, dengan $a, b \in Z$ dan $b \neq 0$ disebut bilangan rasional. Himpunan bilangan rasional di dalam $\Re$ dinotasikan dengan *Q*. Karena jumlah dan perkalian dari dua bilangan rasional adalah juga bilangan rasional, maka aksioma lapangan akan dipenuhi oleh himpunan bilangan rasional. Bilangan real yang bukan bilangan rasional disebut bilangan irrasional. Teorema berikut menunjukkan salah satu contoh eksistensi dari bilangan irrasional.

Teorema 2.1.7 Tidak ada bilangan rasional *r* sehingga $r^2 = 2.$

Bukti: Andaikan terdapat bilangan rasional *r* sehingga $r^2 = 2$. Oleh karena itu terdapat bilangan bulat *p* dan *q* dengan $q \neq 0$ sehingga $(p/q)^2 = 2.$ Tanpa mengurangi keumuman bukti dapat diasumsikan bahwa *p* dan *q* bilangan positif dengan faktor persekutuan terbesar adalah 1. Karena $p^2 = 2q^2$, maka p^2 bilangan genap. Akibatnya *p* juga bilangan genap. Karena jika *p* ganjil, maka p^2 juga ganjil. Karena 2 bukan faktor persekutuan dari *p* dan *q*, maka *q* bilangan ganjil.

Selanjutnya, karena p genap, maka $p = 2m$ untuk suatu $m \in Z$. Akibatnya $4m^2 = 2q^2$ atau $2m^2 = q^2$. Jadi, q^2 bilangan genap, sehingga q juga bilangan genap. Terdapat kontradiksi bahwa q adalah bilangan asli yang genap sekaligus ganjil. Jadi, pengandaian di atas salah. ■

Latihan 2.1

1. Buktikan bagian (b) pada Teorema 2.1.2.
2. Buktikan bagian (b) pada Teorema 2.1.3.
3. Buktikan bagian (b) pada Teorema 2.1.4.
4. Selesaikan persamaan-persamaan berikut, dan berikan alasan pada setiap langkah yang anda ambil.
   (a) $x + 6 = 3x + 9$ (b) $x^2 = 2x$ (c) $(x-1)(x+2) = 0$
5. Buktikan jika $a, b \in \Re$ maka
   (a) $-(a+b) = (-a) + (-b)$ (b) $(-a)(-b) = ab$
   (c) $1/(-a) = -(1/a)$ jika $a \neq 0$ (d) $-(a/b) = (-a)/b$ jika $b \neq 0$
6. Jika $a \in \Re$ memenuhi $aa = a$, maka buktikan bahwa $a = 0$ atau $a = 1$.
7. Jika $a = -a$ buktikan bahwa $a = 0$.
8. Jika $a, b \in \Re$ sehingga $aa = bb$, buktikan bahwa $a = b$ atau $a = -b$.
9. Gunakan argumen seperti Teorema 2.1.7 untuk menunjukkan bahwa tidak ada bilangan rasional s sehingga $s^2 = 8$.
10. Jika a irrasional, r dan s rasional, tunjukkan
    (a) r + s dan r.s rasional
    (b) $a + r$ dan $as + r$ irrasional.
11. Jika u dan v bilangan irrasional, tunjukkan bahwa $u + v$ dan uv tidak perlu irrasional.
12. Buktikan bahwa $\sqrt{7}$ bilangan irrasional.
13. Jika p bilangan prima, buktikan bahwa $\sqrt{p}$ bilangan irrasional.
14. Buktikan jika a bilangan irrasional maka $\sqrt{a}$ juga irrasional.
15. Fungsi logaritma dan trigonometri juga dapat menghasilkan bilangan irrasional.
    (a) Buktikan dengan kontradiksi bahwa $^{10}\log 2$ irrasional.
    (b) Dengan kesaksamaan trigonometri $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, tunjukkan : jika $\cos 2\theta$ irrasional maka $\cos\theta$ irrasional.
16. Misalkan A dan B himpunan bagian dari $\Re$, dan didefinisikan operasi $+$ dan $\cdot$ dengan $\in$

$$A + B = \{a + b \ ; \ a \in A \text{ dan } b \in B \}$$

$$A \cdot B = \{a \cdot b \ ; \ a \in A \text{ dan } b \in B \}.$$

Untuk sebarang A, B dan C himpunan bagian dari $\Re$, buktikan bahwa :

(a) $\Re + \Re = \Re - \Re = \Re$.

(b) Jika $A \neq \varnothing$, maka $A - A \neq \varnothing$.

(c) $A \cdot \varnothing = \varnothing$.

(d) Jika $A \subseteq B$, maka $A + C \subseteq B + C$.

(e) $A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot B + A \cdot C$.

Berikan contoh untuk menunjukkan bahwa kesamaan tidak harus terjadi.

(f) Jika $A \cdot C = B \cdot C$, apakah $A = B$?

17. Misalkan B adalah operasi biner pada $\Re$. Kita katakan bahwa:

(i) **komutatif** jika B(a,b) = B(b,a), untuk semua a, b $\in \Re$.

(ii) **assosiatif** jika B(a, B(b, c)) = B(B(a,b),c), untuk semua a, b, c $\in \Re$.

(iii) mempunyai **identitas** jika terdapat elemen e $\in \Re$ sedemikian hingga B(a, e) = a = B(e, a), untuk semua a, b $\in \Re$.

Apakah operasi-operasi biner pada R yang didefinisikan berikut ini mempunyai sifat-sifat di atas? Berikan penjelasan!

(a) $B_1(a, b) := \frac{1}{2}(a + b)$ (b) $B_2(a, b) := \frac{1}{2}(ab)$.

(c) $B_3(a, b) := a - b$ (d) $B_4(a, b) := 1 + ab$.

2.2 SIFAT-SIFAT URUTAN DARI $\Re$

Pada umumnya kita tidak dapat menyebut elemen di bilangan real secara tepat, misalkan $\sqrt{2}$. Oleh karena itu untuk menyebutkan elemen tersebut kita harus membandingkan dengan elemen yang lain, misalkan

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

Selain memenuhi Sifat Lapangan, R juga diasumsikan memenuhi Sifat Urutan, yang berkaitan dengan ketaksamaan di antara dua bilangan real. Khususnya, diberikan dua buah bilangan real a dan b sembarang, terdapat tiga kemungkinan dan hanya satu di antara tiga kemungkinan tersebut yang benar, yaitu:

atau $a > b$, atau $a = b$, atau $a < b$.

Sifat ini dikenal sebagai Hukum Trikotomi.

Catat bahwa $a < b$ setara dengan $b > a$. Jika a, b, dan c adalah bilangan real, maka $a < b < c$ berarti $a < b$ dan $b < c$. Sebagai contoh, kita mempunyai

$$0 < \frac{1}{2} < 1$$

Selanjutnya, $a \leq b$ berarti $a < b$ atau $a = b$; sementara $a \geq b$ berarti $a > b$ atau $a = b$. Sebagai contoh, $1 \geq 0$ dan $-1 \leq 1$, merupakan dua pernyataan yang benar

Sifat urutan dari $\Re$ akan memberikan atau mengarah kepada pengertian kepositifan bilangan real dan ketaksamaan-ketaksamaan diantara bilangan-bilangan real. Seperti pada sifat aljabar, kita memulai dengan

memisahkan beberapa sifat dasar, kemudian sifat yang lain diturunkan dari sifat dasar ini. Cara yang paling sederhana untuk melakukan ini adalah dengan mengidentifikasi suatu himpunan bagian dari $\Re$ dengan istilah kepositifan.

Aksioma 2.2.1 (Sifat–Sifat Urutan dari $\Re$) Terdapat himpunan bagian tak kosong P dari $\Re$ yang disebut **himpunan bilangan real positif**, yang memenuhi sifat-sifat berikut :

(a) Jika $a,b \in P$ maka $a+b \in P$.

(b) Jika $a,b \in P$ maka $ab \in P$.

(c) Jika $a \in R$ maka tepat satu dari di bawah ini akan dipenuhi:

$$a \in P, \qquad a = 0, \qquad -a \in P.$$

Sifat (c) disebut **Sifat Trichotomy**, karena sifat ini membagi $\Re$ menjadi tiga himpunan bagian yang saling asing.

Definisi 2.2.2 (i) Jika $a \in P$, dikatakan ***a* bilangan real positif** dan ditulis $a > 0$.

(ii) Jika $a \in P \cup \{0\}$, dikatakan ***a* bilangan real nonnegatif** dan ditulis $a \geq 0.$

(iii) Jika $-a \in P$, dikatakan ***a* bilangan real negatif** dan ditulis $a < 0.$

(iv) Jika $-a \in P \cup \{0\}$, dikatakan ***a* bilangan real nonpositif** dan ditulis $a \leq 0.$

Selanjutnya akan diperkenalkan pengertian ketaksamaan antara bilangan-bilangan real.

Definisi 2.2.3 Misalkan $a, b \in \Re$.

(a) Jika $a - b \in P$, maka ditulis $a > b$ atau $b < a.$

(b) Jika $a - b \in P \cup \{0\}$, maka ditulis $a \geq b$ atau $b \leq a.$

Selanjutnya notasi $a < b < c$ mempunyai arti $a < b$ dan $b < c.$ Dengan cara yang sama, jika $a \leq b$ dan $b \leq c$ maka ditulis $a \leq b \leq c.$ Demikian juga, jika $a \leq b$ dan $b < c$ maka ditulis $a \leq b < c$, dan seterusnya.

Berikutnya akan dijelaskan mengenai "**Aturan Ketaksamaan**" yang nantinya sering digunakan pembaca pada bagian berikutnya.

Teorema 2.2.4 Misalkan $a, b, c \in \Re.$

(a) Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c.$

(b) Dipenuhi tepat satu dari : $a > b, \quad a = b, \quad a < b.$

(d) Jika $a \geq b$ dan $a \leq b$ maka $a = b.$

Bukti: (a) Jika $a > b$ berarti $a - b \in P$, dan $b > c$ berarti $b - c \in P$, sehingga dengan Aksioma 2.2.1(a) diperoleh $(a-b)+(b-c) = a - c \in P$. Jadi, $a > c.$

(b) Dengan Sifat Trichotomy 2.2.1(c), akan dipenuhi tepat satu dari :

$$a - b \in P, a - b = 0, -(a-b) = b - a \in P.$$

(c) Andaikan $a \neq b$, maka $a - b \neq 0$, sehingga dari (b) diperoleh $a - b \in P$ atau $b - a \in P.$ Dengan kata lain, $a > b$ atau $b > a.$ Tetapi hal ini bertentangan dengan hipotesis. Jadi, haruslah $a = b.$ ■

Tentunya kita sudah tahu bahwa bilangan asli adalah positif. Tetapi bagaimana membuktikannya? Ternyata sifat kepositifan dari bilangan asli dapat diturunkan dari sifat-sifat urutan bilangan real, yang dimulai dengan membuktikan bahwa hasil kuadrat dari bilangan real tak nol selalu positif.

Teorema 2.2.5 (a) Jika $a \in \Re$ dan $a \neq 0$, maka $a^2 > 0$.
(b) $1 > 0$.
(c) Jika $n \in N$, maka $n > 0$.

Bukti: (a) Dengan Sifat Trichotomy, jika $a \neq 0$ maka $a \in P$ atau $-a \in P$. Jika $a \in P$, maka dengan Aksioma 2.2.1 (b) diperoleh $a^2 = aa \in P$. Dengan cara yang sama, jika $-a \in P$, maka $(-a)(-a) \in P$. Dari Teorema 2.1.5 (b) dan 2.1.5 (d) maka

$$(-a)(-a) = ((-1)a)((-1)a) = (-1)(-1)a^2 = a^2,$$

yang berarti $a^2 \in P$. Jadi, jika $a \neq 0$ maka $a^2 > 0$.

(b) Karena $1 = (1^2)$, maka dengan (a) disimpulkan bahwa $1 > 0$.

(c) Untuk membuktikan bahwa $n > 0$, kita gunakan induksi matematika. Untuk $n = 1$ telah dibuktikan benar pada (a). Selanjutnya dianggap benar untuk $n = k, k > 0$. Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$. Karena $1 \in P$ dan $k \in P$ maka $k + 1 \in P$. Dengan Aksioma 2.2.1(a), terbukti bahwa $n > 0$. ■

Berikut ini adalah hubungan antara sifat-sifat urutan dengan operasi penjumlahan dan perkalian, khususnya pada ketaksamaan.

Teorema 2.2.6 Misalkan $a, b, c, d \in \Re$.
(a) Jika $a > b$, maka $a + c > b + c$.
(b) Jika $a > b$ dan $c > d$, maka $a + c > b + d$.
(c) Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka $ca > cb$.
Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka $ca < cb$.
(d) Jika $a > 0$, maka $1/a > 0$.
Jika $a < 0$, maka $1/a < 0$.

Bukti: (a) Jika $a > b$ berarti $a - b \in P$, sehingga $(a + c) - (b + c) = a - b \in P$. Jadi $a + c > b + c$.

(b) Jika $a > b$ dan $c > d$, berarti $a - b \in P$ dan $c - d \in P$, sehingga dengan Sifat 2.2.1.(a) diperoleh $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) \in P$. Jadi, $a + c > b + d$.

(c) Jika $a > b$ dan $c > 0$, berarti $a - b \in P$ dan $c \in P$, sehingga dengan Sifat 2.2.1 (b) diperoleh $ca - cb = c(a - b) \in P$. Jadi $ca > cb$. Jika $c < 0$, berarti $-c \in P$, sehingga $cb - ca = (-c)(a - b) \in P$. Jadi $ca < cb$.

(d) Untuk $\frac{1}{a}$, berdasarkan trikotomi ada tiga kemungkinan yaitu $\frac{1}{a} > 0$, $\frac{1}{a} = 0$ atau $\frac{1}{a} < 0$. Jika $\frac{1}{a} = 0$, maka berdasarkan Contoh 3 berlaku

$$1 = a \cdot \frac{1}{a} = 0$$

Hal ini berlawanan dengan kenyataan bahwa $1 \neq 0$. Jika $\frac{1}{a} < 0$ atau $-\frac{1}{a} > 0$, maka

$$1 = a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) > 0$$

Sekali lagi, ini tidak benar. Jadi haruslah $\frac{1}{a} > 0$ ■

Dengan menggabungkan Teorema 2.2.5(c) dan 2.2.6(d) dapat disimpulkan bahwa kebalikan $1/n$ dari sebarang bilangan asli n adalah positif. Akibatnya, bilangan rasional dapat dinyatakan sebagai $m/n = m(1/n)$, dengan m bilangan bulat dan n bilangan asli.

Teorema 2.2.7 Jika $a, b \in \Re$ dan $a < b$, maka $a < \frac{1}{2}(a+b) < b$.

Bukti: Karena $a < b$, maka dengan Teorema 2.2.6(a), $2a = a + a < a + b$ dan $a + b < b + b = 2b$. Jadi,

$$2a < a + b < 2b.$$

Dengan Teorema 2.2.5 (c) diperoleh $2 > 0$, sehingga dengan Teorema 2.2.6 (d) diperoleh $\frac{1}{2} > 0$. Dengan Teorema 2.2.6 (c) disimpulkan

$$a = \frac{1}{2}(2a) < \frac{1}{2}(a+b) < \frac{1}{2}(2b) = b.$$

Jadi $a < \frac{1}{2}(a+b) < b$. ■

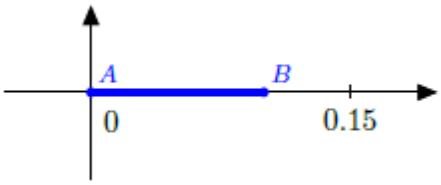
Dari Teorema 2.2.7 dapat diambil kesimpulan bahwa di antara dua bilangan real yang berbeda terdapat tak berhingga bilangan real. Lebih lanjut, dapat ditunjukkan bahwa tidak ada bilangan real positif terkecil. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada teorema berikut.

Akibat 2.2.8 Jika $b \in \Re$ dan $b > 0$, maka $0 < \frac{1}{2}b < b$.

Bukti: Substitusikan $a = 0$ pada Teorema 2.2.7. ■

Teorema 2.2.7 dan Akibat 2.2.8 menghasilkan dua teorema penting berikut yang akan digunakan sebagai metode pembuktian dalam bab selanjutnya.

Teorema 2.2.9 Jika $a \in \Re$ dan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a = 0$.



Bukti: Andaikan $a > 0$, maka dari Akibat 2.2.8 diperoleh bahwa $0 < \frac{1}{2}a < a$. Selanjutnya, jika dipilih $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}a$, maka $0 < \varepsilon_0 < a$. Hal ini bertentangan dengan yang diketahui bahwa $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Jadi $a = 0$. ■

Teorema 2.2.10 Jika $a, b \in \Re$ dan $a - \varepsilon < b$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a \leq b$.

Bukti: Andaikan $b < a$. Misalkan $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(a-b)$, maka $\varepsilon_0 > 0$. Sehingga diperoleh $b < a - \varepsilon_0$. Hal ini bertentangan dengan yang diketahui. Jadi $a \le b$. ■

Hasil kali dua bilangan real positif adalah positif. Tetapi, kepositifan hasil kali dua bilangan real tidak menjamin bahwa dua bilangan real tersebut selalu positif. Yang benar adalah dua bilangan real tersebut harus positif semua atau negatif semua, seperti yang akan ditunjukkan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.2.11 Jika $ab > 0$, maka dipenuhi salah satu:

(a) $a > 0$ dan $b > 0$.

(b) $a < 0$ dan $b < 0$.

Bukti: Karena $ab > 0$, maka $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ (karena jika salah satu bernilai nol, maka $ab = 0$). Dari Sifat Trichotomy, maka $a > 0$ atau $a < 0$. Jika $a > 0$, maka dengan Teorema 2.2.6 diperoleh $1/a > 0$ sehingga

$$b = 1b = ((1/a)a)b = (1/a)(ab) > 0.$$

dengan cara yang sama, jika $a < 0$ maka $1/a < 0$ sehingga

$$b = (1/a)(ab) < 0.$$ ■

Akibat: 2.2.12 Jika $ab < 0$ maka dipenuhi salah satu:

(a) $a < 0$ dan $b > 0$ atau

(b) $a > 0$ dan $b < 0$.

Bukti : Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. ■

Pertidaksamaan dan Ketaksamaan

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa sifat-sifat urutan yang telah dijelaskan di atas dapat digunakan untuk menyelesaikan beberapa pertidaksamaan.

Contoh 2.2.13 (a) Tentukan himpunan *A* dari semua bilangan real *x* sehingga $2x + 3 \le 7$. Perhatikan bahwa $x \in A \Leftrightarrow 2x + 3 \le 7 \Leftrightarrow 2x \le 4 \Leftrightarrow x \le 2$. Oleh karena itu, A = { x ∈ R: x ≤ 2}.

(b) Tentukan himpunan B = {x ∈ ℜ : (2x + 1)/(x+2) < 1}.
Perhatikan bahwa $x \in B \Leftrightarrow (2x+1)/(x+2) - 1 < 0 \Leftrightarrow (x-1)/(x+2) < 0.$ Sehingga diperoleh (i) $x - 1 < 0$ dan $x + 2 > 0$, atau (ii) $x - 1 > 0$ dan $x + 2 < 0$. Untuk kasus (i) diperoleh $x < 1$ dan $x > -2$ yang akan dipenuhi jika $-2 < x < 1$, sedangkan untuk kasus (ii) diperoleh $x > 1$ dan $x < -2$, sehingga tidak ada bilangan real yang memenuhi. Jadi dapat disimpulkan bahwa B = { x ∈ ℜ : -2 < x < 1}.

Contoh-contoh berikut mengilustrasikan aplikasi sifat urutan dari ℜ dalam menentukan ketaksamaan-ketaksamaan.

Contoh 2.2.14 (a) Jika $a \geq 0$ dan $b \geq 0$, maka $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.
Diasumsikan $a > 0$ dan $b > 0$, untuk kasus yang lain diserahkan kepada pembaca. Dari Sifat 2.2.1 (a) berlaku $a + b > 0$. Karena $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$, maka dengan Teorema 2.2.6 (c) untuk $b - a > 0$ mengakibatkan $b^2 - a^2 > 0$. Sebaliknya, dari Teorema 2.2.11, $b^2 - a^2 > 0$ menyebabkan $b - a > 0$.

Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $\sqrt{a} > 0$ dan $\sqrt{b} > 0$. Karena $a = (\sqrt{a})^2$ dan $b = (\sqrt{b})^2$, maka dengan mengganti *a* dan *b* masing-masing dengan $\sqrt{a}$ dan $\sqrt{b}$ pada implikasi yang pertama akan diperoleh implikasi yang kedua.

(b) Jika *a* dan *b* bilangan real positif, maka **rata-rata aritmetik** adalah $\frac{1}{2}(a + b)$, dan **rata-rata geometrik** adalah $\sqrt{ab}$. Ketaksamaan **Rata-Rata Aritmetik-Geometrik** untuk *a* dan *b* adalah

$$\sqrt{ab} \leq \tfrac{1}{2}(a + b) \qquad (2.1)$$

dengan kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a = b$.

Untuk membuktikan ini, perhatikan bahwa jika $a > 0$, $b > 0$, dan $a \neq b$, maka $\sqrt{a} > 0$, $\sqrt{b} > 0$ dan $\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$ (mengapa?). Sehingga dengan Teorema 2.2.5 (a) berlaku $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$. Dengan menguraikan kuadrat ini diperoleh

$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0,$$

yang menyatakan bahwa

$$\sqrt{ab} < \tfrac{1}{2}(a + b).$$

Oleh karena itu (2.1) dipenuhi (dengan kesamaan murni) apabila $a \neq b$. Lebih lanjut, jika $a = b$ (positif), maka kedua ruas (2.1) sama dengan *a*, jadi (2.1) menjadi kesamaan. Hal ini membuktikan bahwa (2.1) berlaku untuk $a > 0$ dan $b > 0$.

Di pihak lain, asumsikan $a > 0$, $b > 0$, dan $\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a + b)$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas dan mengalikan dengan 4 diperoleh

$$4ab = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

yang menyatakan bahwa

$$0 = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Kesamaan ini menyatakan bahwa $a = b$ (mengapa?). Jadi, kesamaan di dalam (2.1) menyatakan $a = b$.

Catatan: Ketaksamaan Rata-Rata Aritmetik-Geometri secara umum berlaku untuk sejumlah berhingga bilangan real positif $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

dengan kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

(c) **Ketaksamaan Bernoulli** Jika $x > -1$, maka

$$(1+x)^n \geq 1+nx \text{ untuk semua } n \in N. \qquad (2.2)$$

Akan dibuktikan dengan induksi matematika. Untuk $n=1$ menghasilkan kesamaan, sehingga (2.2) benar. Diasumsikan (2.2) benar untuk bilangan asli $n=k$. Harus dibuktikan bahwa (2.2) benar untuk untuk $n=k+1.$ Dari asumsi $(1+x)^k \geq (1+kx)$ dan kenyataan bahwa $1+x>0$, maka

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^{k+1}(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x.$$

Jadi, ketaksamaan (2.2) benar untuk $n=k+1.$ Dengan prinsip induksi, maka ketaksamaan benar untuk semua $n \in N$.

(e) **Ketaksamaan Cauchy** Jika $n \in N$ dan $a_1,\ldots,a_n$ dan $b_1,\ldots,b_n$ bilangan real, maka

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2). \qquad (2.3)$$

Lebih lanjut, jika tidak semua dari $b_i = 0$, maka kesamaan memenuhi (2.3) jika dan hanya jika terdapat bilangan s $\in R$ sehingga $a_i = sb_i$ untuk semua $i = 1,\ldots,n$.

Untuk membuktikan ini, didefinisikan fungsi $F : \Re \to \Re$

$$F(t) = (a_1 - tb_1)^2 + \cdots + (a_n - tb_n)^2 \text{ untuk } t \in \Re.$$

Dengan Teorema 2.2.5 (a) dan Sifat 2.2.1 (a) diperoleh $F(t) \geq 0$ untuk semua $t \in \Re$. Jika F diuraikan, maka

$$F(t) = A - 2Bt + Ct^2,$$

dengan

$$A = a_1^2 + \cdots + a_n^2, \quad B = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n, \quad C = b_1^2 + \cdots + b_n^2.$$

Karena fungsi kuadrat $F(t) \geq 0$ untuk semua $t \in \Re$, maka ia tidak mungkin mempunyai dua akar real yang berbeda. Oleh karena itu diskriminan

$$\Delta = (-2B)^2 - 4ac = 4(B^2 - AC)$$

harus memenuhi $\Delta \leq 0$. Akibatnya diperoleh $B^2 \leq AC$, yang memberikan ketaksamaan (2.3).

Jika $b_i = 0$ untuk semua $i = 1,\ldots,n$, maka kesamaan dalam (2.3) dipenuhi untuk sebarang pemilihan dari a_i. Asumsikan tidak semua $b_i = 0$ ($i = 1,\ldots,n$). Jika $a_i = sb_i$ untuk suatu $s \in R$ dan semua $i = 1,\ldots,n$, maka kedua ruas dari (2.3) sama dengan $s^2(b_1^2 + \cdots + b_n^2)^2$. Sebaliknya, jika kesamaan berlaku dalam (2.3), maka haruslah $\Delta = 0$. Jadi terdapat akar tunggal s dari persamaan kuadrat $F(t) = 0$. Akibatnya

$$a_1 - sb_1 = 0,\ldots,a_n - sb_n = 0,$$

yang memberikan $a_i = sb_i$ untuk semua $i = 1,\ldots,n$.

(f) **Ketaksamaan Segitiga** Jika $n \in N$ dan $a_1,\ldots,a_n$ dan $b_1,\ldots,b_n$ bilangan real, maka

$$\left[(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2\right]^{1/2} \le \left[a_1^2+\cdots+a_n^2\right]^{1/2}+\left[b_1^2+\cdots+b_n^2\right]^{1/2}. \quad (2.4)$$

Lebih lanjut, jika tidak semua dari $b_i = 0$, maka kesamaan memenuhi (2.4) jika dan hanya jika terdapat bilangan $s \in R$ sehingga $a_i = sb_i$ untuk semua $i = 1,\ldots,n$.

Karena $(a_i+b_i)^2 = a_i^2 + 2a_ib_i + b_i^2$ untuk $i = 1,\ldots,n$, maka dari Ketaksamaan Cauchy [dengan *A, B* dan *C* seperti pada bukti di atas] berlaku

$$(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2 = A+2B+C \le A+2\sqrt{AC}+C = (\sqrt{A}+\sqrt{C})^2.$$

Akibatnya

$$\left[(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2\right]^{1/2} \le \sqrt{A}+\sqrt{C},$$

yang memberikan ketaksamaan (2.4).

Jika kesamaan berlaku dalam (2.4), maka $B = \sqrt{AC}$. Jadi kesamaan dipenuhi dalam ketaksamaan Cauchy.

Latihan 2.2

1. (a) Jika $a \le b$ dan $c < d$, buktikan bahwa $a + c < b + d$.
   (b) Jika $a \le b$ dan $c \le d$, buktikan bahwa $a + c \le b + d$.
2. (a) Jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$, buktikan bahwa $0 < ac < bd$.
   (b) Jika $0 < a < b$ dan $0 \le c \le d$, buktikan bahwa $0 \le ac \le bd$.
3. Jika $a < b$ dan $c < d$, buktikan bahwa $ad + bc < ac + bd$.
4. Cari bilangan real a, b, c, dan d yang memenuhi $0 < a < b$ dan $c < d < 0$ dan juga memenuhi salah satu (i) $ac < bd$ atau (ii) $bd < ac$.
5. Jika $a \le b \le d$, dan $a \le c \le d$ buktikan bahwa $c - b \le d - a$.
6. Jika $a, b \in \Re$, buktikan bahwa $a^2 + b^2 = 0$ jika dan hanya jika $a = b = 0$
7. Jika $0 \le a < b$, buktikan bahwa $a^2 \le ab < b^2$. Tunjukkan dengan contoh bahwa hal ini tidak mengakibatkan $a^2 < ab < b^2$.
8. Tunjukkan bahwa jika $0 < a < b$, maka $a < \sqrt{ab} < b$ dan $0 < 1/b < 1/a$.
9. Tunjukkan jika $b < 0$ dan $c < 0$, maka $a/b < (a+c)/b$.
10. Untuk *a, b, c* dan *d* bilangan real positif, tunjukkan $a/b < c/d \Leftrightarrow ad < bc$.
11. Jika $n \in N$, tunjukkan bahwa $n^2 \ge n$ dan $1/n^2 \le 1/n$.
12. Tentukan semua bilangan real *x* sehingga :
    (a) $x^2 > 4x + 5$, (b) $1 < x^2 < 9$, (c) $1/x < x$, (d) $1/x < x^2$.

13. Misalkan $a, b \in \Re$ dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $a \le b + \varepsilon$.
    (a) Tunjukkan bahwa $a \le b$.
    (b) Tunjukkan bahwa tidak mungkin $a < b$.
14. Buktikan bahwa $\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ untuk semua $a,b \in \Re$. Tunjukkan bahwa kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $a = b$.
15. (a) Jika $0 < c < 1$, tunjukkan $0 < c^2 < c < 1$.
    (b) Jika $c > 1$, tunjukkan $1 < c < c^2$.
16. Jika $c > 1$, tunjukkan bahwa $c^n \ge c$ untuk setiap $n \in N$ (Gunakan Ketaksamaan Bernoulli dengan mengambil $c = 1 + x$.)
17. Jika $0 < c < 1$, tunjukkan bahwa $c^n \le c$ untuk setiap $n \in N$.
18. Jika $c > 1$ dan $m, n \in N$, tunjukkan bahwa $c^m > c^n$ jika dan hanya jika $m > n$.
19. Jika $0 < c < 1$, dan $m, n \in N$, tunjukkan bahwa $c^m < c^n$ jika dan hanya jika $m > n$.
20. Jika $a > 0$, $b > 0$ dan $n \in N$, tunjukkan bahwa $a < b$ jika dan hanya jika $a^n < b^n$.

21. Misalkan $a_k > 0$ untuk $k = 1, \ldots, n$. Buktikan bahwa

$$n^2 \le (a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

22. Misalkan $a_k > 0$ untuk $k = 1, \ldots, n$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}} \le \left[a_1^2 + \cdots + a_n^2\right]^{1/2} \le a_1 + \cdots + a_n .$$

23. Tunjukkan bahwa untuk bilangan real a > 0 dan b > 0, berlaku

$$\min(a,b) \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \max(a,b).$$

24. Tunjukkan bahwa untuk bilangan real a, b, c berlaku $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$

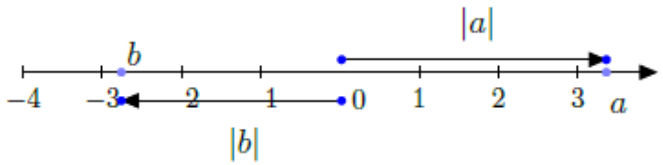
25. Tunjukkan untuk bilangan real nonnegatif a, b, c, berlaku $a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc$

2.3 Nilai Mutlak

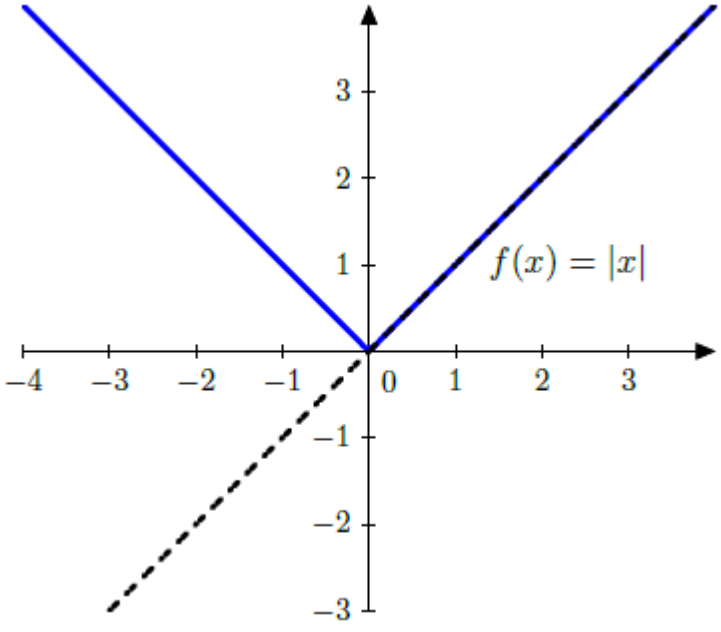
Dari Sifat Trichotomy 2.2.1 (c), diperoleh bahwa jika $a \in \Re$ dan $a \neq 0$, maka tepat satu bilangan dari a atau $-a$ adalah positif. Nilai mutlak dari $a \neq 0$ didefinisikan sebagai bilangan positif dari salah satu bilangan ini. Nilai mutlak dari 0 didefinisikan menjadi 0.

Definisi 2.3.1 Untuk $a \in \Re$, **harga mutlak dari *a***, dinotasikan dengan $|a|$, didefinisikan sebagai

$$|a| = \begin{cases} a & ; \ a \geq 0 \\ -a & ; \ a < 0. \end{cases}$$



Sebagai contoh, $|3| = 3$ dan $|-2| = 2$. Dari definisi ini disimpulkan bahwa $|a| \geq 0$ untuk semua $a \in \Re$, $|a|^2 = a^2$ serta $|a| = \sqrt{a^2}$, akan tetapi untuk kasus $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, karena hanya berlaku untuk $a \geq 0$, selanjutnya grafik fungsi $f(x) = |x|$ adalah



Teorema 2.3.2 (a) $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$.
(b) |-a| = |a| untuk semua $a \in \Re$.
(c) |ab| = |a| |b| untuk semua $a, b \in \Re$.

(d) Jika $c \geq 0$, maka $|a| \leq c$ jika dan hanya jika $-c \leq a \leq c$.

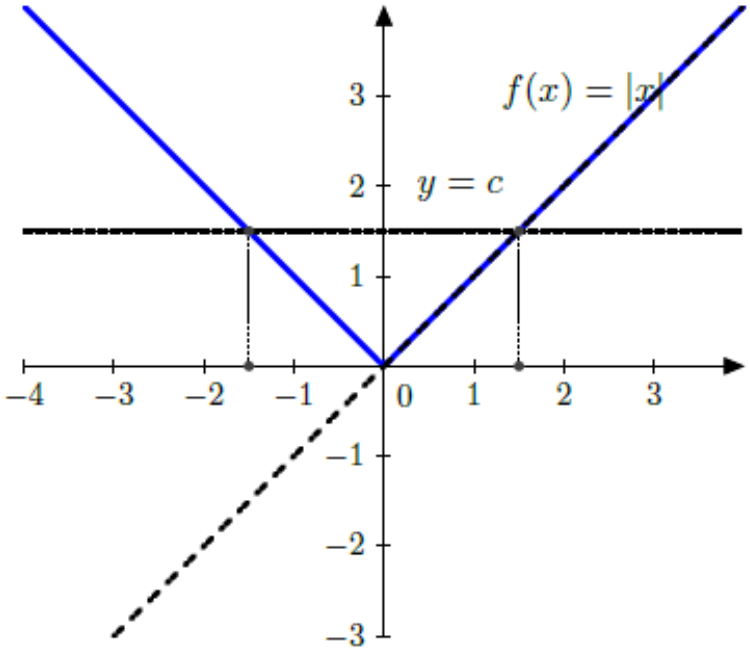
(e) $-|a| \leq a \leq |a|$ untuk semua $a \in \Re$.

Bukti: (a) Dari definisi, jika $a = 0$, maka $|a| = 0$. Sebaliknya, jika $a \neq 0$ maka $-a \neq 0$, sehingga $|a| \neq 0$. Jadi, jika $|a| = 0$, maka $a = 0$.

(b) Jika $a = 0$, maka $|0| = 0 = |-0|$. Jika $a > 0$ maka $-a < 0$ sehingga $|a| = a = -(-a) = |-a|$. Jika $a < 0$ maka $-a > 0$ sehingga $|a| = -a = |-a|$.

(c) Jika salah satu dari a,b bernilai nol, maka baik $|ab|$ maupun $|a||b|$ sama-sama bernilai nol. Jika $a > 0$ dan $b > 0$ maka $|ab| = ab = |a||b|$. Jika $a > 0$ dan $b < 0$ maka $ab < 0$ sehingga $|ab| = -ab = a(-b) = |a||b|$. Sedangkan untuk dua kasus yang lain dapat dikerjakan dengan cara yang sama.

(d) Jika $|a| \leq |c|$, maka diperoleh $a \leq c$ dan $-a \leq c$. Hasil ini memberikan $a \leq c$ dan $-c \leq a$, sehingga $-c \leq a \leq c$. Sebaliknya, jika $-c \leq a \leq c$, maka $a \leq c$ dan $-a \leq c$, yang berarti $|a| \leq c$.



(e) Substitusikan $c = |a|$ ke dalam (d). ■

Teorema 2.3.3 (Ketaksamaan Segitiga) Untuk sebarang bilangan real a dan b berlaku

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Bukti: Dari Teorema 2.3.2 (e), diperoleh $-|a| \leq a \leq |a|$ dan $-|b| \leq b \leq |b|$. Dengan menjumlahkan keduanya dan menerapkan Teorema 2.2.6 (b) akan diperoleh

$$-(|a|+|b|) \le a+b \le |a|+|b|.$$

Dengan Teorema 2.3.2 (d), disimpulkan bahwa $|a+b| \le |a|+|b|$. ■

Bukti yang diberikan di atas adalah bukti ketaksamaan segitiga yang ada dalam berbagai buku teks analisis, coba pembaca perhatikan bukti berikut ini :

Untuk setiap bilangan real *a, b* berlaku

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2. \\ &\le |a|^2 + 2|a|.|b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

Yang menghasilkan $|a+b| \le |a| + |b|$ (detil bukti ini perlu ditunjukkan oleh pembaca).

Ada beberapa variasi dari dari Ketaksamaan Segitiga. Dua diantaranya diberikan oleh hasil berikut ini.

Akibat 2.3.4 Jika a dan b sebarang bilangan real, maka

(a) $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$

(b) $|a-b| \le |a|+|b|$

Bukti: (a) Perhatikan bahwa *a* dapat dituliskan dengan $a = a-b+b$ .Dengan menerapkan Ketaksamaan Segitiga diperoleh $|a| = |a-b+b| \le |a-b|+|b|$ atau akan diperoleh $|a|-|b| \le |a-b|$. Dengan cara yang sama, dari $|b| = |b-a+a| \le |b-a|+|a|$ dan dengan Teorema 2.3.2 (b), diperoleh $-|a-b| = -|b-a| \le |a|-|b|$. Dengan menggabungkan kedua ketaksamaan ini dan menerapkan Teorema 2.3.2 (d), maka disimpulkan bahwa $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$.

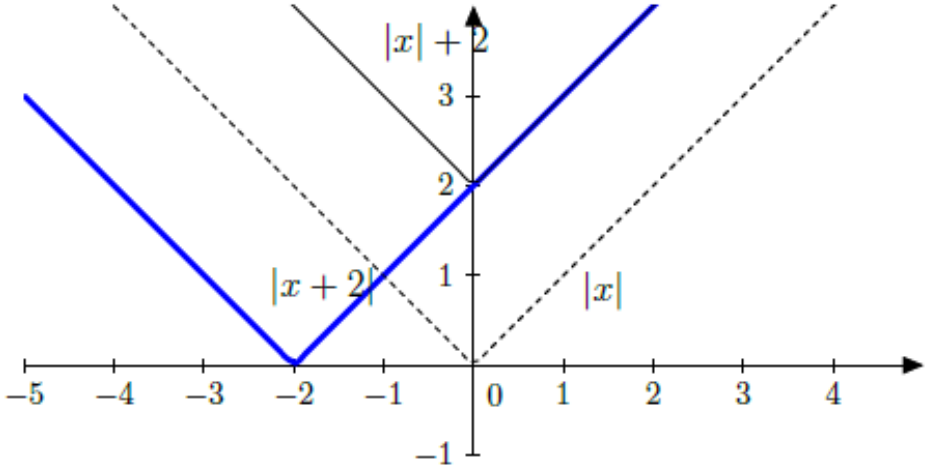
(b) Dengan mengganti *b* pada Ketaksamaan Segitiga dengan *–b* maka dihasilkan $|a-b| \le |a|+|-b|$. Karena $|-b| = |b|$ maka disimpulkan bahwa $|a-b| \le |a|+|b|$. ■

Berikut ini diberikan gambar dari fungsi $f(x) = |x+2|$ dan $g(x) = |x|+2$, yang mana gambar ini memperlihatkan urutan dari penjumlahan dan mengambil nilai mutlak. Dalam hal ini penjumlahan diikuti dengan pengambilan nilai mutlak yang adalah berbeda dengan mengambil nilai mutlah lalu kemudian melakukan penjumlahan, sehingga pada dasarnya kedua fungsi tersebut menunjukkan hubungan

$$|x+2| \le |x|+2$$

Pada grafik di bawah, garis putus-putus menggambarkan grafik dari $h(x) = |x|$, dan juga terlihan bahwa nilai fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ sama untuk $x \geq 0$ dan $f(x) <$ dari $g(x)$ untuk $x < 0$. Sehingga terjadi kasus berikut :

$x \leq -1$	$-1 < x < 0$	$x \geq 0$
$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$	$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$	$h(x) \leq f(x) = g(x)$



Dengan menerapkan Prinsip Induksi Matematika, maka Ketaksamaan Segitiga dapat diperluas untuk sejumlah berhingga bilangan real.

Akibat 2.3.5 Untuk sebarang bilangan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ di dalam $\Re$ berlaku

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| .$$

Contoh 2.3.6 (a) Tentukan himpunan A dari semua bilangan real x yang memenuhi $|2x+3| < 6$. Dari Teorema 2.3.2 (d), diproleh bahwa $x \in A \Leftrightarrow -6 < 2x+3 < 6$. Hal ini akan dipenuhi jika dan hanya jika $-9 < 2x < 3$. Dengan membagi ketiga ruas dengan 2, disimpulkan bahwa $A = \{x \in \Re : -9/2 < x < 3/2\}$.

(b) Tentukan himpunan $B = \{ x \in \Re : |x - 1| < |x|\}$. Salah satu cara menyelesaikan-nya adalah dengan menghilangkan simbol nilai mutlak. Disini terdapat tiga kasus (i) $x \geq 1$; (ii) $0 \leq x < 1$, (iii) $x < 0$. (mengapa?). Untuk kasus (i) ketaksamaan menjadi $x - 1 < x$, yang dipenuhi untuk sebarang x. Oleh karena itu semua x sehingga $x \geq 1$ anggota B. Untuk kasus (ii) ketaksamaan menjadi $-(x-1) < x$, yang dipenuhi untuk $x > \frac{1}{2}$. Jadi, kasus (ii) memberikan syarat tambahan bahwa semua x sehingga $\frac{1}{2} < x < 1$ adalah anggota B. Untuk kasus (iii) ketaksamaan menjadi $-(x-1) < -x$, yang ekuivalen dengan $1 < 0$. Karena pernyataan ini selalu salah, maka dalam kasus ini tidak ada nilai x yang memenuhi ketaksamaan. Dengan menggabungkan ketiga kasus, disimpulkan bahwa $B = \{x \in \Re : x > ½ \}$.

Terdapat alternatif untuk menentukan himpunan *B*, didasarkan kepada kenyataan bahwa $a < b$ jika dan hanya jika $a^2 < b^2$ apabila $a \geq 0$ dan $b \geq 0$. Jadi, pertidaksamaan $|x-1| < |x|$ jika dan hanya jika $|x-1|^2 < |x|^2$. Karena $|a|^2 = a^2$ untuk sebarang *a* (mengapa?), maka $x^2 - 2x + 1 < x^2$, yang menghasilakn $x > \frac{1}{2}$. Jadi, diperoleh *B = {x ∈ R : x > ½ }.* Teknik mengkudratkan ini dapat digunakan syarat-syarat tertentu, namun dalam beberapa kasus cara analisis tidak dapat kita hindari.

(c) Fungsi *f* didefinisikan dengan $f(x) = (x^2 - 4x + 1)/(3x - 1)$ untuk $1 \leq x \leq 3$. Tentukan konstanta *M* sehingga $|f(x)| \leq M$ untuk semua $1 \leq x \leq 3$.

Kita perhatikan secara terpisah pembilang dan penyebut dari

$$|f(x)| = \frac{|x^2 - 4x + 1|}{|3x - 1|}.$$

Dengan Ketaksamaan Segitiga diperoleh

$$|x^2 - 4x + 1| \leq |x|^2 + 4|x| + 1 \leq 3^2 + 4 \cdot 3 + 1 = 16,$$

karena $|x| \leq 3$ untuk semua *x* yang disyaratkan. Di pihak lain,

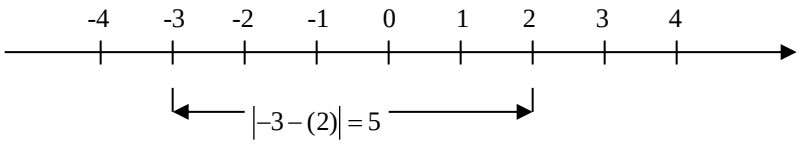
$$|3x - 1| \geq 3|x| - 1 \geq 3 \cdot 1 - 1 = 2,$$

karena $|x| \geq 1$ untuk semua *x* yang syaratkan. Jadi $1/|3x-1| \leq 1/2$ untuk $x \geq 1$. Jadi untuk $1 \leq x \leq 3$ berlaku $|f(x)| \leq 16/2 = 8$. Dalam hal ini dapat dipilih $M = 8$.

Garis Real

Interpretasi secara geometri dari sistem bilangan real adalah dengan menggabarkannya dalam garis real. Di dalam interpretasi ini, nilai mutlak $|a|$ dari elemen *a* di dalam $\Re$ adalah menyatakan jarak dari *a* terhadap titik 0. Secara umum, jarak diantara elemen *a* dan *b* di dalam $\Re$ adalah $|a-b|$. (Lihat Gambar 1.3.1).

Dalam pembahasan berikutnya akan dicari bahasa yang tepat untuk mengatakan bahwa satu bilangan real dekat dengan yang lain. Bilangan real *x* dikatakan dekat dengan bilangan real *a* dimaksudkan adalah bahwa jarak $|x-a|$ adalah kecil. Hal ini memotivasi munculnya pengertian **persekitaran (*neighbourhoods*).**



Gambar 1.3.1 Jarak diantara $a = -3$ dan $b = 2$

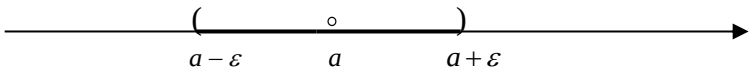
Neighborhood dari suatu titik, sering diartikan sebagai lingkungan atau persikitaran, dalam garis real, persekitaran dari titik a di $\Re$ didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.7 Misalkan $a \in \Re$ dan $\varepsilon > 0$. **Persekitaran-ε dari *a*** didefinisikan sebagai himpunan $V_\varepsilon(a) = \{x \in \Re : |x - a| < \varepsilon\}$.

Untuk $a \in \Re$, pernyataan bahwa $x \in V_\varepsilon(a)$ ekuivalen dengan pernyataan

$$-\varepsilon < x - a < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < x < a + \varepsilon .$$

Yang dapat di ilustrasikan seperti gambar 1.3.2 berikut ini



Gambar 1.3.2 Suatu persekitaran-ε dari *a*

Teorema 2.3.8 Misalkan $a \in \Re$. Jika *x* anggota dari persekitaran $V_\varepsilon(a)$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x = a$.

Bukti: Jika *x* memenuhi $|x - a| < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka menurut Teorema 2.2.9 berlaku $|x - a| = 0$, yaitu $x = a$.

■

Contoh 2.3.9 (a) Misalkan $U = \{x \in \Re : 0 < x < 1\}$. Jika $a \in U$ dan $\varepsilon = \min\{a, 1 - a\}$, maka $V_\varepsilon(a)$ termuat di dalam *U*. Jadi, setiap anggota dari *U* mempunyai persekitaran-ε yang dimuat oleh *U*.

(b) Jika $|x - a| < \varepsilon$ dan $|y - b| < \varepsilon$, maka dengan Ketaksamaan Segitiga berlaku

$$\begin{aligned} |(x + y) - (a + b)| &= |(x - a) + (y - b)| \\ &\le |x - a| + |y - b| < 2\varepsilon . \end{aligned}$$

Jadi, jika *x* dan *y* masing-masing anggota dari persekitaran-ε dari *a* dan *b*, maka $x + y$ anggota dari persekitaran-2ε dari $a + b$ (tetapi tidak perlu anggota dari perskitaran-ε dari $a + b$.

Latihan 2.3

1. Misalkan $a \in \Re$. Tunjukkan bahwa
   (a) $|a| = \sqrt{a^2}$. (b) $|a^2| = a^2$.
2. Jika $a, b \in \Re$ dan $b \neq 0$,Tunjukkan bahwa $|a/b| = |a|/|b|$.

3. Jika $a, b \in \Re$, tunjukkan bahwa $|a+b| = |a| + |b|$ jika dan hanya jika $ab \geq 0$.
4. Jika $x, y, z \in \Re$, $x \leq z$, tunjukkan $x < y < z$ jika dan hanya jika $|x-y| + |y-z| = |x-z|$.
5. Tentukan semua $x \in \Re$ yang memenuhi ketaksamaan berikut
   (a) $|2x-5| \leq 10$ (b) $|x^2 - 9| \leq 3$
   (c) $|x-1| > |x+1|$ (d) $|x| + |x+2| < 2$
6. Gunakan Ketaksamaan Segitiga untuk menunjukkan bahwa
   (a) $|x| - |y| \leq |x-y|$ (b) $|x| - |y| \leq |x+y|$
7. Jika $|a-m| < 1$ tunjukkan bahwa $|a| < |m| + 1$
8. Jika $|a-m| < m/2$ tunjukkan bahwa $|m|/2 < |a|$
9. Jika $|\delta| > 0$ dan $|x-3| < \delta$ buktikan bahwa $|x^2 - 9| < \delta(6+\delta)$.
10. Tunjukkan bahwa jika a, b $\in \Re$ dan a $\neq$ b, maka terdapat persekitaran-ε U dari a dan V dari b sedemikian hingga U $\cap$ V = $\varnothing$.

2.4 Sifat Kelengkapan dari $\Re$

Sejauh ini kita telah membicarakan sifat-sifat aljabar dan urutan dari system bilangan real $\Re$. Kita juga telah menunjukkan bahwa $\sqrt{2}$ bukan merupakan bilangan rasional, dengan sifat-sifat aljabar maupun urutan kita belum dapat menunjukkan bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan real. Untuk masalah yang terakhir ini, pada subbab ini akan dibicarakan sifat khusus dari $\Re$ yang disebut kelengkapan. Ada beberapa versi mengenai sifat kelengkapan tetapi kita tidak akan membicarakan semua versi tersebut. Akan dipilih versi sifat kelengkapan yang mempunyai metode paling efisien, yaitu dengan mengasumsikan bahwa setiap himpunan tak kosong terbatas di dalam $\Re$ mempunyai supremum.

Dipihak lain Zeno, seorang filsuf dan matematikawan Yunani Kuno (490-435 SM), mengemukakan sebuah paradoks tentang suatu perlombaan lari antara Achilles dan seekor kura-kura. Karena Achilles berlari lebih cepat daripada sang kura-kura, maka sang kura-kura memulai perlombaan x0 meter di depan Achilles. Menurut Zeno, sekalipun Achilles berlari lebih cepat dan akan semakin mendekati sang kura-kura, namun ia takkan pernah dapat menyalip sang kura-kura. Ketika Achilles mencapai titik di mana sang kura-kura mulai berlari, sang kura-kura telah menempuh x_1 meter; dan ketika Achilles mencapai posisi tersebut beberapa saat kemudian, sang kura-kuratelah menempuh x_2 meter lebih jauh; dan seterusnya.

Apa yang salah dengan paradoks Zeno ini? Dengan pengetahuan tentang bilangan real yang kita kenal sekarang, Achilles akan menyalip sang

kura-kura ketika ia telah menempuh x meter, dengan x sama dengan 'bilangan real terkecil yang lebih besar dari semua bilangan x_0, x_0+x_1, $x_0+x_1+x_2$, ...' Sebagai contoh, bila Achilles berlari dengan kecepatan 6 m/detik sementara sang kura-kura berlari dengan kecepatan 3 m/detik (ditarik roda), maka Achilles akan menyalip sang kura-kura setelah

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1\ detik$$

Hal serupa dijumpai pada metode exhaustion Eudoxus (405-355 SM), yang digunakan oleh Archimedes (287-212 SM) untuk menghampiri luas daerah lingkaran dengan luas daerah segi-n beraturan di dalam lingkaran, yaitu dengan barisan bilangan A_1, A_2, A_3, ... Luas daerah lingkaran kelak didefinisikan sebagai 'bilangan real terkecil yang lebih besar dari setiap bilangan A_i, i = 1, 2, 3, ...Argumen ini bergantung pada sebuah sifat bilangan real yang belum terpikirkan oleh Eudoxus dan Archimedes, serta matematikawan lainnya pada zaman itu.

Sifat bilangan real yang diperlukan untuk membantah paradoks Zeno atau mendukung argumen Eudoxus dan Archimedes adalah Sifat Kelengkapan, yang menjamin

eksistensi bilangan real x yang lebih besar dari x_0, $x_0 + x_1$, $x_0 + x_1 + x_2$, . . . (pada paradoks Zeno) dan juga bilangan real A yang lebih besar dari Ai, i = 1, 2, 3, . . . (pada perhitungan Archimedes).

Sifat Kelengkapan bilangan real biasanya tidak diungkapkan secara eksplisit di sekolah menengah, namun sesungguhnya merupakan sifat yang sangat penting. (Tanpa Sifat Kelengkapan, Achilles takkan memenangkan perlombaan dan luas daerah lingkaran tak dapat dinyatakan sebagai sebuah bilangan.)

Sebelum membahas sifat kelengkapan, terlebih dahulu dibahas beberapa istilah yang akan digunakan selanjutnya.

Definisi 2.4.1 Misalkan S himpunan bagian dari $\Re$.

(a) Bilangan $u \in \Re$ dikatakan **batas atas dari himpunan *S*** jika berlaku $s \le u$ untuk setiap $s \in S$.

(b) Bilangan $v \in \Re$ dikatakan **batas bawah dari himpunan *S*** jika berlaku $v \le$ s untuk setiap $s \in S$.

Himpunan S dikatakan terbatas jika terbatas di atas dan terbatas di bawah, yang dinotasikan dengan terdapat M $\in \mathbb{N}$ sedimikian hingga $|s| \le M$, untuk setiap s $\in$ S. Pernyataan terdapat M $\in \mathbb{N}$ sedimikian hingga $|s| \le M$ dapat diganti dengan terdapat M $\in \Re$ sedimikian hingga $|s| \le M$.

Definisi 2.4.2 Misalkan S himpunan bagian dari $\Re$.

(a) Jika S terbatas di atas, maka batas atas u adalah **supremum (batas atas terkecil) dari *S*** jika tidak ada bilangan yang lebih kecil dari u yang merupakan batas atas dari S.

(b) Jika *S* terbatas di bawah, maka batas bawah *v* adalah **infimum (batas bawah terbesar) dari *S*** jika tidak ada bilangan yang lebih besar dari *v* yang merupakan batas bawah dari *S*.

Selanjutnya supremum dari himpunan *S* dinotasikan dengan **sup *S*** dan infimum dari himpunan *S* dinotasikan dengan **inf *S***.

Lemma 2.4.3 Bilangan *u* adalah supremum dari himpunan tak kosong $S \subset \Re$, jika dan hanya jika memenuhi:
(a) $s \le u$ untuk setiap $s \in S$.
(b) jika $v < u$,maka terdapat $s' \in S$ sehingga $v < s'$

Bukti: Bukti ditinggalkan bagi pembaca. ■

Lemma 2.4.4 (a) Batas atas *u* dari dari himpunan tak kosong $S \subset \Re$, merupakan supremum dari *S* jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.
(b) Batas bawah *l* dari dari himpunan tak kosong $S \subset \Re$, merupakan infimum dari *S* jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_\varepsilon \in S$ sehingga $l + \varepsilon > s_\varepsilon$.

Bukti: (a) Misalkan *u* adalah batas atas dari *S* yang memenuhi kondisi di atas. Jika $v < u$ dan kita ambil $\varepsilon = u - v$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_\varepsilon \in S$ sehingga $v = u - \varepsilon < s_\varepsilon$. Jadi *v* bukan batas atas dari *S*. Karena *v* sebarang bilangan yang lebih kecil dari *u*, maka $u = \sup S$. Sebaliknya, misalkan $u = \sup S$ dan $\varepsilon > 0$. Karena $u - \varepsilon < u$, maka $u - \varepsilon$ bukan batas atas dari *S*. Akibatnya beberapa $s_\varepsilon \in S$ haruslah lebih besar daripada $u - \varepsilon$, yaitu $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.
(b) Bukti ditinggalkan bagi pembaca. ■

Penting untuk diketahui bahwa supremum dari suatu himpunan tidak selalu merupakan elemen dari himpunan tersebut. Hal ini tergantung dari himpunan yang diberikan. Berikut ini akan diberikan beberapa contoh.

Contoh 2.4.5 (a) Jika himpunan S_1 mempunyai sejumlah elemen yang berhingga, maka dapat ditunjukkan bahwa S_1 mempunyai elemen terbesar *u* dan elemen terkecil *w*. Atau dengan kata lain, *u* = sup S_1 dan *w* = inf S_1, dan keduanya merupakan elemen dari S_1.

(b) Misalkan diberikan himpunan $S_2 = \{x; 0 \le x \le 1\}$, jelas bahwa 1 merupakan batas atas dari S_2. Berikut akan dibuktikan bahwa 1 adalah supremum dari S_2. Jika $v < 1$, maka terdapat elemen $s' \in S_2$ sehingga $v < s'$. Jadi *v* bukan batas atas dari S_2 dan karena *v* sebarang bilangan yang lebih kecil dari 1, maka disimpulkan bahwa sup S_2 =1. Dengan cara yang sama juga dapat ditunjukkan bahwa 0 adalah infimum dari S_2. Jadi, baik supremum maupun infimum dari S_2 termuat di dalam S_2.

Dengan Sifat Kelengkapan, himpunan bilangan real R dapat dinyatakan sebagai sebuah garis, yang kita kenal sebagai garis bilangan real. Sifat Kelengkapan menjamin bahwa setiap titik pada garis tersebut menyatakan sebuah bilangan real, dan sebaliknya setiap bilangan real menempati sebuah titik pada garis tersebut. Sebagai perbandingan, himpunan bilangan rasional Q tidak memenuhi Sifat Kelengkapan, dan apabila kita memaksakan diri untuk menyatakannya sebagai sebuah garis, maka garis tersebut akan berlubang-lubang (sebagai contoh, bilangan x
di antara 1 dan 2 yang memenuhi $x^2 = 2$ bukan merupakan bilangan rasional, dan karenanya terdapat lubang di antara 1 dan 2).

Sifat Kelengkapan menjamin bahwa 1 merupakan bilangan real terkecil yang lebih besar dari $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$, dan terdapat bilangan real π yang menyatakan luas daerah lingkaran berjari-jari 1 dan nilainya lebih besar dari luas daerah segi-n beraturan di dalam lingkaran tersebut, untuk setiap n 2 N. Sifat Kelengkapan pula lah yang menjamin bahwa bilangan yang mempunyai bentuk desimal tak berhenti ataupun berulang merupakan bilangan real.

Sifat Supremum dan Infimum dari $\mathfrak{R}$.

Teorema 2.4.6 (Sifat Supremum dari $\mathfrak{R}$) Setiap himpunan tak kosong di dalam $\mathfrak{R}$ yang mempunyai batas atas pasti mempunyai supremum di dalam $\mathfrak{R}$.

Sifat analog dari infimum juga dapat dideduksi dari sifat supremum di atas. Misalkan S himpunan bagian tak kosong dari $\mathfrak{R}$ yang terbatas di bawah. Himpunan $S' = \{-s; s \in S\}$ terbatas di atas, dan dari Sifat supremum diperoleh bahwa $u = \sup S'$ ada. Akibatnya $-u = \inf S$.

Teorema 2.4.7 (Sifat Infimum dari $\mathfrak{R}$) Setiap himpunan tak kosong di dalam $\mathfrak{R}$ yang mempunyai batas bawah pasti mempunyai infimum di dalam $\mathfrak{R}$.

Berikut ini akan dijelaskan bagaimana menggunakan sifat-sifat supremum dan infimum.

Contoh 2.4.8 (a) Misalkan S himpunan bagian tak kosong di dalam $\mathfrak{R}$ yang terbatas di atas dan misalkan $a \in \mathfrak{R}$. Didefinisikan himpunan $a + S = \{a + x; x \in S\}$. Akan ditunjukkan bahwa

$$\sup(a + S) = a + \sup S.$$

Misalkan $u = \sup S$, karena $x \le u$, untuk setiap $x \in S$, akan kita peroleh $a + x \le a + u$. Jadi, $a + u$ merupakan batas atas bagi $a + S$. Akibatnya, $\sup(a + S) \le a + u$. Jika v adalah sebarang batas atas dari himpunan $a + S$. maka $a + x \le v$ untuk semua $x \in S$. Akibatnya $x \le v - a, x \in S$, sehingga $u = \sup S \le v - a$. Jadi, $a + u \le v$. Karena v sebarang batas atas dari himpunan

$a + S$ maka v dapat diganti dengan $\sup(a+S)$ sehingga $a + u \le \sup(a+S)$. Dengan mengkombinasikan ketaksamaan–ketaksamaan tersebut, maka dapat disimpulkan

$$\sup(a+S) = a + u = a + \sup(S).$$

(b) Misalkan f dan g merupakan fungsi bernilai real dengan domain $D \subseteq \Re$. Kita assumsikan bahwa rangenya adalah $f(D) := \{f(x) : x \in D\}$ dan $g(D) := \{g(x) : x \in D\}$ adalah himpunan-himpunan terbatas di dalam $\Re$.
(i) Jika $f(x) \le g(x)$ untuk semua $x \in D$ maka $\sup f(D) \le \sup g(D)$.
Untuk membuktikan ini, kita perhatikan bahwa bilangan $\sup g(D)$ merupakan batas atas dari himpunan $f(D)$ karena untuk sebarang $x \in D$ berlaku $f(x) \le g(x) \le \sup g(D)$. Akibatnya $\sup f(D) \le \sup g(D)$.
(ii). Jika $f(x) \le g(y)$ untuk semua $x, y \in D$ maka $\sup f(D) \le \inf g(D)$. (Buktikan !).

Kita telah mencatat sebelumnya bahwa supremum dan infimum suatu himpunan tidak harus merupakan anggota himpunan tersebut. Jika S mempunyai supremum dan $\sup S = u \in S$, maka u merupakan anggota terbesar dan disebut maksimum S, ditulis u = maks S. Serupa dengan itu, jika S mempunyai infimum dan $\inf S = t \in S$, maka t merupakan anggota terkecil dan disebut minimum S, ditulis t = min S.

Interval

Kita telah mencatat sebelumnya bahwa supremum dan infimum suatu himpunan tidak harus merupakan anggota himpunan tersebut. Jika H mempunyai supre-mum dan sup H = M ∈ H, maka M merupakan anggota terbesar dan disebut mak-simum H, ditulis M = maks H. Serupa dengan itu, jika H mempunyai infimum dan inf H = m ∈ H, maka m merupakan anggota terkecil dan disebut minimum H, ditulis m = min H.

Contoh 1.

(i) Himpunan A := {1, 2, 3} mempunyai maksimum 3 dan minimum 1.

(ii) Himpunan I := {x ∈ R : 0 ≤ x < 1} mempunyai minimum 0 tetapi tidak mempunyai maksimum. Di sini 1 = sup I tetapi 1 ∉ I, jadi ia bukan maksimum I.

(iii) Himpunan P := {x ∈ R : x > 0} tak mempunyai maksimum maupun minimum.

Himpunan I pada Contoh 1(ii) merupakan sebuah interval. Secara umum, sebuah interval di R merupakan himpunan bagian dari R yang bersifat: jika u, v ∈ I dan u ≤ x ≤ v, maka x ∈ I. Sebuah interval mungkin terbatas dan mungkin pula tak terbatas.

Berikut adalah notasi untuk interval terbatas di R:

$$(a, b) := \{x : a < x < b\}.$$

$$[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}.$$

$$[a, b) := \{x : a \leq x < b\}.$$

$$(a, b] := \{x : a < x \leq b\}.$$

Berikut adalah notasi untuk interval tak terbatas di R (selain R sendiri):

$$(a, \infty) := \{x : x > a\}.$$

$$[a, \infty) := \{x : x \geq a\}.$$
$$(-\infty, b) := \{x : x < b\}.$$
$$(-\infty, b] := \{x : x \leq b\}.$$

Catat bahwa lambang ∞ dan $-\infty$ di sini bukan menyatakan bilangan real.

Interval (a, b), (a, ∞), dan ($-\infty$, b) merupakan interval terbuka, sedangkan in-terval [a, b], [a, ∞), dan ($-\infty$, b] merupakan interval tertutup. Sementara itu, interval [a, b) dan (a, b] sering disebut sebagai interval setengah terbuka. Interval [a, b] yang bersifat tertutup dan terbatas merupakan contoh himpunan kompak di R. Pada [a, b], a merupakan minimum dan b merupakan maksimum.

Latihan 2.4

1. Misalkan

   $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in N \right\}$, $B = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in N \right\}$, $C = \{\cos n : n \in N\}$,

   $D = \{90n - n^2 : n \in N\}$. dan

   $E = \left\{1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right\}$.

   Tentukan himpunan mana saja yang mempunyai batas bawah dan batas atas dan carilah supremum dan infimumnya jika ada.
2. Misalkan $S_1 = \{ x \in \Re : x \geq 0\}$. Tunjukkan bahwa himpunan S_1 mempunyai batas bawah, tetapi tidak batas atas. Tunjukkan bawah inf $S_1 = 0$.
3. Misalkan $S_2 = \{ x \in \Re : x > 0\}$. Apakah S_2 mempunyai batas bawah ? Apakah S_2 mempunyai batas atas ? Apakah inf S_2 ada ? Apakah sup S_2 ? Buktikan jawaban anda Misalkan $S_3 = \{1/n : n \in N\}$. Tunjukkan bahwa $\sup S_3 = 1$ dan $\inf S_3 \geq 0$.
4. Misalkan $S_4 = \{1 - (-1)^n/n : n \in N\}$. Carilah inf S_4 dan sup S_4.

5. Misalkan $f(x)=x, \quad g(x)=1-x^2$.
   (a) Jika $A=\{f(x); x\in[-1,1]\}$ carilah supremum dari A
   (b) Jika $B=\{g(x); x\in[-1,1]\}$ carilah supremum dari B
   (c) Jika $C=\{f(x)+g(x); x\in[-1,1]\}$ carilah supremum dari C.
   (d) Apakah sup A + sup B = sup C ? Mengapa ?
6. Misalkan S himpunan bagian tak kosong di dalam $\Re$ yang terbatas di bawah. Buktikan bahwa $\inf S=-\sup\{-s, s\in S\}$.
7. Tunjukkan bahwa setiap bilangan real merupakan supremum sekaligus infimum bagi himpunan kosong.
8. Misalkan S himpunan tak kosong dan S_0 himpunan bagian dari S. Jika S terbatas di bawah dan di atas, buktikan bahwa $\inf S\le\inf S_0\le\sup S_0\le\sup S$.
9. Misalkan S himpunan tak kosong di dalam $\Re$ dengan $u=\sup S$. Buktikan bahwa
   (a) untuk setiap $n\in N$, bilangan $u-1/n$ bukan batas atas dari S
   (b) untuk setiap $n\in N$, $u+1/n$ batas atas dari S.
10. Misalkan S himpunan tak kosong dan terbatas di atas. Buktikan bahwa S memuat anggota terbesar jika dan hanya jika S memuat supremumnya.
11. Misalkan S himpunan tak kosong dan terbatas di atas dan $u=\sup S$. Jika b $\in\Re$ dengan $b<u$, buktikan terdapat sedikitnya dua titik di dalam S yang terletak di antara b dan u.
12. Misalkan S himpunan tak kosong dan terbatas. Jika $\delta>0$ dan $|x-y|\ge\delta;\ x,y\in S, x\ne y$. Buktikan bahwa S memuat anggota terbesar.
13. Misalkan S himpunan tak kosong terbatas di dalam $\Re$.
   (a) Jika $a>0$, dan misalkan $aS=\{as; s\in S\}$. Buktikan bahwa
   $$\inf(aS)=a\inf S, \qquad \sup(aS)=a\sup S.$$
   (b) Jika $b<0$, dan misalkan $bS=\{bs; s\in S\}$. Buktikan bahwa
   $$\inf(bS)=b\sup S, \qquad \sup(bS)=b\inf S.$$
14. Misalkan X himpunan tak kosong dan $f : X \to \Re$ mempunyai range yang terbatas di dalam $\Re$. Jika a $\in\Re$, maka tunjukkan bahwa
   $$sup\ \{a + f(x) : x \in X\} = a + sup\ \{f(x) : x \in X\}$$
   dan
   $$inf\ \{a + f(x) : x \in X\} = a + inf\ \{f(x) : x \in X\}.$$
15. Misalkan X himpunan tak kosong dan $f, g : X \to \Re$ mempunyai range yang terbatas di dalam $\Re$. Tunjukkan bahwa
   $$sup\ \{f(x) + g(x) : x \in X\} \le sup\ \{f(x) : x \in X\} + sup\ \{g(x) : x \in X\}$$
   dan
   $$inf\ \{f(x) : x \in X\} + inf\ \{g(x) : x \in X\} \le inf\ \{f(x) + g(x) : x \in X\}.$$

2.5 Aplikasi dari Sifat Supremum (Sifat Archimides)

Salah satu akibat penting dari sifat supremum adalah bahwa himpunan bilangan asli N tidak mempunyai batas atas di dalam $\Re$. Hal ini berarti

bahwa jika diberikan sebarang bilangan real *x*, maka terdapat bilangan asli *n* sehingga $x < n$.

Teorema 2.5.1 (Sifat Archimides) Jika $x \in \Re$ maka terdapat $n_x \in N$ sehingga $x \le n_x$.

Bukti: Andaikan kesimpulan dari teorema di atas tidak benar, yaitu untuk setiap $n \in N$ terdapat $x \in \Re$ sehingga $x > n$. Oleh karena itu *x* adalah batas atas dari *N*, sehingga dengan sifat supremum, maka himpunan tak kosong *N* mempunyai supremum *u* di dalam $\Re$. Karena $u - 1 < u$, dengan Lemma 2.4.4 maka terdapat $m \in N$ sehingga $u - 1 < m$. Tetapi akibatnya $u < m + 1$. Karena $m + 1 \in N$, maka terjadi kontradiksi dengan asumsi bahwa *u* adalah batas atas dari *N*. ■

Sifat Archimides dapat dinyatakan dalam bentuk lain, seperti berikut ini :

Akibat 2.5.2 Jika *y* dan *z* bilangan real positif, maka :

(a) Terdapat $n \in N$ sehingga $z < ny$.

(b) Terdapat $n \in N$ sehingga $0 < 1/n < y$.

(c) Terdapat $n \in N$ sehingga $n - 1 \le z < n$.

Bukti: (a) Karena $x = z/y > 0$, maka terdapat $n \in N$ sehingga $z/y = x < n$ yang berarti $z < ny$.

(b) Dengan mengganti $z = 1$ pada (a), maka $1 < ny$, sehingga $1/n < y$.

(c) Sifat Archimides menjamin bahwa himpunan bagian $\{m \in N : z < m\}$ di dalam *N* merupakan himpunan tak kosong. Misalkan *n* adalah elemen terkecil dari himpunan tersebut, maka $n - 1$ bukan anggota dari himpunan tersebut, sehingga $n - 1 \le z < n$.

Eksistensi $\sqrt{2}$

Pentingnya Sifat Archimides adalah kenyataan bahwa sifat tersebut menjamin eksistensi dari bilangan real dengan beberapa kondisi tertentu. Berikut ini kita memberikan ilustrasi yang disertai dengan bukti akan eksistensi (adanya) bilangan real *x* sehingga $x^2 = 2$.

Teorema 2.5.3 Terdapat bilangan positif real *x* sehingga $x^2 = 2$.

Bukti : Misalkan S = {s $\in \Re$ *: 0* $\le s, s^2 < 2\}$, karena $1 \in S$, maka himpunan tersebut tidak kosong. Selanjutnya, jika $t > 2$ maka $t^2 > 4$, sehingga $t \notin S$. Ini berarti bahwa 2 merupakan batas atas dari *S*. Dengan sifat supremum, maka *S* mempunyai supremum di dalam $\Re$. Sekarang dimisalkan $x = \sup S$. Perhatikan bahwa $x > 1$.

Akan ditunjukkan bahwa $x^2 = 2$, yaitu dengan menunjukkan bahwa tidak dipenuhi $x^2 > 2$ maupun $x^2 < 2$.

Pertama diandaikan bahwa $x^2 < 2$. Akan ditunjukkan bahwa hal ini bertentangan dengan *x* batas atas dari *S*, yaitu dengan mencari bilangan asli *n* sehingga $x + 1/n \in S$. Untuk menentukan bilangan *n* tersebut, perhatikan langkah-langkah berikut ini. Untuk setiap $n \in N$ berlaku $1/n^2 \le 1/n$, sehingga

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \le x^2 + \frac{1}{n}(2x+1).$$

Dengan pengandaian di atas maka $2 - x^2 > 0$ dan $(2 - x^2)/(2x+1) > 0$. Dengan Akibat 2.5.2 terdapat bilangan asli *n* sehingga

$$\frac{1}{n} < \frac{2 - x^2}{2x+1}.$$

Akibatnya untuk pemilihan bilangan asli ini

$$(x + 1/n)^2 < x^2 + (2 - x^2) = 2.$$

Hal ini menyatakan bahwa $x + 1/n \in S$, yang bertentangan dengan asumsi bahwa *x* batas atas dari *S*. Jadi tidak dipenuhi bahwa $x^2 < 2$.

Sekarang diandaikan bahwa $x^2 > 2$. Akan ditunjukkan bahwa kita dapat memilih bilangan asli *m* sehingga $x - 1/m$ juga batas atas dari *S*, yang bertentangan dengan $x = \sup S$. Untuk menunjukkan hal ini, perhatikan bahwa

$$\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 = x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} > x^2 - \frac{2x}{m}.$$

Selanjutnya dengan asumsi di atas diperoleh $x^2 - 2 > 0$ dan $(x^2 - 2)/2x > 0$. Dengan Akibat 2.5.2, terdapat bilangan asli *m* sehingga

$$\frac{1}{m} < \frac{x^2 - 2}{2x}$$

Jadi, dapat dipilih bilangan asli *m* dengan

$$\frac{2x}{m} < x^2 - 2,$$

Akibatnya untuk pemilihan bilangan asli ini

$$(x - 1/m)^2 > x^2 - (x^2 - 2) = 2.$$

Hal ini menyatakan bahwa $x - 1/m$ adalah batas atas dari *S*, yang bertentangan dengan asumsi bahwa *x* supremum dari *S* .Jadi tidak benar bahwa $x^2 > 2$. Karena tidak benar bahwa $x^2 > 2$ maupun $x^2 < 2$, maka disimpulkan $x^2 = 2$. ■

Dengan memodifikasi argumen di atas, pembaca dapat menunjukkan bahwa jika $a > 0$, maka terdapat dengan tunggal bilangan $b > 0$ sehingga $b^2 = a$. Selanjutnya bilangan *b* dinamakan akar kuadrat positif dari *a* dan dinotasikan dengan $b = \sqrt{a}$ atau $b = a^{1/2}$.

Kerapatan Bilangan Rasional di Dalam $\Re$

Berikut ini akan ditunjukan bahwa bilangan rasional "rapat" di dalam $\Re$ yang berarti bahwa di antara sebarang dua bilangan real yang berbeda, selalu dapat ditemukan bilangan rasional yang banyaknya tak berhingga.

Dengan asumsi bahwa jarak antara dua bilangan asli sekurang-kurangnya sama dengan 1, kita dapat membuktikan Sifat Terurut Rapi N, yang dinyatakan dalam sebagai berikut.

Sifat Terurut Rapi N. Setiap himpunan bagian tak kosong dari N mempunyai minimum.

Bukti. Misalkan A $\subseteq$ N tak kosong. Jelas bahwa sebagai himpunan bagian dari N, himpunan A terbatas di bawah. Menurut Sifat Kelengkapan, A mempunyai infimum, sebutlah a = inf A. Sekarang $a + 1$ bukan batas bawah A, dan karenanya terdapat n $\in$ A sehingga $n < a + 1$. Jika n bukan minimum A, maka terdapat $m \in$ A sehingga $m < n$. Dalam hal ini, kita mempunyai

$$a \le m < n < a + 1,$$

sehingga jarak antara m dan n lebih kecil dari 1. Ini bertentangan dengan sifat bilangan asli. Jadi n mestilah minimum A.

Dengan menggunakan Sifat Archimedes dan Sifat Terurut Rapi N , kita dapat membuktikan sifat kepadatan bilangan rasional di $\Re$, yang dinyatakan sebagai teorema berikut.

***Teorema* 2.5.4 (Kerapatan Bilangan Rasional)** Jika x dan y bilangan real dengan $x < y$, maka terdapat bilangan rasional r sehingga $x < r < y$.

***Bukti*:** Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan $x > 0$. Dengan Sifat Archimides, terdapat bilangan asli n sehingga $n > 1/(y - x)$. Untuk n yang demikian, kita peroleh $ny - nx > 1$. Karena $nx > 0$, maka dengan mengaplikasikan Akibat 2.5.2(c), terdapat bilangan asli m sehingga $m - 1 \le nx < m$. Karena $m \le nx + 1 < ny$ maka $m < ny$. Akibatnya $nx < m < ny$. Jadi $r = m/n$ adalah bilangan rasional yang memenuhi kondisi $x < r < y$. ■

***Akibat* 2.5.5** Jika x dan y bilangan real dengan $x < y$, maka terdapat bilangan irrasional z sehingga $x < z < y$.

***Bukti*:** Dengan mengaplikasikan Teorema Kerapatan 2.5.4 pada bilangan real $x/\sqrt{2}$ dan $y/\sqrt{2}$, kita peroleh bilangan rasional $r \neq 0$ sehingga

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Jadi $z = r\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional yang memenuhi $x < z < y$. ■

Latihan 2.5

1. Gunakan Sifat Archimides atau Akibat 2.5.2(b) untuk menunjukkan bahwa
   $\inf\{1/n : n \in N\} = 0$.
2. Jika $S = \{1/n - 1/m : n, m \in \mathrm{N}\}$, tentukan infimum dan supremum S.
3. Gunakan Teorema 2.5.3 untuk menunjukkan eksistensi dari $\sqrt{7}$
4. Misalkan $x \in \Re$. Tunjukkan bahwa terdapat dengan tunggal bilangan $n \in \mathrm{Z}$ sedemikian hingga $n - 1 \leq x < n$.
5. Jika $y > 0$, tunjukkan terdapat $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$ sedemikian hingga $1/2^n < \mathrm{y}$.
6. Jika $u > 0$ adalah sebarang bilangan dan $x < y$, tunjukkan bahwa terdapat bilangan rasional r sedemikian hingga $x < ru < y$.